Zápočtové příklady z diskrétní matematiky

Zimní semestr 1999-2000

Vojtěch Hála
egg@atlas.cz
studijní kruh I33

2.1.2000

Příklad 11.
Zjistěte (a dokažte), v jakých řádcích Pascalova trojúhelníku jsou jen lichá čísla.

<u>Tvrzení:</u>
Jen lichá čísla se vyskytují právě v těch řádcích Pascalova trojúhelníka, ve kterých je 2^m čísel, kde m je libovolné přirozené číslo nebo nula.

<u>Důkaz:</u>

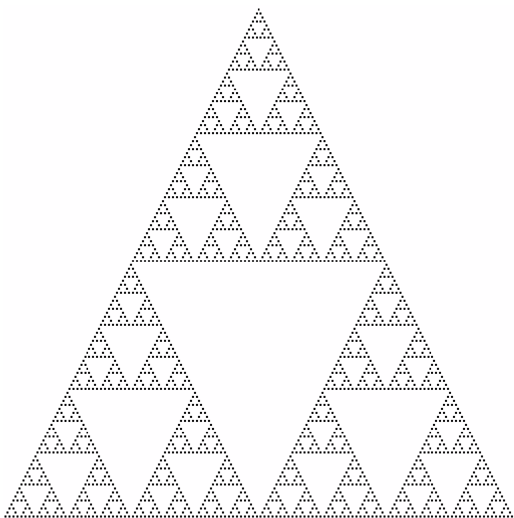
Pascalův trojúhelník začíná jednou jedničkou v prvním řádku. V dalších řádcích je vždy o jedno číslo více, přičemž každé z nich je součtem dvou čísel nad ním.

Součtem lichého a sudého čísla je liché číslo, zatímco sčítání dvou čísel se stejnou paritou dává číslo sudé. Nedopustíme se tedy chyby, pokud budeme zkoumat Pascalův trojúhelník, v němž každé číslo nahradíme jeho zbytkem po dělení dvěma. Jen lichá čísla jsou právě v těch řádcích, které obsahují samé jedničky.

První dva řádky obsahují pouze jedničky. V důkaze budeme postupovat matematickou indukcí po řádcích obsahujících pouze jedničky. Máme-li nějaký řádek v němž je n jedniček, víme, že v dalším řádku bude na každé straně jednička a mezi nimi n-1 nul. Jestliže liché číslo lze získat pouze jako součet lichého a sudého, pak nelze získat jedničku uprostřed řádku dříve než po n krocích, protože úsek nul uprostřed řádku se bude v každém kroku maximálně o jednu zkracovat. Teprve po n krocích je tedy opět šance, že řádek bude obsahovat pouze jedničky (což odpovídá řádkům uvedeným v tvrzení). Zbývá dokázat, že k tomu ve všech případech skutečně dojde.

Budeme sledovat, co se děje pod jedničkami na krajích našeho výchozího řádku. Vzhledem k tomu, že jsou (jakoby z obou stran) obklopeny nulami, vytvoří se pod nimi trojúhelník identický s trojúhelníkem nad naším výchozím řádkem. Jednička v prvním řádku, která vlastně celý Pascalův trojúhelník generuje, je totiž také obklopena samými nulami. Vytvoří se vlastně dvě kopie výchozího trojúhelníka, jehož základnu tvoří samé jedničky, umístěné vedle sebe.

Z toho vyplývá, že po n řádcích opět obdržíme řádek se samými jedničkami, které představují lichá čísla v Pascalově trojúhelníku. QED.



Zvolená varianta Pascalova trojúhelníku (modulo 2), který má 2^m řádků, je vlastně m-tou aproximací Sierpinskiho trojúhelníka, jak naznačuje obrázek.

Příklad 9.

Dokažte, že je-li p prvočíslo a $0 < k < p$*, tak p dělí* $\binom{p}{k}$.

