

# **EL PLA VECTORIAL**

**E. Lalana España  
J. García Roger  
M. Guilera Almirall**

**GRAF123 UNITAT 7  
GRUP ABAX**

Títol: **El pla vectorial**  
Autors: E. Llana Espuña  
J. García Roger  
M. Guilera Almirall

Edició: M.À. de Miguel, 1990



Generalitat de Catalunya  
Departament d'Ensenyament  
**Programa d'Informàtica Educativa**

## ÍNDIX

1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS	5
1.1 Títol	5
1.2 Autors	5
1.3 Tema	5
1.4 Assignatura	6
1.5 Nivell escolar	6
1.6 Coneixements previs	6
1.7 Localització	6
1.8 Noms dels fitxers	6
2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT	7
2.1 Posta en marxa	7
2.2 Opcions bàsiques	7
2.3 Diagrama estructural	11
2.4 Instruccions. Interacció	11
3. ASPECTES PEDAGÒGICS	14
3.1 Objectius	14
3.2 Metodologia d'ús	15
3.3 Opcions i exemple d'ús	16

# 1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

## 1.1 Títol

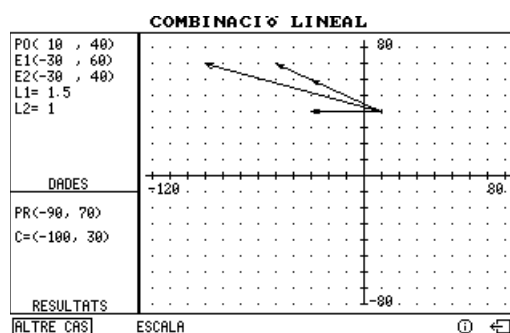
EL PLA VECTORIAL

## 1.2 Autors

Emilio Lalana Espuña  
Joaquim García Roger  
Maria Guilera Almirall  
Col.labora: Grup ABAX

## 1.3 Tema

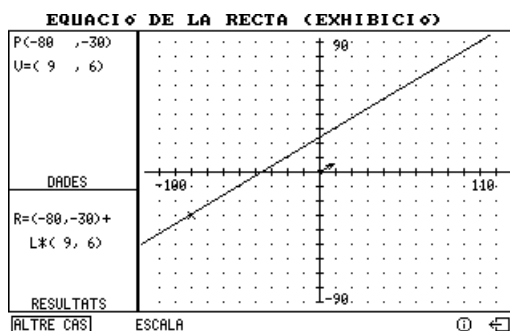
Aquest programa permet estudiar els vectors del pla. Remarca en el seu estudi la diferència entre vector lliure i vector fix.



El programa realitza de manera gràfica i analítica algunes operacions entre vectors.

Estudia la recta en el pla a partir del vector director i d'un punt de la recta.

El programa proposa una sèrie d'exercicis a través dels quals s'aprèn a associar dos punts del pla amb un vector.



## 1.4 Assignatura

Matemàtiques.

## 1.5 Nivell escolar

Segon i tercer de B.U.P.  
Tercer, quart i cinquè curs de F.P.

## 1.6 Coneixements previs

Per començar és aconsellable conèixer els conceptes associats a la recta, al pla i la seva representació gràfica: coordenades, eixos, reticulat, escala, ...  
És convenient també conèixer el concepte de vector i de vector unitari. Així com les operacions entre vectors, com per exemple el producte escalar entre dos vectors.

## 1.7 Localització

Aquesta unitat es troba en el disc amb l'etiqueta

GRAF123 UNITAT 7  
EL PLA VECTORIAL

## 1.8 Noms dels fitxers

La unitat 7 està formada pels següents arxius:

Programa:

GRAFU7.EXE

Altres arxius:

PORTADA.BIN LETD

U7P1.SCT U7P2.SCT

Arxius de les pàgines d'ajut i documentació:

U7D1.SCT U7D2.SCT U7D3.SCT U7D4.SCT

U7D5.SCT

U7D6.SCT U7D7.SCT U7D8.SCT U7D9.SCT U7I1.SCT

U7I2.SCT U7I3.SCT U7I4.SCT U7I5.SCT U7I6.SCT

U7I7.SCT U7I8.SCT U7I9.SCT

## 2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

### 2.1 Posta en marxa

Per executar la unitat 7 es pot triar alguna de les següents tres possibilitats:

- Disposar d'un disquet a la boca A amb tots els arxius assenyalats. A continuació executar el programa GRAFU7.EXE
- Copiar al disc C tots els arxius en un subdirector. Cal accedir al subdirector i executar el programa GRAFU7.EXE
- Instal·lar al disc C. Instal·lar el programa i els seus arxius. Accedir a través del Sesam als menús corresponents.

