Educación Media Formación General

4

Matemática

Programa de Estudio
Cuarto Año Medio

EDUCACION
Nuestra Riqueza
GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Matemática

Programa de Estudio
Cuarto Año Medio

EDUCACION
Nuestra Riqueza
GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Matemática
Programa de Estudio, Cuarto Año Medio, Formación General
Educación Media, Unidad de Curriculum y Evaluación
ISBN 956-7933-86-3
Registro de Propiedad Intelectual Nº 122.854
Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
Primera Edición 2001
Segunda Edición 2004

Santiago, noviembre de 2001.

Estimados profesores y profesoras:

El presente programa de estudio de Cuarto Año Medio de la Formación General ha sido elaborado por la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación y aprobado por el Consejo Superior de Educación, para ser puesto en práctica, por los establecimientos que elijan aplicarlo, en el año escolar 2002.

En sus objetivos, contenidos y actividades busca responder a un doble propósito: articular a lo largo del año una experiencia de aprendizaje acorde con las definiciones del marco curricular de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media, definido en el Decreto N°220, de mayo de 1998, y ofrecer la mejor herramienta de apoyo a la profesora o profesor que hará posible su puesta en práctica.

Los nuevos programas para Cuarto Año Medio de la Formación General plantean objetivos de aprendizaje de mayor nivel que los del pasado, porque la vida futura, tanto a nivel de las personas como del país, establece mayores requerimientos formativos. A la vez, ofrecen descripciones detalladas de los caminos pedagógicos para llegar a estas metas más altas. Así, al igual que en el caso de los programas del nivel precedente, los correspondientes al Cuarto Año Medio incluyen numerosas actividades y ejemplos de trabajo con alumnos y alumnas, consistentes en experiencias concretas, realizables e íntimamente ligadas al logro de los aprendizajes esperados. Su multiplicidad busca enriquecer y abrir posibilidades, no recargar ni rigidizar; en múltiples puntos requieren que la profesora o el profesor discierna y opte por lo que es más adecuado al contexto, momento y características de sus alumnos y alumnas.

Los nuevos programas son una invitación a los docentes de Cuarto Año Medio para ejecutar una nueva obra, que sin su concurso no es realizable. Estos programas demandan cambios importantes en las prácticas docentes. Ello constituye un desafío grande, de preparación y estudio, de fe en la vocación formadora, y de rigor en la gradual puesta en práctica de lo nuevo. Lo que importa en el momento inicial es la aceptación del desafío y la confianza en los resultados del trabajo hecho con cariño y profesionalismo.

MARIANA AYLWIN OYARZUN
Ministra de Educación

Presentación

El programa de estudio para Cuarto Año Medio se orienta hacia la culminación de los procesos de construcción y adquisición de habilidades intelectuales y conocimientos de matemática en el nivel escolar, junto con una mirada retrospectiva y ordenadora de lo estudiado en los años anteriores.

En la unidad de **Estadística y probabilidades**, la primera del año, se trata de analizar las ventajas y/o desventajas de las diferentes maneras de organizar e interpretar datos y reconocer la importancia de una muestra aleatoria simple como una forma de realizar inferencias sobre una población. Además se promueve el uso de calculadoras y planillas de cálculo para facilitar el manejo, la graficación, el análisis y la interpretación de la información.

La invitación es a mirar la información estadística presente en los medios de comunicación, analizarla utilizando algunos indicadores estadísticos y representaciones gráficas, con el propósito de apoyar a los estudiantes en el análisis crítico de dicha información.

Para continuar el proceso de construcción de modelos matemáticos de situaciones del mundo real, se incorpora durante este último año de la educación escolar el estudio de las **Funciones potencia, logarítmica y exponencial.** Estas funciones permiten medir y/o modelar situaciones cercanas a la experiencia de los estudiantes, como son lo relativo a intensidad del sonido, escala Richter para medir magnitud de los sismos, ingesta de alcohol y sus consecuencias, etc.

El estudio de estas funciones se hace considerando su representación gráfica, el tipo de crecimiento que modelan y el análisis de sus parámetros en los casos pertinentes.

La unidad **Geometría** presenta el modelo vectorial como un paradigma que enriquece el modelo euclidiano y analítico. Su desarrollo permite un análisis más profundo de propiedades de figuras planas en el espacio, incorpora el movimiento y la trayectoria, siendo un facilitador para la adquisición de los conceptos físicos como fuerza, desplazamiento, aceleración.

Organización del programa

Este programa se organiza en torno a tres unidades:

Unidad 1:	Estadística y probabilidades
Unidad 2:	Funciones potencia, exponencial y logarítmica
Unidad 3:	Geometría

Organización interna de cada unidad

Cada unidad, en forma similar a los programas anteriores para la Educación Media, se estructura considerando los siguientes puntos:

- Contenidos
- Aprendizajes esperados
- Orientaciones didácticas
- Actividades para el aprendizaje complementadas con ejemplos
- Actividades para la evaluación y ejemplos

A continuación se plantea una breve descripción de cada uno de estos elementos.

Contenidos

Los contenidos corresponden a los señalados en el marco curricular. Con el propósito de enfatizar y/o clarificar algunos de ellos se han desglosado en contenidos más específicos.

Es necesario dejar establecido que la palabra contenidos, en este enfoque curricular, incorpora lo conceptual y procedimental; el desarrollo de habilidades, disposiciones y actitudes.

Aprendizajes esperados

Expresan las capacidades y competencias que se busca que los alumnos y alumnas logren, considerando los contenidos de cada unidad y los objetivos fundamentales para el año escolar. Su número es variable por unidad.

Los aprendizajes esperados orientan el proceso pedagógico y dan una dirección al proceso de aprendizaje. En consecuencia son determinantes para definir los criterios de evaluación.

Orientaciones didácticas

En este punto se precisan los focos de la unidad; se incorporan comentarios pedagógicos relativos al aprendizaje del tema y sus relaciones intramatemáticas.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Las actividades explicitan acciones y procesos que importa e interesa que vivan los alumnos y las alumnas para el logro de los aprendizajes esperados. No existe una correspondencia biunívoca entre los aprendizajes esperados y las actividades; una actividad puede estar al servicio de varios aprendizajes esperados; además, la dinámica que se dé en el desarrollo de la clase puede favorecer más a unos que a otros.

Para la realización de cada actividad se sugieren ejemplos que pueden ser implementados tal cual se propone en el programa, adaptados a la realidad escolar o sustituidos por otros que se consideren más pertinentes. Al hacer estas adecuaciones locales hay que procurar el desarrollo de las habilidades de pensamiento que el programa promueve.

