ITERACIONS

Joaquim Castellsaguer i Guanyabens

Títol: Iteracions
Autor: Joaquim Castellsaguer i Guanyabens
Data: agost 1988

Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Programa d'Informàtica Educativa

ÍNDEX

1. NOM DEL PROGRAMA

Iteracions (nom d'arxiu ITER.EXE)

2. AUTOR

Joaquim Castellsaguer i Guanyabens, formant part del GRUP EIX amb Carles Bailo i Mompart, Carles Barceló i Vidal, Antoni Gomà i Nasarre, Ferran Ruiz i Tarragó i Joan Antoni Sellarès i Chiva

3. OBJECTIUS

Constituir un ajut perquè l'alumne, individualment o en grup segons les disponibilitats, pugui efectuar una investigació sobre els resultats d'una iteració funcional.

La investigació ha de mostrar:
- els comportaments bàsics de la successió d'iteracions relatius a la seva monotonia i convergència.
- el significat gràfic del procés d'iteració i de les seves modalitats.
- el diferent comportament d'equacions equivalents.
- el tipus d'influència del valor inicial sobre el resultat de la iteració.
- els criteris de determinació de la convergència, el seu sentit i la seva velocitat, a partir del signe i afitació de la derivada.

El professor ha d'induir a la investigació, establir les notacions adequades, proposar exemples significatius, ajudar a interpretar els resultats gràfics, i demostrar els criteris generals que puguin obtenir-se.

4. FONAMENTACIÓ TEÒRICA

Donada una funció F i un nombre real x(0) hom pot, en principi, definir la successió d'iteracions de F a partir de x(0) per

$$x(n+1) = F(x(n)) \text{ , per a } n > 0$$

La successió no pot definir-se sempre, car si per a cert n el nombre x(n) no pertany al domini de F no existiran els x(i) per a i>n.

La importància d'aquesta successió deriva del resultat següent: si F és contínua i {x(n)} és convergent vers un límit X, llavors X=F(X) i per tant el límit de la successió d'iteracions de F, si existeix, és solució de l'equació

$$x = F(x)$$

Els criteris que regulen la convergència de {x(n)} són:

1. La successió és convergent si F és contractiva en un interval I tal que F(I) estigui contingut en I, i el valor inicial es pren en I.
Una condició suficient per a això és que F sigui derivable i en l'interval I es verifiqui

$$ABS(F'(x))<k<1$$

2. La convergència, si de cas es dóna, és monòtona si en l'interval anterior és $F'(x)>0$ i és alternada en cas contrari.

3. La velocitat de convergència és la d'una progressió geomètrica que té per raó una fita de $F'(x)$. Més precisament, si en l'interval anterior és $ABS(F'(x))<k<1$ i x és el límit de la successió, és

$$ABS(x(n+1)-x)< k^n.ABS(x(0)-x)$$

La successió d'iteracions $\{x(n)\}$ pot tenir diversos punts d'acumulació; aquesta situació només és possible en funcions no monòtones i està relacionada amb la moderna teoria dels "atractors estranys".

5. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC

El context adequat a aquest programa és el dels mètodes de resolució d'equacions. Dins d'ell pot ésser presentat des de dos punts de vista:
- com un mètode "primitiu" del qual els mètodes de la secant, la tangent, etc. són casos particulars.
- com un mètode especialitzat, dirigit primordialment vers les equacions no algebraiques.

El programa és independent del que hom adopti.

6. CONEIXEMENTS PREVIS

Els coneixements aconsellables per dur a terme l'estudi que el programa proposa són:
- la terminologia bàsica sobre successions.
- els dominis de les funcions elementals.
- les nocions de solució aproximada d'una equació i de marge d'error.
- la interpretació gràfica de la resolució d'un sistema d'equacions.
- l'estructura general d'un procés de resolució d'equacions: afitació, separació, aproximació, etc.
- el significat geomètric de la derivada d'una funció en un punt i del seu signe.
- el teorema del valor mitjà per a funcions derivables.