### 2.2 Opcions bàsiques

Una vegada començat el programa, a la pantalla apareix el menú de possibilitats:

COMENÇAMENT  
DOCUMENTACIÓ  
SORTIDA

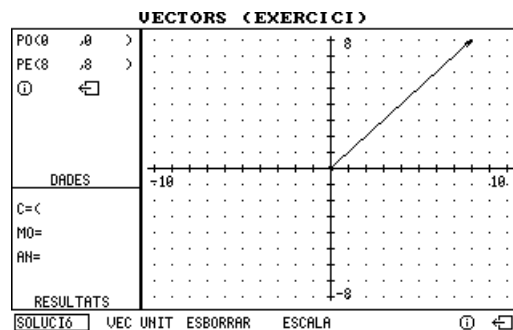
que permet iniciar el programa.

Un cop s'ha triat l'opció de COMENÇAMENT apareixerà el menú d'opcions bàsiques.

La unitat presenta tres opcions:

VECTORS EN EL PLA  
OPERACIONS AMB VECTORS  
LA RECTA VECTORIAL.

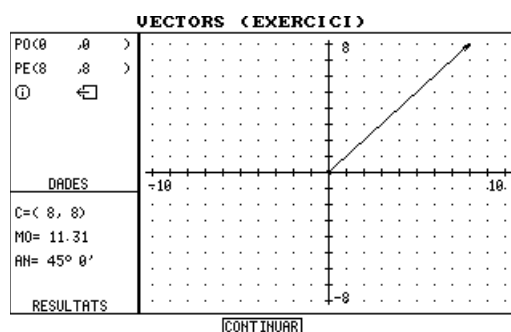
En diferents moments durant l'execució, el programa ofereix a diferents opcions la possibilitat d'escollir entre exemples i exercicis. Als exemples, l'ordinador exposa els elements i els conceptes que després haurà d'aplicar als exercicis.



En les exhibicions o exemples s'utilitza el recurs de fer parpellejar el vector que s'està modificant.

En el cas dels exercicis d'exhibició, els punts i els vectors (obtinguts a l'atzar) tenen com a coordenades valors múltiples de les unitats dels eixos de coordenades. En els exercicis l'usuari ha d'introduir les dades tot tenint en compte que pot haver-hi valors que el programa no accepti.





### VECTORS EN EL PLA.

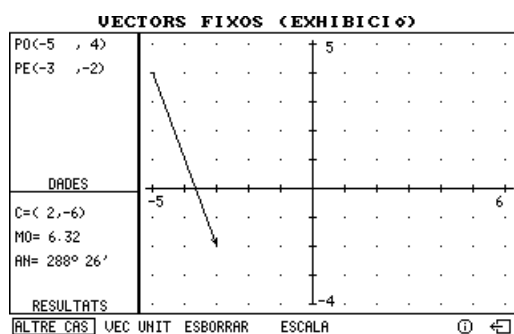
El programa ofereix dos tipus de vector per a treballar, els vectors fixos i els lliures. Ambdós es fan servir a les dues modalitats: exemples i exercicis.

Pels exemples s'han seleccionat, com a extrems dels eixos, valors que permetin el traçat adequat del vector unitari. Així, doncs, si hom tria la modalitat d'exercici, de mòdul 1 i pot ser que no es vegi amb claredat segons els valor Introduïts per als extrems dels eixos.

#### a) Vectors fixos.

A partir de les dades que s'indiquen i les que s'obtenen a l'atzar es dibuixen diversos vectors fixos.

Les dades corresponen a l'últim dibuixat. Pot demanar-se el dibuix del vector unitari.



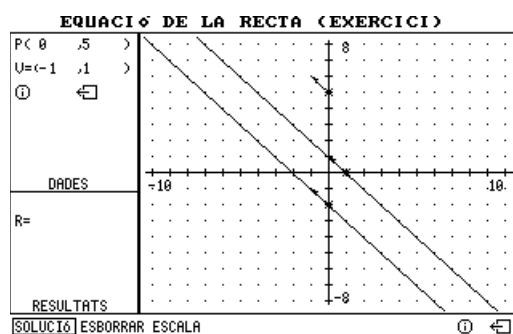
#### b) Vectors lliures.