Para numerosas actividades, los ejemplos seleccionados se ordenan según nivel de dificultad; todos los ejemplos se complementan con comentarios pedagógicos específicos.

Actividades para la evaluación y ejemplos

La evaluación se considera parte del proceso de aprendizaje. Debe proveer al joven y al docente de la retroalimentación necesaria como referente para continuar, corregir y orientar las actividades futuras.

Es recomendable que se evalúen diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, y no sólo los resultados de los diversos ejercicios. Cobra relevancia en esta propuesta observar y evaluar el tipo de razonamiento utilizado, el método empleado, la originalidad de la o las ideas planteadas.

Al término de cada unidad se incluye un conjunto de preguntas, propuestas de trabajo y problemas, utilizables como parte de una evaluación de término de la unidad. La evaluación, en consonancia con el proceso de aprendizaje, aporta a un proceso de integración y relación entre los conceptos.

Los siguientes criterios orientan el proceso de evaluación:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas:
  reconocer la o las incógnitas e interpretar las preguntas; diseñar una estrategia o plan de trabajo con los datos; establecer relaciones matemáticas entre datos, variables, incógnitas; traducirlas, representar y/o expresar en un lenguaje y simbología comprensible y adecuada; seleccionar y aplicar procedimientos; explicitar la respuesta al problema y analizar su pertinencia.

- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático:
  conjeturar, relacionar, establecer conclusiones; organizar y encadenar argumentos matemáticos; demostrar propiedades; reconocer regularidades numéricas, algebraicas, geométricas.

- Organización y estructuración de conceptos matemáticos:
  reconocer la noción o el concepto involucrado; reconocer equivalentes y establecer relaciones con otras nociones o conceptos; generalizar, particularizar.

- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios:
  seleccionar y utilizar reglas, algoritmos, fórmulas y/o formas para realizar cálculos o transformar relaciones matemáticas en otras más sencillas o más convenientes de acuerdo al contexto.

Interesa además considerar que el aprendizaje de matemática contribuye al desarrollo de habilidades en el ámbito de la comunicación: analizar e interpretar cuadros, gráficos y fórmulas, traducir de un registro a otro, registrar, describir, explicar ideas, argumentos, relaciones o procedimientos.

Finalmente, no está ajeno al aprendizaje de matemática el desarrollo de actitudes y disposiciones para el estudio y el trabajo: abordar problemas y desafíos; analizar errores; escuchar otros argumentos, analizarlos; expresar criticas fundamentadas.

Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

Los Objetivos Fundamentales Transversales (OFT) definen finalidades generales de la educación referidas al desarrollo personal y la formación ética e intelectual de alumnos y alumnas. Su realización trasciende a un sector o subsector específico del currículum y tiene lugar en múltiples ámbitos o dimensiones de la experiencia educativa, que son responsabilidad del conjunto de la institución escolar, incluyendo, entre otros, el proyecto educativo y el tipo de disciplina que caracteriza a cada establecimiento, los estilos y tipos de prácticas docentes, las actividades ceremoniales y el ejemplo cotidiano de profesores y profesoras, administrativos y los propios estudiantes. Sin embargo, el ámbito privilegiado de realización de los OFT se encuentra en los contextos y actividades de aprendizaje que organiza cada sector y subsector, en función del logro de los aprendizajes esperados de cada una de sus unidades.

Desde la perspectiva señalada, cada sector o subsector de aprendizaje, en su propósito de contribuir a la formación para la vida, conjuga en un todo integrado e indisoluble el desarrollo intelectual con la formación ético-social de alumnos y alumnas. De esta forma se busca superar la separación que en ocasiones se establece entre la dimensión formativa y la instructiva. Los programas están construidos sobre la base de contenidos programáticos significativos que tienen una carga formativa muy importante, ya que en el proceso de adquisición de estos conocimientos y habilidades los estudiantes establecen jerarquías valóricas, formulan juicios morales, asumen posturas éticas y desarrollan compromisos sociales.

Los Objetivos Fundamentales Transversales definidos en el marco curricular nacional (Decreto Nº 220) corresponden a una explicitación ordenada de los propósitos formativos de la Educación Media en cuatro ámbitos: *Crecimiento y Autoafirmación Personal*, *Desarrollo del Pensamiento*, *Formación Ética*, *Persona y Entorno*; su realización, como se dijo, es responsabilidad de la institución escolar y la experiencia de aprendizaje y de vida que ésta ofrece en su conjunto a alumnos y alumnas. Desde la perspectiva de cada sector y subsector, esto significa que no hay límites respecto a qué OFT trabajar en el contexto específico de cada disciplina; las posibilidades formativas de todo contenido conceptual o actividad debieran considerarse abiertas a cualquier aspecto o dimensión de los OFT.

Junto a lo señalado, es necesario destacar que hay una relación de afinidad y consistencia en términos de objeto temático, preguntas o problemas, entre cada sector y subsector, por un lado, y determinados OFT, por otro. El presente programa de estudio ha sido definido incluyendo (‘verticalizando’), los objetivos transversales más afines con su objeto, los que han sido incorporados tanto a sus objetivos y contenidos, como a sus metodologías, actividades y sugerencias de evaluación. De este modo, los conceptos (o conocimientos), habilidades y actitudes que este programa se propone trabajar integran explícitamente gran parte de los OFT definidos en el marco curricular de la Educación Media.

- Los OFT de ámbito *Crecimiento y Autoafirmación Personal* referidos al interés y capa-

cidad de conocer la realidad y utilizar el conocimiento y la información.
- Los OFT del ámbito *Desarrollo del Pensamiento*, en especial los relativos a habilidades de investigación, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos; y las de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientados al aprendizaje de algoritmos o procedimientos rutinarios, así como a la aplicación de leyes y principios, por un lado, y de generalización a partir de relaciones observadas, por otro. El desarrollo del pensamiento probabilístico así como el análisis estadístico contribuye a tomar decisiones fundamentadas en situaciones sociales.
- Los OFT del ámbito *Persona y su Entorno* referidos al trabajo, y que plantean el desarrollo de actitudes de rigor y perseverancia, así como de flexibilidad, originalidad y asunción del riesgo, y las capacidades de recibir y aceptar consejos y críticas.
- A través de los problemas a resolver matemáticamente y el estudio de la estadística, que plantean las actividades del programa es posible ampliar el trabajo de los OFT con alumnos y alumnas a su capacidad de juicio, y la aplicación de criterios morales, a problemas del medio ambiente, económicos y sociales.