7. NIVELL

L'estudi dels fenòmens iteratius reuneix i posa en contacte coneixements i habilitats matemàtiques bastant diverses, pel que es constitueix en una cruïlla tan interessant com difícil de situar dins de la rígida compartimentació dels programes actuals. Això no obstant, pot utilitzar-se perfectament amb els alumnes de l'actual C.O.U. en tractar els temes "Resolució numèrica d'equacions" i, en una primera lectura, mostra als alumnes de Segon Curs de Batxillerat un mètode important de generació de successions, i una valuosa col.lecció dels comportaments d'aquestes.

8. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

Queda reflectida en el diagrama de la figura 1, on es poden veure l'estructura bàsica dels menús, els moments d'introducció de dades i les possibilitats de sortida.
A més a més de les sortides indicades en la darrera opció de cada menú, podem també abandonar l'execució en qualsevol moment prement F1 (que porta al final del programa) o F2 (que porta al menú de l'opció en què estem o, en el cas gràfic, al menú principal).

9. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA

El professor defineix la iteració d'una funció F a partir d'un valor inicial o llavor, i descriu la formació de la successió d'iteracions. Pot proposar-ne exemples realitzables senzillament amb una calculadora, com ara F(x)=sqr(x) o F(x)=cos(x).
Aviat hom veurà que la calculadora no és útil per iterar funcions compostes, i tampoc permet tenir a la vista les successives iteracions per estudiar la seva evolució. Aquests inconvenients seran superats per l'ús de l'ordinador, i es proposa així l'execució del programa.

El programa permet, d'entrada, triar la funció i la llavor desitjades. Inicialment aquesta elecció pot estar a càrrec del professor, que disposarà d'una completa col.lecció d'exemples ja preparats, però progressivament i segons les circumstàncies pot anar recollint les iniciatives dels alumnes.

Apareix el que anomenarem Menú Principal:

1. observar els resultats numèrics de les iteracions
2. resoldre l'equació x=F(x)
3. observar el procés gràfic de resolució
4. canviar la llavor
5. canviar la funció
6. acabar el programa

Els seus punts fonamentals són els tres primers:

PUNT 1

El seu objectiu és l'estudi de la successió d'iteracions i la seva classificació mitjançant criteris de monotonia i convergència.
Presenta el Menú Secundari 1:

1. d'un en un i controlant el pas
2. en blocs de fins a 15 iteracions i controlant el pas de bloc
3. veient alguns seleccionats amb certa cadència
4. acabar aquesta opció

Els punts 1.1, 1.2 i 1.3 visualitzen els termes de la successió en la forma indicada, i estan posats en l'ordre més corrent de la seva utilització, que correspon a un avenç cada cop més ràpid en la successió.

Passant per ells en forma consecutiva o no l'alumne haurà de reconèixer que en la major part dels casos la successió pot classificar-se, a partir d'un lloc, com a:

-convergent monòtona
-divergent monòtona
-convergent alternada
-divergent alternada

Quan una successió hagi estat classificada, pot prosseguir-se la iteració fins a assolir els límits que imposen les característiques de l'ordinador i tenir:

* en el cas de convergència, una estabilització dels valors que apareixen, i el professor ha de deixar clar que aquesta estabilització és només aparent i que el valor estable que s'obté pot prendre's com una aproximació al límit.
* en el cas de divergència, una declaració d'haver ultrapassat la capacitat de l'ordinador.
* en el cas d'impossibilitat de completar la solució per una sortida del domini, un missatge explícit que així ho declari.

També és profitós, un cop classificada cada successió, modificar la llavor i fer observar a l'alumne:

- La independència del límit de la successió, si existeix, de la llavor triada.
- L'existència,per a certs casos, de zones de valors de la llavor que fan la successió convergent, i d'altres que la fan divergent.
- La reduïda influència del valor de la llavor en la velocitat de convergència, en el cas que n'hi hagi; això es desprèn del nombre d'iteracions necessàries per a l'estabilització dels resultats.