A partir de les components d'un vector es dibuixen a l'atzar diversos vectors lliures. Es dona si es demana el mòdul i l'angle que formen amb el semieix OX.

#### c) Exercicis

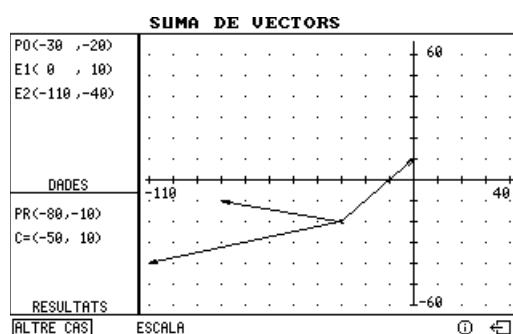
A la modalitat d'exercici les opcions són les mateixes però l'alumne entra les coordenades de PO (punt d'origen) i PE (punt extrem) i es dibuixa el vector. L'opció SOLUCIO ofereix els valors dels resultats i components, mòdul i angle que forma amb l'eix OX, (C,MO,AN).





### OPERACIONS AMB ELS VECTORS

Aquesta opció permet realitzar diferents operacions entre vectors. També distingeix la modalitat d'exercici i d'exemples. En l'exhibició s'obtenen els valors de les dades a l'atzar i en els exercicis l'alumne entra les dades i quan ho vol selecciona l'opció SOLUCIÓ.



Operacions permeses:

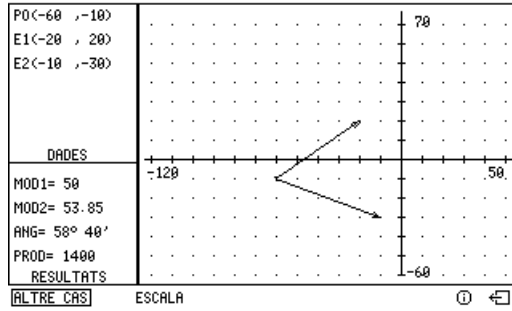
- SUMA
- RESTA
- PRODUCTE PER UN ESCALAR
- COMBINACIÓ LINEAL
- PRODUCTE ESCALAR.

A la modalitat d'exercici el programa espera l'entrada de les dades per indicar els vectors corresponents.

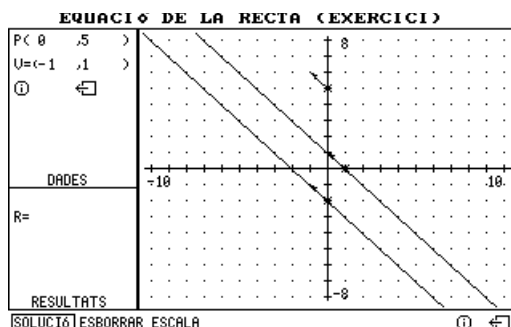
A partir dels punts extrems dels vectors o/i d'un o més escalars, es dibuixa el vector i el resultat de l'operació que s'indica.

A la resta i en la pantalla s'aconsegueix apreciar la transformació  $-b = +(-b)$  mitjançant un parpelleig i el consegüent canvi de color.

**PRODUCTE ESCALAR (EXHIBICI 6)**



En el cas del producte escalar, a partir de dos vectors que s'entren mitjançant els seus punts extrems, es calculen sengles mòduls, l'angle que formen entre ells i el valor del producte escalar.



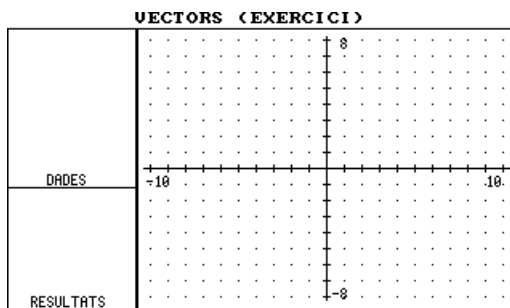
### LA RECTA VECTORIAL

El programa dibuixa una recta a partir d'un vector director i de les coordenades d'un punt per on passa. Dibuixa el vector director en el punt indicat i a continuació es traça la recta i se n'escriu l'equació vectorial.

A més cal tenir present altres opcions:

### ESCALA

Abans de començar les opcions bàsiques i cada vegada que hom seleccioni la modalitat d'exercici, l'usuari haurà de decidir si utilitza l'escala estàndard que se li ofereix, o bé si prefereix una altra escala. No obstant, en diferents fases del programa, és possible modificar l'escala que s'estigui utilitzant.