Junto a lo señalado, el programa, a través de las sugerencias al docente que explicita, invita a prácticas pedagógicas que realizan los valores y orientaciones éticas de los OFT, así como sus definiciones sobre habilidades intelectuales y comunicativas.

Además, el programa se hace cargo de los OFT de Informática incorporando en diversas actividades y tareas la búsqueda de información a travéencuentrans de redes de comunicación y el empleo de softwares.

Objetivos Fundamentales

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de rectas y planos en el espacio, de volúmenes generados por rotaciones o traslaciones de figuras planas; visualizar y representar objetos del espacio tridimensional.
2. Analizar informaciones de tipo estadístico presente en los medios de comunicación; percibir las dicotomías, determinista-aleatorio, finito-infinito, discreto-continuo.
3. Aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos al análisis de situaciones y a la resolución de problemas.
4. Reconocer y analizar las propias aproximaciones a la resolución de problemas matemáticos y perseverar en la sistematización y búsqueda de formas de resolución.
5. Percibir la matemática como una disciplina que ha evolucionado y que continúa desarrollándose, respondiendo a veces a la necesidad de resolver problemas prácticos, pero también planteándose problemas propios, a menudo por el sólo placer intelectual o estético.

Unidades, contenidos y distribución temporal

Cuadro sinóptico

Unidades		
1 Estadística y probabilidad	**2** Funciones potencia, logarítmica y exponencial	**3** Geometría
Contenidos		
• Graficación e interpretación de datos estadísticos provenientes de diversos contextos. Crítica del uso de ciertos descriptores utilizados en distintas informaciones. • Selección de diversas formas de organizar, presentar y sintetizar un conjunto de datos. Ventajas y desventajas. Comentario histórico sobre los orígenes de la estadística. • Uso de planilla de cálculo para análisis estadístico y para construcción de tablas y gráficos. • Muestra al azar, considerando situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, ecología, salud pública, control de calidad, juegos de azar, etc. Inferencias a partir de distintos tipos de muestra.	• Función potencia: $y = a\,x^n$, $a > 0$, para $n = 2, 3$, y 4, su gráfico. Análisis del gráfico de la función potencia y su comportamiento para distintos valores de a. • Funciones logarítmica y exponencial, sus gráficos correspondientes. Modelación de fenómenos naturales y/o sociales a través de esas funciones. Análisis de las expresiones algebraicas y gráficas de las funciones logarítmica y exponencial. Historia de los logaritmos; de las tablas a las calculadoras. • Análisis y comparación de tasas de crecimiento. Crecimiento aritmético, y geométrico. Plantear y resolver problemas sencillos que involucren el cálculo de interés compuesto. • Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.	• Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro. • Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Ángulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.
Distribución temporal		
Tiempo estimado: 30 a 35 horas	Tiempo estimado: 25 a 30 horas	Tiempo estimado: 25 a 30 horas

Unidad 1

Estadística y probabilidad

Contenidos

1. Graficación e interpretación de datos estadísticos provenientes de diversos contextos. Crítica del uso de ciertos descriptores utilizados en distintas informaciones.
2. Selección de diversas formas de organizar, presentar y sintetizar un conjunto de datos. Ventajas y desventajas. Comentario histórico sobre los orígenes de la estadística.
3. Uso de planilla de cálculo para análisis estadístico y para construcción de tablas y gráficos.
4. Muestra al azar, considerando situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, ecología, salud pública, control de calidad, juegos de azar, etc. Inferencias a partir de distintos tipos de muestra.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Conocen distintas maneras de organizar y presentar información incluyendo el cálculo de algunos indicadores estadísticos, la elaboración de tablas y gráficos utilizando planilla de cálculo o calculadora.
2. Reconocen la importancia de una muestra aleatoria simple para hacer inferencias sobre la población.
3. Conocen antecedentes históricos sobre la estadística y su relación con las probabilidades.
4. Comprenden y aprecian el papel de la estadística en la sociedad, conociendo algunos campos de aplicación.

Orientaciones didácticas

La estadística es una parte importante de la educación general deseable para los jóvenes y adultos; su conocimiento aporta a la interpretación de informaciones que con frecuencia aparecen en los medios de prensa. Es también una herramienta para la vida laboral, ya que en diversos tipos de trabajo se necesita conocimientos básicos del tema.

Además, su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva; la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso y exploración de programas computacionales específicos y trabajo cooperativo.

Las dimensiones políticas y éticas del uso y posible abuso de la información estadística contribuyen, asimismo, a la necesidad de su estudio.

Desde otro ángulo, la naturaleza interdisciplinaria del tema hace que los conceptos estadísticos aparezcan en otras materias, como ciencias sociales, biología, geografía, etc., de ahí la necesidad de establecer coordinaciones entre docentes de distintas áreas para desarrollar trabajos pedagógicos en conjunto.

En el desarrollo de esta unidad interesa pasar de lo descriptivo censal, tema que ocupa las dos primeras actividades, a nociones muy básicas sobre estadística inferencial. La idea central de la inferencia es obtener información sobre una población a partir del estudio de una muestra extraída de ella.

La comprensión de esta idea básica implica el equilibrio adecuado entre dos ideas aparentemente antagónicas: la representatividad muestral y la variabilidad muestral. La primera de estas ideas nos sugiere que la muestra tendrá a menudo características similares a las de la población, si ha sido elegida con las precauciones adecuadas. La segunda, el hecho de que no todas las muestras son iguales entre sí. El punto adecuado de equilibrio entre los extremos de información total e información nula respecto a la población depende principalmente de la variabilidad de la población, el tamaño de la muestra y el coeficiente de confianza.

En esta unidad se inicia el aprendizaje sobre estos temas, principalmente orientado a una noción de muestra, apoyado en las regularidades de la probabilidad.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Describen y comparan distribuciones de datos utilizando representaciones gráficas, calculando, comparando y relacionando indicadores de tendencia central y dispersión.

Ejemplo A

Recoger información en el curso, sobre los aspectos siguientes: edad, estatura, sexo, color de pelo, tipo de música preferida, estatura del padre, estatura de la madre.

I. Ordenar la información en tablas.

II. Distinguir variables cuantitativas y cualitativas; señalar para estas últimas los valores que puede tomar cada variable y especificar el rango para los valores de las variables cuantitativas.

III. Presentar la información utilizando el tipo de gráfico que se considere más adecuado, explicitando las ventajas de los tipos de gráficos seleccionados y las razones para desestimar otros.

IV. Calcular la media aritmética para las variables cuantitativas, analizar su significado y constatar si es o no necesario el cálculo de otros indicadores para dar una imagen aproximada de la distribución de los datos.