És convenient que l'alumne porti un registre de les funcions i llavors utilitzades i dels comportaments observats en cada cas, per tal que posteriorment pugui comprendre les raons de cadascun i aprengui a preveure'ls.

PUNT 2

El seu objectiu és utilitzar la successió d'iteracions per a trobar solucions aproximades d'equacions de la forma x=F(x).

El professor ha de justificar la identificació de la solució amb el límit de la successió d'iteracions.

Els càlculs realitzats són essencialment els mateixos que en el punt 1, i es presentaran en la seva totalitat, o no, segons l'elecció que es faci en el Menú Secundari 2:

1. veure els passos amb certa cadència
2. anar directament a la solució
3. variar el marge d'error
4. acabar aquesta opció

Aquest punt 2 no està pensat per repetir la feina feta en el punt 1, sinó per aprofitar les conclusions se n'hagin tret: es desaconsella, doncs, utilitzar-lo en succesions que hom sap que no són convergents.

És convenient començar amb un marge d'error gran fins a arribar a la solució i després anar reduint-lo; les iteracions no tornen a començar des del valor inicial, sinó des del darrer obtingut, i mostren el refinament progressiu de la solució.

És molt important fer veure a l'alumne la possibilitat de transformar una equació $x=F(x)$ en una altra equació equivalent $x=G(x)$, el comportament de la qual en el procés d'iteració sigui completament diferent. Cal posar especial atenció a les equacions de segon grau, amb solucions conegudes prèviament, i que tenen formes equivalents que condueixen a cadascuna de les solucions per separat. La situació és més complexa en el cas d'equacions polinòmiques de grau superior a 2, on cal mostrar que la conversió "ingènua" en equacions de la forma $x=F(x)$ les fa generalment divergents.

PUNT 3

El seu objectiu és interpretar gràficament el procés d'iteració, comprendre el sentit dels quatre casos principals de successions d'iteració registrats en el punt 1, i facilitar l'observació de les característiques de la funció que permetin induir els criteris de convergència i monotonia.

Podem triar l'interval en què representarem la funció; és indispensable que contingui la llavor donada, però podem modificar l'interval o la llavor si la gràfica obtinguda no ens satisfà. L'alumne ha de comprendre que la solució de l'equació correspon a la intersecció de la recta $y=x$ i la corba $y=F(x)$, i ajustar els paràmetres de l'estudi fins a poder observar-la. Per treballar còmodament cal que es familiaritzi abans amb el mètode utilitzat per la presentació dels segments graduats substitutius dels eixos.

La llavor apareix indicada per una fletxa sota l'eix horitzontal.
Es desenvolupa llavors un procés dinàmic, controlat per l'alumne o el professor, en el qual es van obtenint les successives iteracions per reflexió sobre la bisectriu. Els valors corresponents són indicats per una ratlla sota l'eix horitzontal i registrats numèricament a la zona dreta de la pantalla.

L'alumne ha de seguir el desenvolupament gràfic ajudant-se si cal amb explicacions i simbolismes genèrics fins a poder dominar el mecanisme i intuir la seva propera evolució; la condensació dels segments representatius ha de donar-li, en el seu cas, la idea de convergència abans observada numèricament.

És molt possible que, després d'alguns exemples amb funcions molt diverses, l'alumne comenci a trobar-los excessivament semblants. En primer lloc, les gràfiques varien molt poc! . És una bona ocasió per recordar que, en intervals petits, tota funció derivable és pràcticament una recta. Més endavant el professor farà veure que, realment, el ventall de situacions és limitat a quatre, segons la posició de la tangent a la corba en el punt d'intersecció respecte de la bisectriu, i portarà a caracteritzar-les en relació als tipus de successions abans obtinguts.

Les figures 2, 3 i 4 mostren, respectivament, una successió divergent monòtona, una successió convergent alternada, i una successió amb dos punts d'acumulació.