Pot ser sol·licitada qualsevol regió del pla. No és imprescindible que hi estiguin inclosos els eixos.

En el cas de no ser visualitzats els quatre semieixos, l'ordinador ens indica prou informació per conèixer els valors de les unitats de l'escala.

Els extrems de l'escala estàndard són:

Eix X: -10, 10

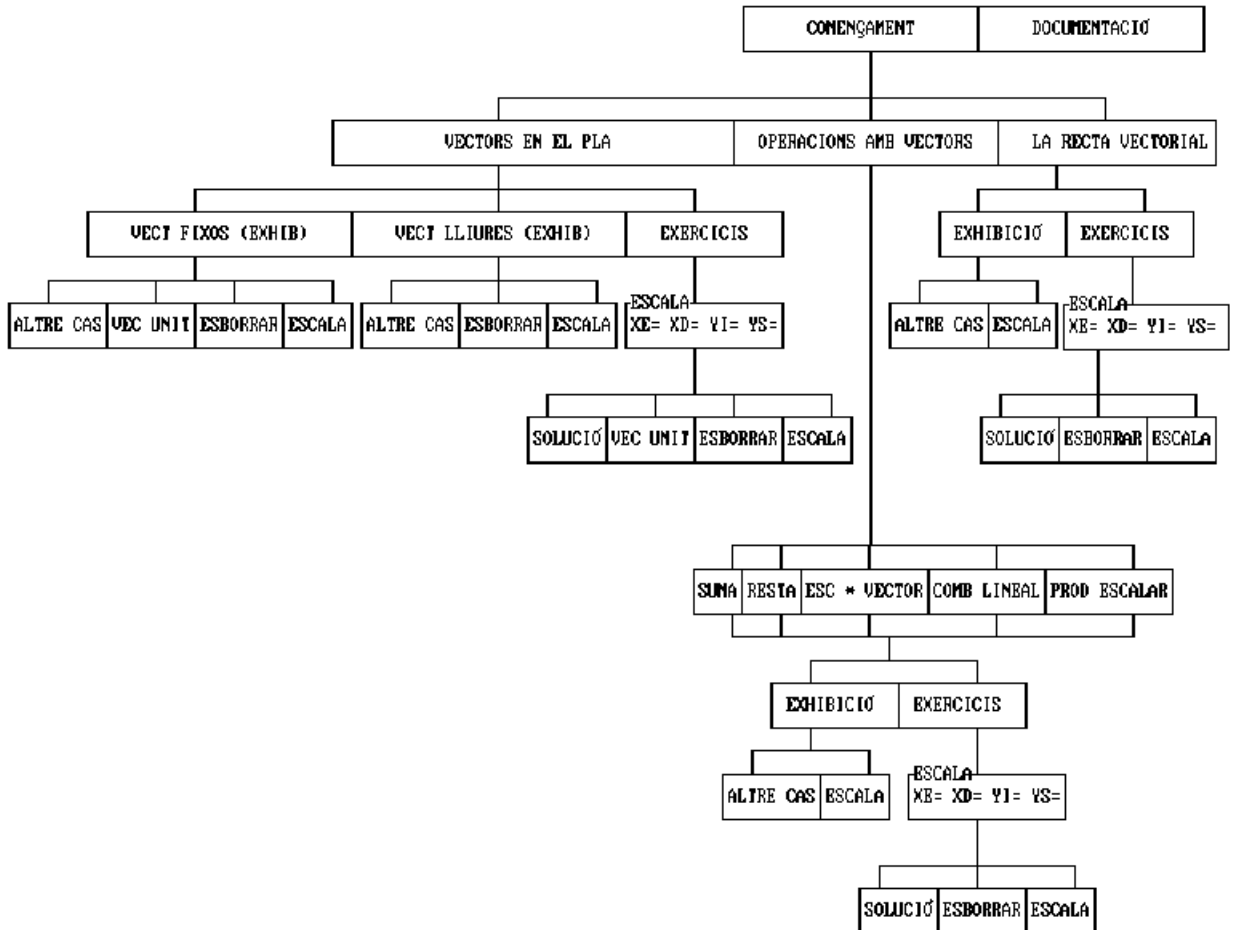
Eix Y: -8, 8

## ESBORRAR

En els menús en què apareix l'opció ESBORRAR s'ofereix la possibilitat d'esborrar de la recta o el pla les figures representades.