V. Utilizar porcentaje para cuantificar las variables cualitativas; graficar los resultados.

VI. Explorar las posibilidades de organización de los datos, cálculo de indicadores y elaboración de tablas y gráficos en una planilla de cálculo.

Indicaciones al docente

Es necesario que los estudiantes ordenen la información recogida ya sea manualmente o utilizando una planilla de cálculo; se sugiere complementar el ejemplo incorporando variables que sean de interés para los alumnos y alumnas, que permitan una descripción del curso o de otro grupo de jóvenes en relación con sus preferencias e intereses.

Es importante que los estudiantes perciban que las distintas formas de representación gráfica son una herramienta que favorece la visualización de comportamientos y relaciones de la variable; asimismo, que distingan entre las representaciones posibles para variables cualitativas y cuantitativas.

Se sugiere incentivar a los estudiantes que discutan sobre la relación entre los indicadores calculados y la distribución de los valores de la variable en estudio.

Ejemplo B

Las dos tablas que siguen resumen las notas obtenidas en una misma prueba de matemática, aplicada en dos cursos diferentes.

Curso A	
Notas	**Frecuencia**
7,0	3
6,7	5
6,3	4
6,0	8
4,0	8
3,4	2
3,0	4
	34 alumnos

Curso B	
Notas	**Frecuencia**
6,0	2
5,5	5
5,3	9
5,2	5
5,1	3
5,0	10
	34 alumnos

Calcular para ambos cursos el valor de la media aritmética y de la desviación estándar; graficar ambas distribuciones en un gráfico de barras. Comparar los gráficos y el valor de los indicadores calculados.

Indicaciones al docente

Para realizar estos cálculos los alumnos y alumnas pueden utilizar una calculadora científica en el modo estadística, o una planilla de cálculo.

Interesa que los estudiantes constaten que la media aritmética como indicador de tendencia central se complementa con la desviación estándar.

Además, la visualización de ambos gráficos aporta a la constatación de las diferencias entre ambas distribuciones, pese a que ambas tienen la misma media aritmética.

Se sugiere recurrir al gráfico de tallo y hoja para visualizar ambas distribuciones. El gráfico que sigue corresponde al curso A; las hojas están constituidas por la cifra decimal de las notas.

7	0 0 0
6	7 7 7 7 7 3 3 3 3 0 0 0 0
5	
4	0 0 0 0 0 0 0 0
3	4 4 0 0 0 0

Ejemplo C

Analizar el siguiente cuadro que resume la distribución del ingreso per cápita.

Evolución de la distribución del ingreso monetario según quintiles de ingreso 1987 - 1998

Quintil	1987	1990	1992	1994	1996	1998
I	4,3	4,4	4,6	4,3	4,1	4,1
II	7,9	8,2	8,5	8,2	8,2	8,2
III	11,7	12,3	12,2	12	11,9	11,8
IV	19	18,1	18,4	18,5	19,1	19,1
V	57,2	56,9	56,3	56,9	56,7	56,9
Total	100	100	100	100	100	100

Fuente: MIDEPLAN, Encuestas CASEN.

I. Investigar sobre el monto de los ingresos per cápita en los años que indica el cuadro y establecer los valores por año y quintil.

II. Establecer el significado de los quintiles y su aporte como complemento a la media aritmética que es el ingreso per cápita.

INDICACIONES AL DOCENTE

Siempre es interesante y conveniente que los estudiantes opinen y tomen posiciones respecto a lo que estos indicadores dicen y lo que pueden ocultar.

Importa que los estudiantes perciban la necesidad de complementar los indicadores de tendencia central con aquellos que reflejan la mayor o menor distribución de los datos.

Se sugiere coordinar acciones con los profesores o profesoras de Historia y Ciencias Sociales para eventualmente profundizar y/o ampliar sobre este tema.

Ejemplo D

Pedir a algunos alumnos o alumnas que registren sus pulsaciones, tomadas durante 1 minuto, cinco veces cada uno, antes y después de hacer un ejercicio físico. Buscar formas de organizar y presentar la información recogida de modo que sea posible comparar la información para un mismo alumno antes y después de los ejercicios y comparar también para todos los alumnos.

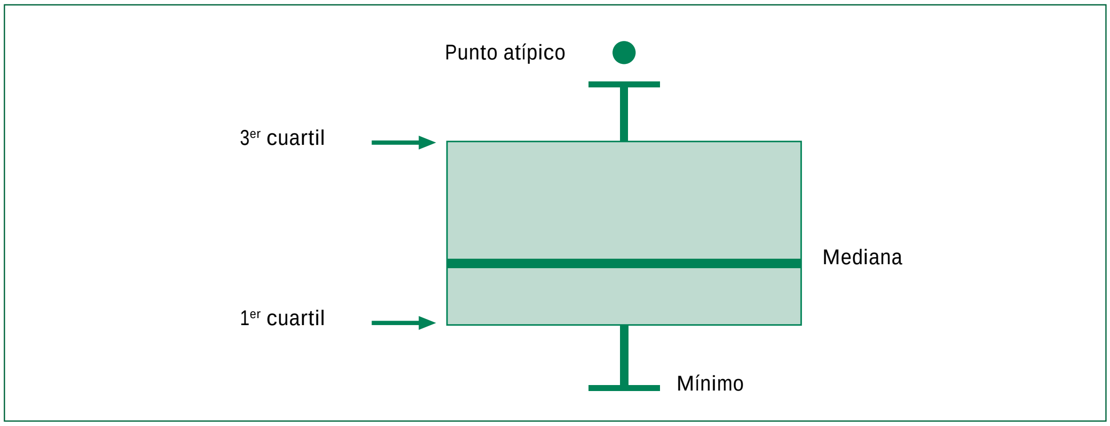
INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los estudiantes escojan las formas gráficas y/o los indicadores adecuados que les permitan hacer buenas comparaciones, teniendo en cuenta la variabilidad de la variable.

Un gráfico de caja permite visualizar los cambios en la distribución de la frecuencia de pulsaciones, antes y después de hacer el ejercicio.

El dibujo que sigue ilustra dicho tipo de gráfico. Por debajo de la mediana hay 50% de los datos, por debajo del primer cuartil hay 25% de los datos y bajo el tercer cuartil, un 75% de los datos.

Estos gráficos facilitan comparaciones entre dos o más grupos.



Ejemplo E

El análisis de las notas de un curso al término del primer y segundo trimestre señala que en ambos trimestres el promedio en matemática es 5.1, la nota máxima es 7 y la mínima es 3.2. Sin embargo, los alumnos tienen la sensación de mejores resultados en un trimestre que en otro. Determinar cuál es ese mejor trimestre y por qué se considera mejor.