10. INSTRUCCIONS I COMENTARIS DE FUNCIONAMENT

El programa es posa en marxa amb ITER.

La introducció de la funció va seguida del control de la seva correcció, i la introducció de la llavor va seguida del control de la seva pertinença al domini. Si en algun dels dos casos es detecta un error, un missatge informa l'usuari i el programa retorna a la introducció corresponent.

Els resultats numèrics es presenten generalment amb sis xifres decimals i sense usar la notació exponencial per a nombres propers a zero. En la part del programa dedicada a la resolució d'equacions només apareix el nombre de xifres decimals corresponent al marge d'error amb què es treballa, si bé els càlculs es realitzen internament amb més precisió.

Els gràfics estan referits a dos segments proveïts de graduacions separades matemàticament pel valor anomenat "Graduació" que hi figura. L'horitzontal es correspon amb l'interval de representació i el vertical ha estat triat perquè el valor mitjà de les ordenades dels extrems de l'interval de representació estigui, aproximadament, en el seu centre. Això fa que, per exemple, si les ordenades dels extrems són iguals la gràfica ocupi només la meitat de l'espai disponible. Per tant hom optimitza l'espai treballant en intervals de monotonia.

11. EXEMPLES

Aquesta col.lecció d'exemples es presenta dividida en quatre grups:

1. Funcions de convergència lenta
Són les que assoleixen el seu valor estable en un nombre d'iteracions superior o igual a 20. Especialment adequades per l'estudi gràfic.

2. Funcions de convergència ràpida
Són les que assoleixen el seu valor estable en un nombre d'iteracions inferior a 20. No són aconsellades per a l'estudi gràfic.

3. Funcions algebraiques senzilles
Grups de funcions que il.lustren l'equivalència entre diverses formes d'una mateixa equació algebraica de solucions conegudes, i el seu variat comportament.

4. Famílies uniparamètriques de funcions
Dues famílies depenents d'un paràmetre, segons els valors del qual poden produir-se resultats diferents i interessants anomalies.

5. Alguns exemples divergents
Unes recomanacions generals per al seu ús:

- Als exemples que segueixen, les funcions estan escrites d'acord amb les convencions usuals del llenguatge BASIC. Tot i això poden entrar-se d'una forma més propera a l'ús matemàtic ordinari seguint les "Normes per a l'escriptura de funcions" que figuren en un plec de documentació independent.

- Es desaconsella treballar amb intervals de representació que continguin punts de discontinuïtat.

- Els millors exemples gràfics s'aconsegueixen generalment amb intervals de representació reduïts i amb la llavor en un dels seus extrems.

- El nombre d'iteracions necessari per a l'estabilització és aproximat, car depèn feblement de la llavor. En cada cas ve indicat per un nombre entre parèntesis, després del valor estable.

11.1.Funcions de convergència lenta

1. F(X)=LOG(20)/LOG(X)

Convergent alternant per a llavors compreses aproximadament entre 1.5 i 7.2
Valor estable 2.855311 (230)

2. F(X)=COS(X)

Convergent alternant per a qualsevol llavor
Valor estable 0.7390851 (40)

3. F(X)=COS(X)+SIN(X)

Convergent alternant per a qualsevol llavor

Valor estable 1.258728 (40)

4. F(X)=(1+COS(X))/2

Convergent alternant per a qualsevol llavor
Valor estable 0.8354296 (20)

5. F(X)=LOG(4-X)/LOG(2)

Convergent alternant per a llavors en (-12,4)
Valor estable 1.386167 (25)

6. F(X)=1/(1+X*X)

Convergent alternant per a qualsevol llavor
Valor estable 0.6823278 (35)

7. F(X)=1/(X+1)^2

Convergent alternant per a qualsevol llavor excepte -1
Valor estable 0.4655712 (40)