### 2.3 Diagrama estructural

Un cop s'ha triat una opció de COMENÇAMENT, el programa permet continuar tal i com es detalla en el següent diagrama estructural:



### 2.4 Instruccions. Interacció

#### A) Interacció

La interacció amb el programa segueix les característiques generals de tots el programes de GRAF123, del qual forma part.

a) Selecció d'una opció.

- Les opcions accessibles en cada instant apareixen en la part inferior de la pantalla.
- Un rectangle emmarca una d'aquestes opcions. Aquest marc pot

desplaçar-se cap a la dreta mitjançant la barra espaciadora. Les tecles de

moviment del cursor <- i -> també permeten desplaçar el marc cap a l'esquerra o cap a la dreta. D'aquesta manera hom indica quina serà l'opció seleccionada.

- En prémer  $\leftarrow$  el programa considera seleccionada l'opció emmarcada i en prossegueix l'execució a través d'aquesta opció.

b) Informació o Ajut.

- Cada vegada que l'usuari pot interaccionar amb el programa se li ofereix la possibilitat de sol·licitar "ajut" a través de l'opció "informació", que és representada mitjançant una "i" emmarcada per una circumferència.
- La informació proporcionada està relacionada amb la situació des de la qual es demana.

c) Sortida.

- De la mateixa manera s'ofereix la possibilitat de retrocedir a opcions anteriors. Per fer-ho cal utilitzar l'opció "sortida" que apareix a l'extrem inferior dret del monitor indicada mitjançant el símbol situat més a la dreta.

d) Entrada de valors numèrics.

Pel que fa a l'entrada de valors numèrics cal assenyalar:

- El nombre màxim de caràcters que admet és de 6 per l'escala i 4 per els vectors.
- Només admet aquells caràcters que puguin tenir sentit en el moment de ser avaluats.
- La coma decimal s'indica mitjançant un punt (".").
- Admet fraccions. Per exemple:  $5/3$ ,  $-6/7$ , etc.
- El marc indica a quina coordenada o variable s'assigna el valor introduït.
- En cas que es vulgui esborrar, pot fer-se mitjançant la tecla de retrocés. També, si es torna a una entrada quan es tecleja un valor, queda automàticament esborrat l'anterior.
- Per prosseguir l'execució del programa amb els valors introduïts, cal prémer  $\leftarrow$  quan el marc estigui sobre alguna de les variables del model.
- Si els valors introduïts són menors, en valor absolut, de 0.0001 es prenen com a zero, ja que es considera que no tenen sentit per a la finalitat didàctica d'aquesta unitat.

e) Possibles errors.

Si en la pantalla no apareix la gràfica o el reticle, o els vectors, sense ser considerats els valors escrits, aquesta circumstància pot ser deguda a:

- Els valors teclejats no són avaluables o no són correctes. Exemples:  $5/0$ ,  $3/$ ,  $0./0.$ ,  $3,2$
- Falten dades
- El marc no es troba sobre una de les variables.
- A l'escalat, els extrems de l'eix s'han teclejat amb valors iguals.

## B) Altres instruccions

Altres instruccions i característiques de la interacció pròpies del programa són:

1.- Representació de vectors i punts.

Per representar un vector en el pla s'ha triat el dibuix usual d'una fletxa, el vector nul es representa per un punt. Qualsevol punt del pla es representa amb una creu.

2.- Per a l'entrada i sortida de dades la notació és:

a) Els punts es simbolitzen per lletres amb les seves coordenades entre parèntesis al seu costat.

b) Els vectors es representen per lletres amb les seves components entre parèntesis separades pel signe =.

Així PO(3,-4) són les coordenades del punt PO i  $C=(3,-4)$  són les components del vector C.

Tant per a dades d'entrada com per als resultats s'utilitza el següent conveni:

PO Punt origen dels vectors.

PE, E1, E2, E3 Punts extrems dels vectors.

C=Components del vector.

L, L1, L2, L3 Escalars.

MO, MOD1, MOD2 Mòduls de vectors.

AN Angle que forma el vector amb el semieix positiu OX.

AN Angle que formen dos vectors.

PRExtrem del vector solució en OPERACIONS AMB VECTORS.

PROD Producte escalar de vectors.

R=Equació vectorial de la recta.