Las notas en cada trimestre se presentan en los cuadros que siguen.

Primer trimestre									
7	7	6,9	6,8	6,5	6,3	5,8	5,7	5,6	5,6
5,6	5,4	5,4	5,2	5,2	5,2	4,8	4,8	4,8	4,5
4,3	4,3	4,3	4,1	4,1	4,1	4,1	3,2	3,2	3,2

Segundo trimestre									
7	6,4	6,1	6	5,7	5,5	5,4	5,3	5,3	5,3
5,3	5,2	5,2	5,2	5,1	5	5	5	5	5
5	4,9	4,7	4,7	4,7	4,6	4,5	4,5	3,2	3,2

Indicaciones al docente

Interesa que los estudiantes complementen el promedio con el concepto de dispersión de los datos. Un gráfico de barra es un buen instrumento para percibirla.

El diagrama de tallo y hoja es también una herramienta adecuada para visualizar la dispersión de los datos y la comparación entre las notas de ambos trimestres, como se puede apreciar en el diagrama siguiente.

																0	7	0	0									
														0	1	4	6	9	8	5	3							
0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	5	7	5	8	7	6	6	6	4	4	2	2	2	
										5	5	6	7	7	7	9	4	8	8	8	5	3	3	3	1	1	1	1
															2	2	3	2	2	2								

En este caso el tallo lo constituye la parte entera de las notas; las hojas son las cifras decimales de cada nota. Las hojas de la izquierda corresponden a un trimestre en tanto que las de la derecha son del otro trimestre, favoreciendo así la comparación entre ambos.

La comprensión de este gráfico con el tallo en común suele ofrecer dificultades para los estudiantes.

Es necesario que los alumnos y alumnas visualicen la dispersión de los datos como un complemento necesario para la interpretación del promedio. Además, es conveniente que hagan los cálculos del promedio y de la desviación estándar en una planilla de cálculos o utilizando una calculadora científica en la modalidad de cálculos estadísticos.

También es importante que los estudiantes hagan los gráficos de frecuencias de los datos en cuestión y desarrollen la capacidad de estimar el valor de la desviación estándar, mirando el gráfico. De este modo la percepción de la dispersión de los datos se puede confirmar con un resultado numérico.

Ejemplo F

En un grupo, los varones obtienen las siguientes notas en Educación Física:

5,6; 5,5; 4,8; 7; 6,4; 5,5; 4,5; 5,6; 5,4; 5,8; 6,0; 5,2

Las damas, a su vez, obtuvieron:

6,6; 6,5; 5,8; 4,8; 5,9; 7

Un niño dijo: nuestro promedio es 5,6; y una niña dijo nuestro promedio es 6,1.

Julio, que estaba escuchando, realizó los siguientes cálculos en su cuaderno:

$$\begin{array}{r} 5{,}6 \\ +\ 6{,}1 \\ \hline 11.7 \end{array} \qquad 11{,}7 : 2 = 5{,}85$$

y dijo: este grupo tiene promedio 5,9; ¿qué error cometió Julio? Fundamente su respuesta.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas constaten que el promedio de promedios no tiene sentido si se consideran universos de distinto tamaño. Se sugiere buscar formas para demostrar que el promedio de dos promedios es diferente al promedio de la totalidad de los datos salvo si ambos grupos de datos tienen el mismo tamaño.

Actividad 2

Analizan e interpretan información estadística actualizada y comunican las conclusiones de estos análisis.

Ejemplo A

Seleccionar algunas de las variables del cuadro de datos sobre 97 países, que se incorpora al final de esta unidad (pág. 41). Esta información está tomada de internet.

I. Analizar el significado de esas variables considerando la definición propuesta al inicio del cuadro.

II. Construir un diagrama de barras que represente el número de países en los diferentes grupos. A partir del mismo, construir una tabla de frecuencias y discutir el significado de las frecuencias absolutas, relativas y porcentajes.

INDICACIONES AL DOCENTE

El profesor o profesora podrá pedir a los alumnos y alumnas que busquen artículos en la prensa en que se hable de alguno de estos indicadores, expliquen con sus propias palabras la utilidad que pueden tener y averigüen la fuente responsable de esa información.

En este cuadro se ha usado un código para agrupar los países en función de la zona geográfica y desarrollo económico. Los estudiantes podrían sugerir otras variables de clasificación de los países o añadir otras variables o países.

Los alumnos y alumnas pueden analizar las ventajas que el diagrama de barras tiene frente a la tabla para visualizar el grupo que tiene mayor o menor número de países. Asimismo pueden elaborar otros gráficos adecuados para representar algunas de las variables elegidas.

Ejemplo B

Elaborar un gráfico y calcular la media aritmética y la mediana de la variable población para cada grupo de países del cuadro que se incluye al final de la unidad.

INDICACIONES AL DOCENTE

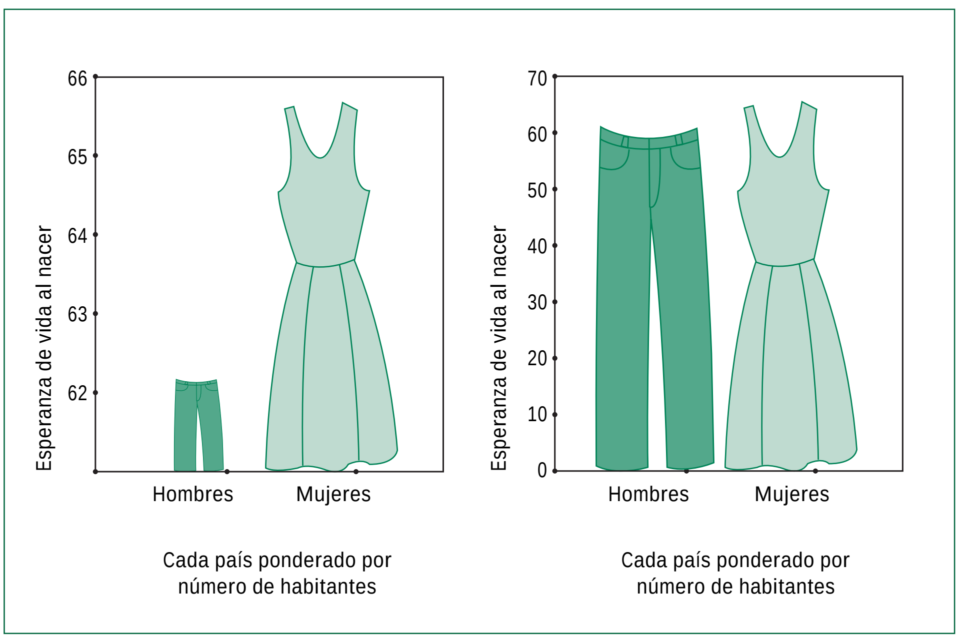
La clase puede dividirse en equipos de trabajo para calcular estos promedios y para explicar lo que representa cada uno. Se puede pedir a los alumnos y alumnas que señalen las principales diferencias entre los gráficos y que decidan cuál de los promedios acentúa más las diferencias, explicando la razón.