$\binom{p}{k}$ je přirozené číslo odpovídající výrazu $\frac{p!}{(p-k)!k!}$, kde $(p-k)!$ lze zkrátit, čímž dostaneme tvar $\frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!}$. Máme tedy dokázat, že výraz $\frac{(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!}$ je celočíselný. Z vlastností prvočísel víme, že p není dělitelné žádným celým číslem z intervalu (1,p). Číslo *k!* je součinem takových čísel. Z toho vyplývá, že číslo p nedělí číslo $k!$. Pokud součin $p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)$ je dělitelný číslem $k!$, pak také součin $(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)$ je dělitelný číslem $k!$. Výraz $\frac{(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!}$ je celočíselný. QED.

Příklad 10.

Dokažte následující zobecnění předchozího příkladu. Nechť p je prvočíslo a $n=p^m$*, m je libovolné kladné číslo,* $0 < k < p$*. Pak p dělí* $\binom{n}{k}$.

Pro m=1 byl důkaz proveden v příkladě 9. Dále budeme postupovat matematickou indukcí. Podle vzorce $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ převedeme úlohu na studium Pascalova trojúhelníka. Bez újmy na obecnosti se budeme zabývat Pascalovým trojúhelníkem, v němž každé číslo nahradíme jeho zbytkem po dělení p, analogicky s řešením příkladu 11. Označme řádky trojúhelníka čísly tak, že označení odpovídá počtu čísel v řádku minus 1. Máme dokázat, že v řádcích označených mocninou prvočísla jsou kromě dvou jedniček na krajích samé nuly. Víme, že takový je řádek p. Pro řádek p-1 z toho plyne, že začíná jedničkou a následně se v něm střídají čísla p-1 a 1 až na konci je opět jednička. Označme trojúhelník nad p-tým řádkem písmenem T. Jako v příkladu 11, při postupování trojúhelníkem směrem dolů se po p krocích vytvoří dvě kopie trojúhelníka T, mezi nimiž budou samé nuly. Všimněme si nyní, co se stane v místě, kde se základny těchto kopií dotknou. Po obou stranách T jsou jedničky, které se v místě dotyku sečtou a vytvoří dvojku. Pod ní se bude vytvářet obdoba T, v níž ovšem každé číslo je vynásobeno dvěma (a samozřejmě modulo p). Když tento postup provedeme p-krát, zjistíme, že jsme získali variantu T, v níž ovšem místo čísel figurují trojúhelníky T, které mají na špičce číslo odpovídající pozici v T. V posledním řádku získaného trojúhelníka (označme ho S) se budou opět střídat čísla 1 a p-1, čímž se na řádku p^2 vytvoří přesně to, co jsme očekávali – totiž jedničky na krajích a jinak samé nuly. Pokud budeme nyní postup opakovat, bude se trojúhelník S opět kopírovat analogicky, jako předtím trojúhelník T, až na řádku p^3 dostaneme střídavě 1 a p-1. Tento postup lze stále opakovat, čímž je proveden důkaz pro jakoukoli mocninu čísla p.

```
                         1
                        11
                        121
                       1331
                       14141
                      100001
                      1100011
                     12100121
                     133101331
                    1414114141
                    10000200001
                   110002200011
                   1210024200121
                  13310211201331
                  141412323214141
                 1000030000300001
                 11000330003300011
                121003130031300121
                1331034430344301331
               14141323233232314141
               100004000010000400001
              1100044000110004400011
              12100434001210043400121
             133104224013310422401331
             1414141414141414141414141
            10000000000000000000000001
```

Prvních dvacet šest řádků Pascalova trojúhelníka modulo 5.

Příklad 15.

Buď T pěstovaný strom a c(T) jeho kód z nul a jedniček (viz přednáška). Jak z c(T) určíte počet listů T?

Kódová posloupnost pro určitý vrchol vzniká tak, že se posloupnosti synů tohoto vrcholu zapíšou za sebou v pořadí odpovídajícím danému nakreslení. Poté se před takto vzniklou posloupnost připíše nula a za ní jednička. Listy mají kód 01. Kódem pěstovaného stromu je takto vzniklý kód jeho kořene.