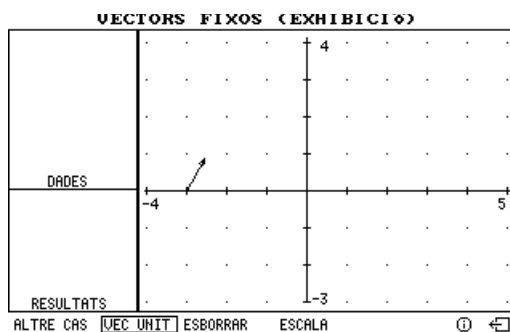
Les dades d'entrada de vectors a diferència de les dades de l'escala poden ser d'una longitud de 4 caràcters. (L'escalat permet 6 caràcters).

### 3. ASPECTES PEDAGÒGICS

#### 3.1 Objectius.

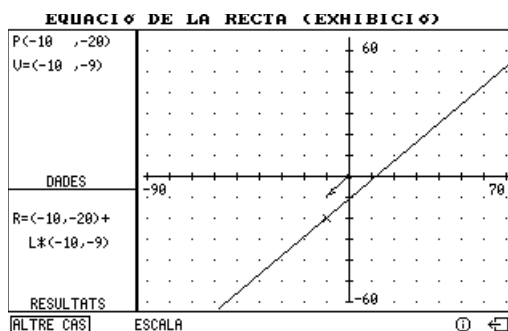
La unitat pretén com a objectiu introduir el concepte de vector en el pla cartesià, treballar amb els vectors, i ajudar l'alumne a familiaritzar-se amb la representació dels vectors al pla.

Com aplicació el programa proposa l'estudi de la recta a partir d'un punt i un vector.



Més concretament podríem considerar com a objectius:

- Conèixer el concepte de vector com a segment orientat.
- Estudiar la representació de vectors en el pla.
- Saber diferenciar entre vector fix i lliure.
- Tenir clar el concepte de vector unitari.
- Estudiar les operacions entre vectors.
- Introduir i desenvolupar els conceptes de dependència i independència lineal entre vectors.
- Estudiar el concepte de combinació lineal de vectors.
- Calcular i interpretar el producte escalar entre vectors.
- Introduir el concepte de vectors ortogonals.
- Treballar la perpendicularitat entre rectes com a concepte i com a equació de la perpendicular.
- Treballar el paral·lelisme de rectes com a concepte i com a equació de la paral·lela.

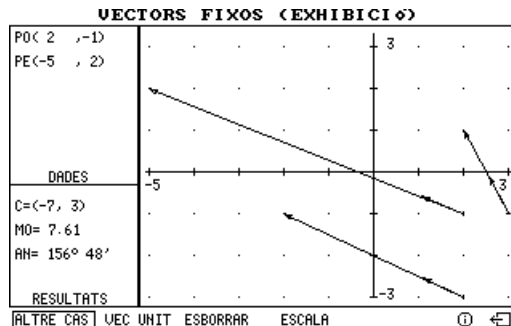




### 3.2 Metodologia d'ús

Creiem convenient dirigir l'alumne al començament davant de l'ordinador. Per fer-ho, suggerim que l'alumne posseeixi una petita documentació.

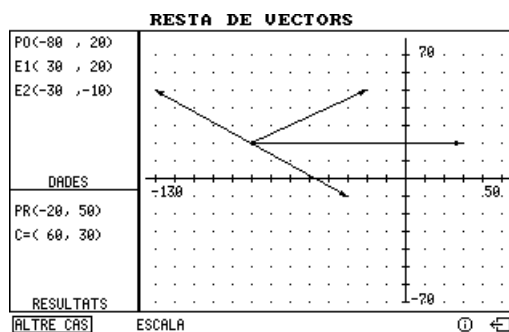
Una proposta sobre la utilització d'aquesta unitat, podria contemplar el fet de començar per les modalitats d'exemples exhibició.



Explicar les característiques generals del programa i els elements del pla que s'utilitzen en el desenvolupament de la unitat: vectors, operacions, rectes, ...

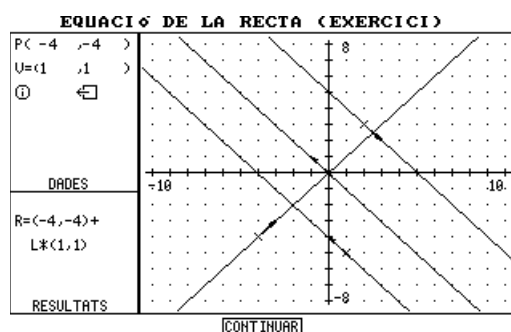
Aquesta introducció a través d'exemples pot servir per a introduir els conceptes i explicar els tipus d'exercicis, fer una exposició a l'alumne de les fases de l'exercici que vindrà a continuació. És aconsellable repetir aquesta fase fins que l'alumne entengui convenientment la solució de l'exemple plantejat.