Ejemplo C

En los gráficos siguientes se representa la esperanza media de vida en hombres y mujeres, para los 97 países.

Comparar estos dos gráficos e indicar cuál les parece más adecuado para representar la diferencia entre la esperanza media de vida de mujeres y hombres.

Esperanza de vida media en hombres y mujeres



INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario observar que el cálculo de los años de esperanza media de vida al nacer, para los 97 países, es un promedio ponderado.

Además interesa hacer notar la distorsión en la interpretación que se puede inducir por la manipulación interesada en la escala de los gráficos.

Ejemplo D

El gráfico que sigue corresponde a las tasas de natalidad de los 97 países; el tallo está definido por la cifra de las decenas del indicador y las hojas por la cifra de las unidades, sin hacer aproximación.

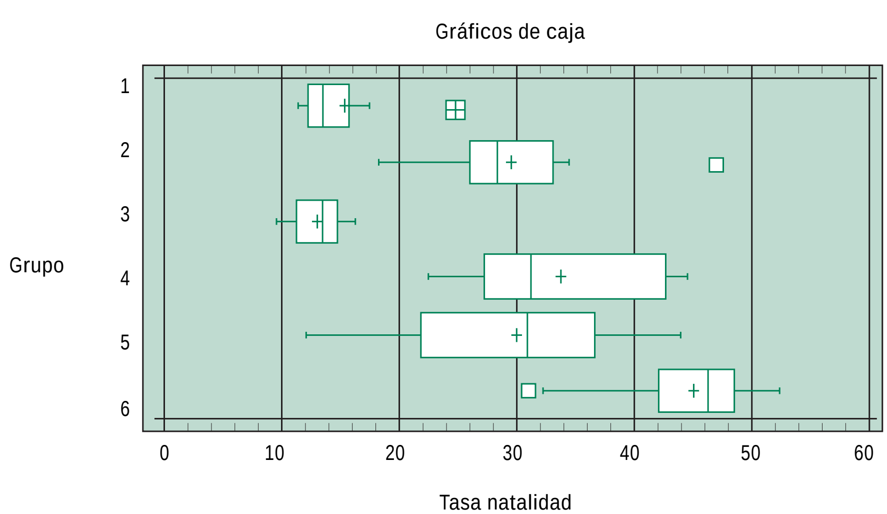
0	9 9
1	0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4
1	5 5 6 7 7 8 0 1 1 2 2 2 3 3 4
2	6 7 7 8 8 8 8 9 9
3	0 0 1 1 1 1 2 2 2 3 4
3	5 5 6 8 8 9 9
4	0 1 1 1 2 2 2 2 4 4 4 4
4	5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 8 8 8
5	0 0 1 2

Construir un gráfico similar al anterior, para cada grupo de países y caracterizar cada grupo de acuerdo a este indicador.

Indicaciones al docente

A partir de las gráficas realizadas por los estudiantes, se puede investigar qué países tienen una tasa de natalidad atípica respecto a su grupo.

Esta información se puede complementar con el gráfico siguiente:



Ejemplo E

Según estudios realizados por la FAO, la disponibilidad de agua por persona ha descendido bruscamente en un lapso de aproximadamente 50 años.

La siguiente tabla señala la disponibilidad de agua en miles de metros cúbicos:

		1950	2000
1	ÁFRICA	17,8	4,8
2	ASIA	7,6	2,9
3	EUROPA	5,9	4,5
4	AMÉRICA NORTE	32,4	17,6
5	AMÉRICA LATINA	72,1	22,8
6	EX URSS	24,1	14,8
7	OCEANÍA	159,5	65,6

Fuente: FAO.

I. Hacer el gráfico de barras que permite comparar la disponibilidad de agua en ambos años.
II. Calcular el porcentaje de descenso para cada región.
III. ¿Qué explicación le daría Ud. a estos descensos en la cantidad de agua per cápita?
IV. ¿Por qué cree Ud. que en algunos continentes o regiones este descenso es mayor que en otras?
V. ¿Qué cree Ud. que sucederá en los próximos 50 años con respecto al agua disponible per cápita en el mundo? (seguirá disminuyendo, se mantendrá o subirá).
VI. Conversar sobre la siguiente aseveración: “Las futuras guerras serán por el control de las fuentes de agua”.

Indicaciones al docente

El desarrollo de esta actividad es una invitación a interpretar la información y reflexionar sobre las reservas de agua dulce.

Este ejemplo se puede complementar considerando la siguiente información.

Agua dulce usada diariamente por persona en labores domésticas:

Se considera agua de uso doméstico aquella que es utilizada diariamente por las personas en higiene, preparación de alimentos, riego de jardines, etc.).

Senegal ________________ 30 litros
Chile ________________ 300 litros
EEUU ________________ 700 litros

Estos valores son promedios nacionales lo que significa que pueden existir marcadas diferencias al interior de cada país.

Por ejemplo en algunos sectores de Santiago, el consumo doméstico diario por persona es:

Clientes empresa Lo Castillo	La Dehesa	600 litros
	Los Dominicos	1800 litros
	Lo Curro	3000 litros

Fuente: El Mercurio, 24 de noviembre 1996.

Ejemplo F

Según EMOS (Empresa Metropolitana de Obras Sanitarias), el consumo promedio de agua, en m^3, en una familia de 5 integrantes es:

Uso	**invierno**	**verano**
Duchas	250	350
Aseo en lavatorios	50	60
Descargas WC	300	300
Comidas y lavado vajilla	80	90
Lavado general	150	185
Riego	5	165
Total diario	835	1.150
Total mensual	25.050	34.500

Fuente: Emos.