8. F(X)=1-SIN(X)

Convergent alternant per a qualsevol llavor
Valor estable 0.5109738 (100)

9. F(X)=2-LOG(X)

Convergent alternant per a llavors entre 0 i EXP(2)
Valor estable 1.557146 (40)

10. F(X)=SQR(LOG(X+1))

Convergent monòtona per a llavors positives
Valor estable 0.7468817 (20)
Malgrat tenir el punt fix X=0 les iteracions no hi convergeixen

11. F(X)=X^(3/4)+1

Convergent monòtona per a llavors positives
Valor estable 3.629658 (30)

12. F(X)=ATN(1.1*X)

Convergent monòtona per a qualsevol llavor

Valors estables (+/-)0.5175137 (75) segons el signe de la llavor
Malgrat tenir el punt fix X=0 les iteracions no hi convergeixen

11.2 Funcions de convergència ràpida

1. F(X)=1+0.5*ATN(X)

Convergent monòtona per a qualsevol llavor
Valor estable 1.489824 (10)

2. F(X)=1/(4+X*X)

Convergent alternant per a qualsevol llavor
Valor estable 0.2462662 (5)

3. F(X)=(COS(X)+SIN(X))/4

Convergent monòtona per a qualsevol llavor
Valor estable 0.3151825 (10)

4. F(X)=LOG(X+2)/LOG(10)

Convergent monòtona per a llavors superiors a -2
Valor estable 0.3751121 (10)

5. F(X)=SGN(X+2)*(ABS(X+2))^(1/3) o AR3(X+2)

Convergent monòtona per a qualsevol llavor
Valor estable 1.52138 (10)

6. F(X)=SGN(X)*(ABS(X))^(1/3)-1 o AR3(X)-1

Convergent monòtona per a qualsevol llavor
Valor estable -2.324718 (15)

7. F(X)=SGN(5-X)*(ABS(5-X))^(1/3) o AR3(5-X)

Convergent alternant per a qualsevol llavor
Valor estable 1.51598 (10)

8. F(X)=X^(1/4)+2

Convergent monòtona per a qualsevol llavor positiva
Valor estable 3.35321 (10)

9. F(X)=ATN(4-X)

Convergent alternant per a qualsevol llavor
Valor estable 1.22493 (10)

10. F(X)=-SQR(EXP(X)+2)

Convergent alternant per a llavors inferiors al valor màxim de X tal que EXP(X) és dins de la capacitat de l'ordinador
Valor estable -1.491644 (10)

11. F(X)=SQR(4-LOG(X))

Convergent alternant per a llavors entre 0 i EXP(4)
Valor estable 1.841097 (10)

12. F(X)=EXP(-X)/10

Convergent alternant per a llavors superiors a -M, si M és el màxim tal que EXP(M) és dins de la capacitat de l'ordinador
Valor estable 9.127652E-2 (10)

11.3 Funcions algebraiques senzilles

1. F(X)=SGN(13*X-12)*(ABS(13*X-12))^(1/3) o AR3(13*X-12)

Té 3 punts fixos 1,3,-4
Convergent monòtona vers -4 per a llavors inferiors a 1
Convergent monòtona vers 3 per a llavors superiors a 1
El punt fix 1 no s'assoleix per iteració
S'estabilitza en 20 iteracions

2. F(X)=SQR(3*X-1)

Té dos punts fixos que són (3+SQR(5))/2=2.618034 i (3-SQR(5))/2= 0.381966, que poden trobar-se com a solucions d'una equació de segon grau
Convergent monòtona vers 2.618034 per a llavors superiors a 0.381966 i surt del domini per a les altres llavors
S'estabilitza en 35 iteracions

3. F(X)=(2*X*X+3)/7

Té dos punts fixos 0.5 i 3, que poden trobar-se com a solucions d'una equació de segon grau
Convergent monòtona vers 0.5 per a llavors entre -3 i 3
Divergent per a les altres llavors diferents de -3 i 3
S'estabilitza en 20 iteracions