L'explicació de les diferències entre vectors fixos i lliures, es pot fer conjuntament amb la realització dels exercicis necessaris per assolir aquests conceptes.



Una proposta d'ús del programa és que serveixi per l'exercitació gràficament i analítica de les operacions entre vectors, seguit de les reflexions oportunes sobre la relació entre les dues formes de solució.

Com aplicació dels aspectes vectorials, el programa també permet estudiar l'expressió vectorial de la recta, els conceptes i expressions de perpendicularitat i paral·lelisme entre rectes.



### Altres aspectes

Altres aspectes que poden ser d'interès fan relació a opcions complementàries com l'ESCALA. La utilització de l'opció d'ESCALA, permet representar un vector o una recta en diferents escales, visualitzar diferents zones del pla, incrementar el nombre de divisions senyalades en la pantalla, etc.

També la modificació de l'escala a conveniència, pot ajudar a assimilar conceptes relatius a escala, recta i pla cartesià, coordenades, representació en el pla, ...

Didàcticament sembla més correcte començar treballant amb escales que mantinguin la proporció entre les unitats dels eixos.

### 3.3 Opcions i exemple d'ús

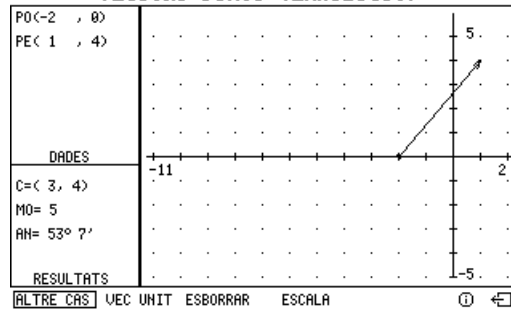
A continuació s'exposen alguns exemples d'ús referents a diferents moments del desenvolupament del programa a fi de facilitar la comprensió del seu funcionament i donar algunes propostes. A partir de les característiques comunes (no les d'interacció) de les dues fases, exhibició i exercici, considerarem exemples de només una de les dues fases.

#### Vectors fixos i lliures, modalitat exhibició.

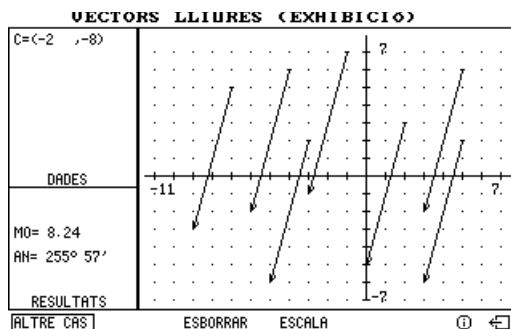
- Seleccioneu i activeu l'opció de VECTORS EN EL PLA.
- Seleccioneu i activeu l'opció de vectors FIXOS, modalitat d'exhibició.

Hom dibuixarà un vector. Observeu que un vector està determinat per dos punts, el punt d'origen i el punt extrem: és a dir, un parell de punts donats en un determinat ordre. A continuació podeu seguir com a la pantalla es dibuixen diferents vectors fixos, activant l'opció ALTRE CAS. També podeu demanar el dibuix del vector unitari.

**VECTORS FIXOS (EXHIBICIÓ)**



Les figures corresponen a dos moments de l'exhibició, la primera, l'opció de vectors fixos, dibuixarà a l'atzar la resta. La segona figura correspon a l'opció d'exhibició de vectors lliures.

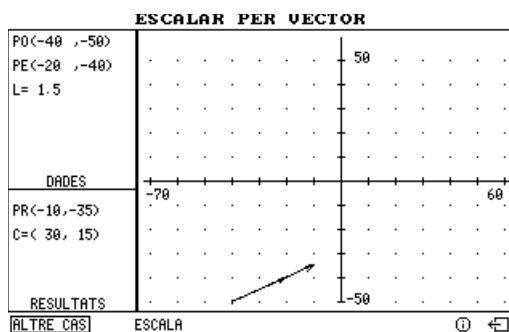


### Vectors fixos, exercici.

En activar aquesta opció demanarà els punts que determinen el vector per tal que sigui introduït per l'alumne.