Interpretar esta información y responder las preguntas siguientes:

I. ¿Qué indican y qué ocultan estos valores promedios?

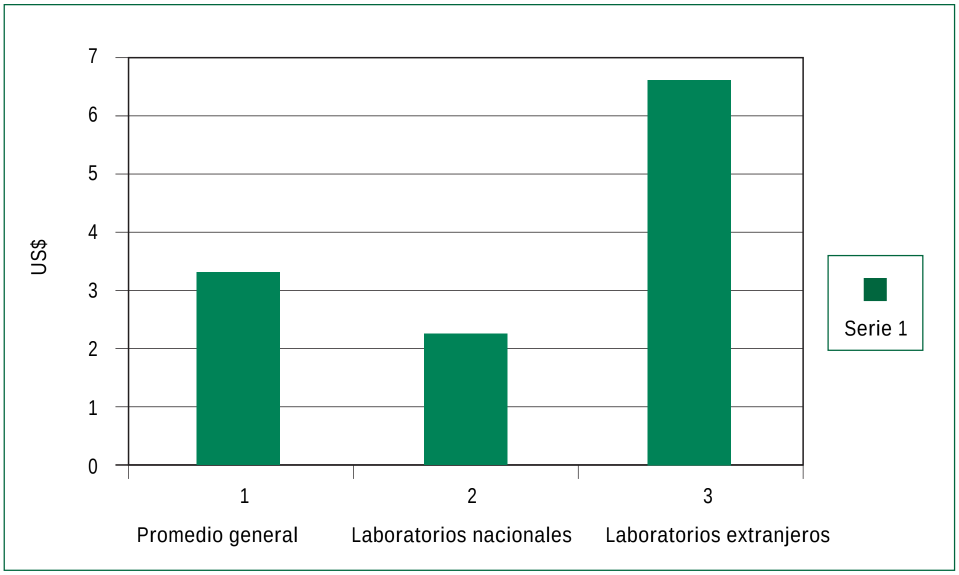
II. ¿Que significaría dividir por 5 cada uno de los valores de la tabla dada?

III. Analizar el tema de la escasez de agua y su mal uso.

IV. Investigar en la propia realidad familiar y encontrar indicadores que permitan compararlos con los datos anteriores.

Ejemplo G

El gráfico y la tabla que se presentan a continuación corresponden al precio promedio de remedios en Chile según su origen de elaboración.



Fuente: Asociación Industrial de Laboratorios Farmacéuticos de Chile. (4º trimestre de 1999).

Laboratorios	**Promedio US$**
Nacionales	2,30
Extranjeros	6,54
Promedio general	3,30

I. Interpretar el significado de "precio promedio" de los remedios en Chile.

II. Explicar por qué el promedio general de los remedios no corresponde a la semi-suma de 2,30 y 6,54.

Indicaciones al docente

Aquí se trata de una situación de cálculo del promedio ponderado que se explica por la información siguiente: las ventas totales de esta industria durante el año 2000 en farmacias fueron de 165 millones de unidades valorizadas en US$ 552 millones. Sobre esa cifra la industria nacional tiene una participación del 77% en unidades vendidas, pero en valores ello representa sólo el 54% del mercado, por lo tanto, el 46% restante corresponde a los laboratorios extranjeros que venden menos cantidad de medicamentos pero a un mayor precio.

Actividad 3

Experimentan con muestras aleatorias simples tomadas de una población conocida; plantean conclusiones que derivan de la comparación entre la media aritmética y la desviación estándar de la población con la de todas las muestras de un mismo tamaño.

Ejemplo A

I. Para estimar el número de peces que hay en un lago, se realizó lo siguiente:

a) se capturó una muestra al azar de peces, se les marcó y fueron devueltos al agua.

b) un breve tiempo después, se capturó una nueva muestra, se registró la proporción de peces marcados versus el total de peces de la muestra.

Si las muestras fueron efectivamente aleatorias, entonces se espera que la frecuencia relativa de peces marcados en la segunda muestra sea aproximadamente la misma que la de peces marcados en la población.

Suponer que en el primer proceso se capturan y marcan 120 peces. Posteriormente se capturan 100 peces de los cuales 22 están marcados. Estimar el número de peces del lago.

II. Aplicar el procedimiento anterior para estimar el número de bolitas que hay en una bolsa.

Indicaciones al docente

En esta experiencia se puede proponer que los alumnos y alumnas trabajen con un determinado número de bolitas de dos colores en una bolsa de la que extraigan al azar muestras de igual tamaño; interesa observar algunas regularidades asociadas a las muestras que se sacan aleatoriamente y son de un mismo tamaño.

Recoger información sobre estudios relativos a estimación de poblaciones de animales y especies en extinción.

En el sitio www.ideamas.uchile.cl se incluye un programa de simulación para el estudio de distribuciones de muestras de un mismo tamaño en la que intervienen dos atributos en una proporción conocida.

Ejemplo B

Ocho amigos conversan sobre el número de hermanos que tiene cada uno. Llegan a la información que se resume en la tabla siguiente:

N° de hermanos	**Frecuencia**
1	2
2	2
3	2
4	2
Total	8

I. Calcular el promedio de hermanos del grupo.

II. Para experimentar en relación con las muestras, formar todos los dúos de amigos y para cada dúo calcular el promedio de hermanos.

III. Hacer el gráfico de la distribución del promedio de hermanos de todas las muestras, calcular la desviación estándar de esta distribución y compararla con el promedio y la distribución estándar del número de hermanos del grupo de amigos.

IV. Formar todos los tríos de amigos y proceder a hacer los mismos cálculos.

V. Comparar con los resultados obtenidos en relación con los promedios calculados.

VI. Constatar la relación $s = \sigma/\sqrt{n}$ en que *s* es la desviación estándar de la distribución de todas las muestras, σ es la de la población y *n* es el número de elementos de la muestra.

Indicaciones al docente

En este caso la población son los 8 amigos, la variable aleatoria es 'número de hermanos' y las muestras son de dos y de tres elementos en cada caso.

La realización de ejemplos de este tipo pone en evidencia las relaciones entre la media de la distribución de todas las muestras y la media de la población y las correspondientes desviaciones estándar.

Es una manera de aproximar a los estudiantes a las muestras y su relación con las probabilidades. Para el desarrollo de ejemplos de este tipo, es necesario que los estudiantes recurran al uso de una planilla de cálculo o bien a una calculadora científica en el modo estadística. Para facilitar la manipulación de las muestras, necesariamente la población es pequeña.

En el sitio www.ideamas.uchile.cl se incluye un programa de simulación para el estudio de la distribución de la media aritmética en un conjunto de muestras de igual tamaño.

Ejemplo C

Se dispone de una bolsa con 100 fichas numeradas distribuidas como indica la tabla:

Nº en la ficha	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Se pide:

I. Obtener muestras al azar de tamaño 10 y calcular para cada una de ellas la media de los valores de las fichas como también su desviación estándar.