4. F(X)=SQR((7*X-3)/2)

Condueix a una equació equivalent a la de 3.3
Convergent monòtona vers 3 per a llavors superiors a 0.5
Per a llavors inferiors a 0.5 és fora del domini o en surt ràpidament
S'estabilitza en 35 iteracions

5. F(X)=4/(X-3)

Té dos punts fixos 4 i -1, que poden trobar-se com a solucions d'una equació de segon grau
Convergent alternant vers -1 per a qualsevol llavor diferent de 3 El punt fix 4 no s'assoleix per iteració
S'estabilitza en 15 iteracions

6. F(X)=(X*X-4)/3

Condueix a una equació equivalent a la de 3.5
Convergent alternant vers -1 per a llavors entre -4 i 4
Divergent per a les altres llavors
S'estabilitza en 40 iteracions

7. F(X)=SQR(3*X+4)

Condueix a una equació equivalent a les de 3.5 i 3.6
Convergent monòtona vers 4 per a llavors superiors a -4/3
Per a les altres llavors surt del domini. El punt fix -1 no s'assoleix per iteració
S'estabilitza en 15 iteracions

11.4 Famílies uniparamètriques

1.Família f(x)=a*x*(1-x)

Tots els seus elements tenen en comú el punt fix 0, i a més a més cadascun té el segon punt fix 1-1/A
Tots són divergents per a llavors exteriors a l'interval (0,1)
En cap cas la successió d'iteracions és convergent vers el punt fix 0; tots els casos de convergència ho són vers 1-1/A i de tipus alternant
El comportament segons els valors d'A presenta, entre d'altres, les següents particularitats:

- Per a A entre 2 i 3 hi ha convergència, progressivament més lenta a l'augmentar A : l'estabilització es produeix en 10 iteracions quan A=2, en més de 100 quan A=2.9 i en més de 10.000 quan A=3

- Per a A entre 3 i 3.4 existeixen dos punts d'acumulació, en els quals s'estabilitza la successió d'iteracions per a índexs entre 40 i 100,segons els casos

- Per a A entre 3.45 i 3.54 existeixen 4 punts d'acumulació; per a A=3.55 n'existeixen 8; per a A=3.57 n'existeixen 16; per a A=3.58 n'existeixen 32, etc.

2. Família F(X)=EXP(A*COS(X))

Els seus elements no són mai divergents, i el seu comportament és independent de la llavor triada.

- Per a A<= -0.1 hi ha convergència monòtona ràpida (en 10 iteracions o menys) vers valors estables entre 0 i 1, més grans quan més gran sigui A

- Per a A>0 i A<=0.8 hi ha convergència alternant progressivament lenta (en el cas A=0.8 arriba a 400 iteracions) vers valors estables de part entera 1, més grans quan més gran sigui A

- Per a A entre 0.9 i 1.4 hi ha dos punts d'acumulació; per a A=1.5 hi ha 4 punts d'acumulació, etc.

11.5.Alguns exemples divergents

És senzill imaginar exemples divergents (les funcions polinòmiques ho són totes) però la regulació de la seva velocitat de convergència és més delicada si és vol obtenir un gràfic acceptable.

1. F(X)=2*X+SIN(X)

Divergent monòtona per a tota llavor diferent de zero

2. F(X)=EXP(SQR(X))

Divergent monòtona per a tota llavor positiva

3. F(X)=1+X^(1.5)

Divergent monòtona per a tota llavor positiva

4. F(X)=2*X

Divergent monòtona per a tota llavor diferent de zero

5. F(X)=SIN(X)-X^2

Divergent monòtona per a llavors més grans que 1

6. F(X)=SIN(X)-2*X

Divergent alternada per a llavors diferents de zero

7. F(X)=X^2-EXP(X)

Divergent alternada per a totes les llavors.