- Seleccioneu i activeu l'opció de sortida fins a arribar al menú on surt l'opció d'exercici.
- Activeu després l'opció de vectors lliures, modalitat d'exercici.
- Introduïu les coordenades del vector: PO i PE (punt de l'origen i punt de l'extrem).
- Després d'entrar les coordenades de PO i PE i es dibuixa el vector. L'opció que dona la solució ofereix els valors dels resultats: Coordenades, mòdul i angle del vector.

### Operacions amb vectors



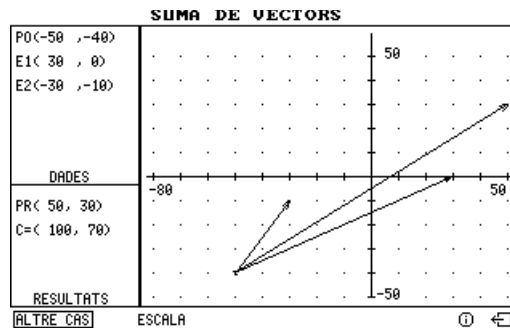
- Activeu l'opció de sortida fins a arribar al menú d'opcions bàsiques.
- Activeu l'opció d'operacions amb vectors.
- Heu d'escollir una operació.
- Activeu la modalitat d'exercici.
- Confirmeu l'escala estàndard (prement dues vegades la tecla  $\leftarrow$ ).

Podeu començar a realitzar operacions amb vectors.

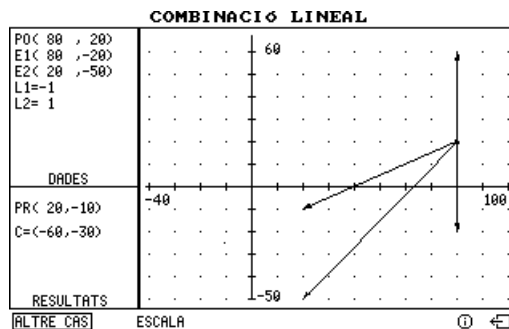
Us proposem que comproveu les propietats de les diferents operacions.

Per exemple:

- La propietat commutiva de la suma de vectors.
- Què passa si sumeu un vector amb el vector  $(0,0)$ ?
- Quines són les característiques del vector resultant d'una resta ?
- La multiplicació per  $-1$  d'un vector: què significa ?



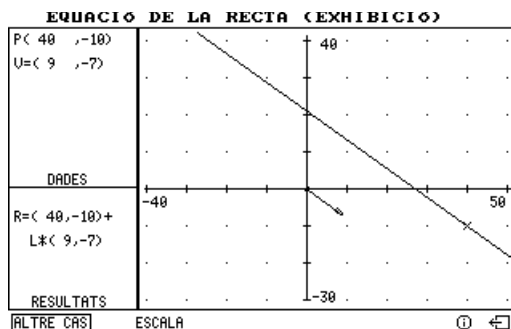
Recordeu que en qualsevol moment podeu obtenir els valors de les coordenades del vector solució de l'operació activant l'opció que dona la solució de l'exercici. Podeu realitzar l'exercici d'obtenir el vector resultant d'una combinació lineal de tres vectors, i repetir el procés pas a pas fent servir les operacions de suma, resta, multiplicació per escalars que s'ofereixen al menú.



Introduïu els valors de dos vectors que s'entren mitjançant els seus punts extrems. Hom calcula sengles mòduls, l'angle que formen entre ells i el valor del producte escalar.

### Recta vectorial

Una recta en el pla pot estar referenciada de diferents maneres, una d'elles consisteix a donar un punt d'ella i una direcció o vector director.



Si activeu l'opció corresponent i entreu el punt i el vector director observareu com es dibuixa la recta i com apareix l'equació de la recta.

Es dibuixa el vector director en el punt indicat i a continuació es traça la recta i se n'escriu l'equació vectorial. Es mantenen les rectes dibuixades.

Una vegada teniu dibuixada una recta podeu senyalar un punt diferent i a partir del mateix vector director comprovar que les dues rectes són paral·leles.

Aquest programa permet estudiar els vectors del pla. Remarca en el seu estudi la diferència entre vector lliure i vector fix.

### **Graf123**

N.	Títol
1	La recta real i el pla cartesià.
2	Funció afí. Rectes.
3	Funció quadràtica. Paràboles.
4	Representació gràfica d'una funció.
5	Composició de funcions. Deformacions gràfiques.
6	Resolució gràfica d'equacions.
<b>7</b>	<b>El pla vectorial.</b>
8	L'espai vectorial.

Software Educatiu III  
Programa d'Informàtica Educativa