Ze způsobu vytváření kódu je zřejmé, že list stromu je reprezentován nulou a jedničkou těsně vedle sebe. Jiným způsobem taková dvojice nemůže vzniknout. Chceme-li tedy zjistit počet listů stromu daného kódem *c(T)*, stačí spočítat, kolikrát se v *c(T)* vyskytuje nula bezprostředně následovaná jedničkou.

Příklad 5.
V senátu zasedá 150 senátorů, po třech z každého z 50 států. Kolika způsoby lze zvolit 4-členný výbor, nesmí-li v něm být z jednoho státu více než jeden člen?

Prvního senátora do výboru můžeme vybírat ze všech 150. Když je ale senátor do výboru zvolen, ztrácí jeho stát šanci na získání dalšího mandátu v tomto výboru. Pro volbu každého dalšího máme tedy o tři možnosti méně. Tím dostáváme z kombinatorického pravidla součinu číslo 150.147.144.141. Tento výsledek je ale třeba ještě vydělit počtem permutací na čtyřprvkové množině, neboť ve výboru nezáleží na pořadí volby senátorů. Pro celkový počet způsobů volby tedy dostáváme výraz

$$150 \,.\, 147 \,.\, 144 \,.\, 141 : 4! = \underline{18\,654\,300.}$$

Příklad 6.
Mějme mřížku m x n. Kolik v ní existuje cest z levého horního do pravého dolního rohu? Připouštíme jen cesty, které používají hrany mřížky a mají nejkratší možnou délku.

Mřížka intuitivně odpovídá rovinnému grafu, který má hrany na hranách mřížky a vrcholy v jejich průsečících a v rozích. Na vodorovné vnější hraně mřížky je m+1 vrcholů a na svislé vnější hraně je n+1.

V každém kroku procházení cestou můžeme jít doprava, pokud ještě nejsme na pravém okraji mřížky, nebo dolů, pokud ještě nejsme na dolním okraji mřížky. Každou cestu si můžeme představit jako posloupnost třeba nul a jedniček, která nám říká, zda se v daném kroku dát doprava nebo dolů. V této posloupnosti je *n* kroků dolů (nul) a m kroků vpravo (jedniček). Délka takové posloupnosti je m+n. Celkový počet takových posloupností je

$$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}.$$

Toto číslo odpovídá počtu nejkratších možných cest z levého horního do pravého dolního rohu naší mřížky.

Příklad 14.
Charakterizujte stromy, z nichž lze přidáním jedné hrany vytvořit cyklus.

Cyklus je orientovaná kružnice.

Máme-li pomocí operace přidání hrany získat cyklus, rozhodně se strom nesmí žádným způsobem větvit. Navíc aby byla splněna podmínka o orientaci, je třeba, aby byl strom zakořeněný. Takže charakteristika zní: strom je zakořeněný a obsahuje pouze jedinou cestu. Pokud k takovému stromu přidáme hranu vedoucí od jediného listu ke kořeni, získáme orientovanou kružnici, neboli cyklus.

Příklad 3.
Ve výtahu je 7 osob. Výtah třikrát zastavil, pokaždé někdo vystoupil (a nikdo nepřistoupil). Po třetím zastavení se výtah vyprázdnil. Kolika různými způsoby to mohlo proběhnout? (Sledujeme, kdo vystoupil jako první, kdo jako druhý a kdo jako třetí.)

Jinými slovy každému člověku máme přiřadit patro ve kterém vystoupil (právě jedno). Jedná se tedy o počet zobrazení sedmiprvkové množiny na tříprvkovou. Na cvičeních jsme pro počet zobrazení na odvodili pomocí principu inkluze a exkluze vzorec

$$\# f : m \to\!> n = n^m + (-1)^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} i^m .$$

Po dosazení m=7 a n=3 dostaneme 3^7 - (0 – 3 + 3.2^7) = <u>1806</u>.