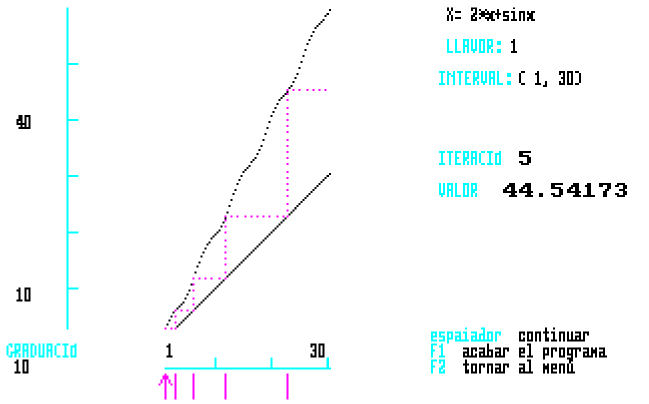

figura 1

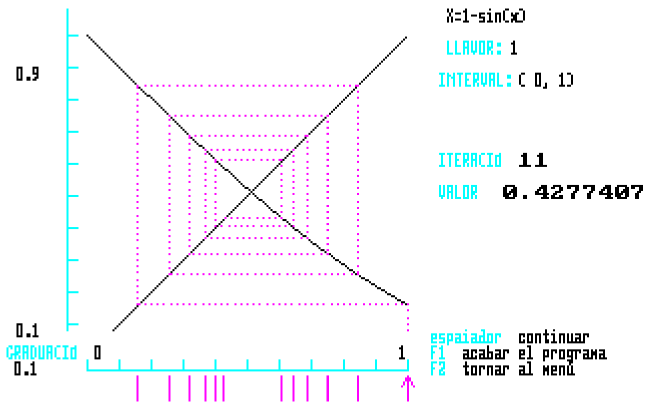

figura 2

12. ANEX: Normes d'introducció de funcions per teclat

Alguns dels programes del grup EIX (FUNCDER, ITER, PARAMETR, GRAFICAC i POLAR) i el programa DERIVA inclouen una subrutina específica d'avaluació de funcions entrades des de teclat. Aquesta subrutina permet entrar una funció com una cadena de caràcters (string) en un programa BASIC i calcular els seus valors numèrics per als valors de la variable que siguin del domini o poder rebre un missatge explicatiu per als que no siguin del domini.

A més, aquesta subrutina possibilita:

* La inclusió de funcions que el BASIC no contempla directament.

* L'entrada de funcions amb el llenguatge "usual" de les matemàtiques, és a dir, sobre tot, escriure-les evitant signes de producte i determinats parèntesis en arguments de funció, tal com ho fem en l'escriptura ordinària quan no hi ha confusió.

ELEMENTS PERMESOS EN L'ESCRIPTURA DE LA FUNCIÓ:

Podem usar en l'escriptura de la funció els següents elements:

* Parèntesis, oberts i tancats.
* Signes aritmètics: + - * / ^ amb els resultats usuals (suma, diferència, producte, quocient, potenciació) però amb les possibilitats d'omissió que s'expliquen més avall.

* La variable, escrita en majúscula o en minúscula (ja sigui X, A, T, segons ho indiqui el programa de què es tracti).

* Noms de funcions elementals amb els codis que s'expliquen seguidament. Podran anar descrites en majúscules o en minúscules.

Trigonomètriques: el sinus, escrit SIN
el cosinus, COS
la tangent, TAN o bé TG

Trigonomètriques inverses:
l'arc sinus, ASN o bé ARCSIN
l'arc tangent, ATN, ARCTG o bé ARCTAN

Hiperbòliques: sinus hiperbòlic, SINH
cosinus hiperbòlic, COSH
tangent hiperbòlica, TANH o bé TGH

Logaritme neperià: LN o bé LOG

Funció exponencial de base e: EXP o bé e^

Arrels: arrel quadrada,SQR
arrel d'índex n,ARn (n_N, n_2)
exemples: AR3, AR8, AR23, ...

Aritmètiques: part entera, INT
signe, SGN
valor absolut, ABS

L'argument de la funció no caldrà escriure'l entre parèntesis si no hi ha confusió, com s'explica més avall.

*	Números en notació decimal (però, la , i la ' són admeses com a punt decimal si hom ha controlat abans l'entrada de la cadena adequadament) o científica i, a més, e i PI s'admeten entrats així (en majúscules o minúscules) perquè representen les que segurament són les dues constants més importants de les matemàtiques.

Entre un element i un altre es poden posar espais en blanc que facilitin l'escriptura... però no en mig d'un nom de funció ni, naturalment, en mig d'un número.

NORMES PER L'ESCRIPTURA DE LES FUNCIONS:

L'avaluador permet entrar la funció en una forma molt semblant a com s'escriuria a la classe o l'escriuen els textos.

Tanmateix, hi ha una limitació que no podrem pas salvar: la cadena de caràcters representativa de la funció haurà de ser escrita "en un sol nivell". No valdran subíndexs o exponents ni fraccions amb una expressió damunt de la línia i una altra a sota. És per això que es recomana emprar els parèntesis per a explicitar clarament qualsevol expressió on hi hagi possibilitat de confusió amb el signe ^ de potència.

En relació amb l'entrada de funcions en BASIC o altres llenguatges de programació, aquestes són les diferències fonamentals:

#	Podem ometre el signe * quan no hi hagi confusió però procurarem escriure en els productes on un factor sigui numèric aquest al davant.

Exemples:
Podem escriure 3x enlloc de 3*x, però no x3 en lloc de x*3; podem entrar 5x^3+4x^2+7x per indicar allò que en BASIC seria 5*x^3+4*x^2+7*x o també 5xsin(x) per a indicar 5*x*sin(x) i, a més ...

#	Podem ometre els parèntesis per a l'argument de la funció quan no hi hagi confusió.

I, doncs, podrem escriure 5x sinx per a indicar 5*x*sin(x) i, combinant tot això, podrem escriure per exemple una expressió com és ara cos4x + 7x Ln3x per a indicar allò que en BASIC escriuríem com a cos(4*x)+7*x*LOG(3*x).

Tanmateix convé aclarir que una expressió com sin x ln x s'interpreta com sin (x)*log(x) i que si hom vol entrar la funció sin (x ln x) cal emprar els parèntesis per a indicar l'argument de la funció, exactament com es faria en l'escriptura ordinària.

Podem ometre els parèntesis per a un denominador o un exponent que siguin productes.

Exemples:

No ens caldrà escriure 4/(5*x) o bé 4/5/x per a indicar *(fòrmula 1)* sinó que podrem posar 4/5x.

També podem escriure 2^xsinx per indicar 2^(x*sin(x)). Cal observar que aquesta norma "xoca" amb la que indica que la ^ té precedència envers el producte. És per això que ja anteriorment s'ha recomanat l'ús dels parèntesis si hom veu confusió quan s'usa ^. En aquest sentit serà recomanable, per evitar confusions, escriure l'expressió que ara comentem com 2^(xsinx).

Aquesta recomanació ja serà d'ús obligat per escriure una exponencial "de tres pisos": caldrà que usem els parèntesis que indiquin prioritats.

Pel que fa a la relació entre el signe de potència i els arguments de les funcions convé dir que si no són permeses expressions tals com $\sin^2 x$, $\cos^2 4x$ (i tampoc sin^2(x) o coses semblants que hom pogués imaginar) per a indicar (sin x)^2 o bé (cos4x)^2.
Ara, el càlcul de les funcions té precedència respecte la potenciació i, doncs, si escrivim sinx^2, igual com passa en BASIC, es calcularà (sin x)^2. També podrem escriure cos 4x ^2 per tal que es calculi (cos 4x)^2.

Tanmateix, com es feia en el cas de potències i productes, és possible emprar sempre que es vulgui els parèntesis per evitar confusions.