II. Obtener muestras al azar de tamaño 20 y calcular para cada una de ellas la media de los valores de las fichas como también su desviación estándar.

III. Obtener muestras al azar de tamaño 30 y calcular para cada una de ellas la media de los valores de las fichas como también su desviación estándar.

IV. Comparar los valores de las medias y desviaciones estándar obtenidos en los experimentos anteriores.

V. Realizar inferencias sobre el valor de la media poblacional a partir de algunas de las muestras anteriores.

INDICACIONES AL DOCENTE

En este caso la variable aleatoria es el valor de las fichas. Este experimento se puede realizar en forma práctica, o bien simulada, utilizando la tecla RAN de una calculadora científica.

Es interesante que los alumnos y alumnas reflexionen sobre la variabilidad que presentan las medias obtenidas en las muestras y cuán lejano o cercano está su valor de 5,5 que es el promedio del valor de las fichas de la población.

Además que constaten que la desviación estándar de los valores obtenidos con las muestras de tamaño 30 es muy semejante a la desviación estándar de la población, que en este caso también es fácil de calcular.

A manera de ilustración se presentan los resultados obtenidos para una muestra elegida al azar, de tamaño 30.

Valor de la ficha	Frecuencia
1	4
2	1
3	3
4	1
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	1

el promedio es x = 5,63

la desviación estándar de esta muestra es s = 2,70

A partir de esta muestra se puede estimar un intervalo de valores en el cual la media de la población estará ubicada con un alto grado de confianza; no se puede señalar el valor exacto de la media de la población.

Utilizando fórmulas sencillas, se puede calcular dicho intervalo que viene dado por:

$$5{,}63 \pm 1{,}7 \bullet \frac{2{,}7}{\sqrt{30}} = 5{,}63 \pm 0{,}83$$

en que:
5,63 es el promedio de la muestra
1,7 es el coeficiente k asociado al nivel de confianza deseado
2,7 es la desviación estándar de la muestra
$\sqrt{30}$ es la raíz cuadrada del tamaño de la muestra.
El coeficiente k se obtiene de la siguiente tabla:

Nivel de confianza	68%	90%	95%	99%	99,7%
Coeficiente k	1	1,7	2	2,6	3

Lo que finalmente se puede afirmar es que la media de la población se encontrará en el intervalo [4,80 ; 6,46] con un nivel de confianza de un 90%.

$$4{,}8 < \text{media población} < 6{,}46$$

Actividad 4

Estudian la representatividad de muestras en relación con una población. Interpretan los márgenes de error y los grados de confianza señalados en las investigaciones y encuestas de opinión.

Ejemplo A

En su columna dominical un periodista plantea la siguiente pregunta a sus lectores: ¿donaría usted sus órganos?

De las casi 5000 cartas recibidas, aproximadamente el 70% dijo que no. Sin embargo, una investigación del Instituto de Estadísticas señala que de 1573 personas encuestadas, un 87% dijo que sí donaría sus órganos.

¿Qué explicaciones da usted a esta diferencia?

INDICACIONES AL DOCENTE

El tema central que se propone con este ejemplo es la representatividad de las muestras; se puede pedir a los alumnos y alumnas que inventen muestras que no son representativas de una población pero que a la vez sean un poco engañosas. También se puede hacer referencias a las muestras de sangre, orina, de tejidos u otros en los laboratorios clínicos; probar las comidas u otras acciones diarias que están referidas a muestras.

Ejemplo B

En una encuesta se pregunta, ¿debiera haber una legislación que prohíba el trabajo infantil?

Las respuestas fueron: 43% a favor; 48% en contra; 9% indecisos.

En una segunda encuesta se reformuló esta pregunta: ¿debiera haber una legislación que proteja el derecho a la educación y recreación de los niños?

Las respuestas fueron: 62% a favor; 27% en contra; 11% indecisos.

I. Analizar las diferencias de las preguntas y su posible incidencia en los porcentajes de respuesta.

II. Redactar dos o más formas de hacer una pregunta orientada a la búsqueda de la misma información, con las que suponen obtendrían distintos resultados en una encuesta.

III. Experimentar con las preguntas que se consideren más adecuadas.

Indicaciones al docente

Es necesario que los jóvenes analicen las formas de preguntar y su incidencia en los resultados de las encuestas y además que se interesen por conocer las preguntas que se incluyen en las encuestas cuyos resultados se publican frecuentemente en los medios de comunicación.

Ejemplo C

El candidato A que postula a la presidencia afirma: ya tengo ganada esta elección de acuerdo a la encuesta publicada hoy en los diarios.

B, el otro candidato dice: de acuerdo a los resultados de la encuesta publicada hoy en los diarios, hay claramente un empate.

En los diarios se informa que una encuesta con un 2% de margen de error y alto nivel de confianza indica que para el candidato A hay un 38,7% de intención de voto y para el candidato B, esta intención de voto llega a un 35,3%.

I. Según la encuesta, ¿cuál de los dos candidatos ganaría la elección?

II. ¿Cuál es el significado de 2% de error en los resultados?

Indicaciones al docente

Es necesario analizar las informaciones numéricas y contrastarlas con los márgenes de error e intervalos de confianza de la investigación.

En el desarrollo de esta unidad no se calculan ni se establecen sus definiciones sino que se espera que los estudiantes las puedan interpretar; principalmente, el margen de error en un contexto de intervalo de confianza alto. El estudio de estos conceptos desde la estadística inferencial supera los propósitos de esta unidad.

Actividad 5

Realizan un proyecto de investigación relativo a la historia de la estadística, o bien, a sus aplicaciones en investigaciones y estudios específicos.

Ejemplo A

Realizar un proyecto en el que optan por:

I. Investigar sobre el inicio de la estadística moderna asociada al estudio de las probabilidades y a técnicas de muestreo.

II. Recoger antecedentes y entrevistar a personas que trabajen en investigaciones estadísticas.

III. Diseñar y llevar a la práctica una investigación sobre algún tema de interés juvenil, restringido a su comuna, localidad, comunidad escolar u otro ámbito.

Indicaciones al docente

Si los intereses de los alumnos lo permiten se puede dar una diversidad que tome los tres tipos de investigación.

Importa que una vez que ésta concluya se dé cuenta al curso de los resultados obtenidos y de la metodología de trabajo utilizada.

El desarrollo de estos proyectos se puede iniciar después de algunas horas de clases sobre el tema.

En el caso de la historia de la estadística es interesante establecer comparaciones entre la descriptiva censal y la estadística inferencial.

Actividades para la evaluación y ejemplos

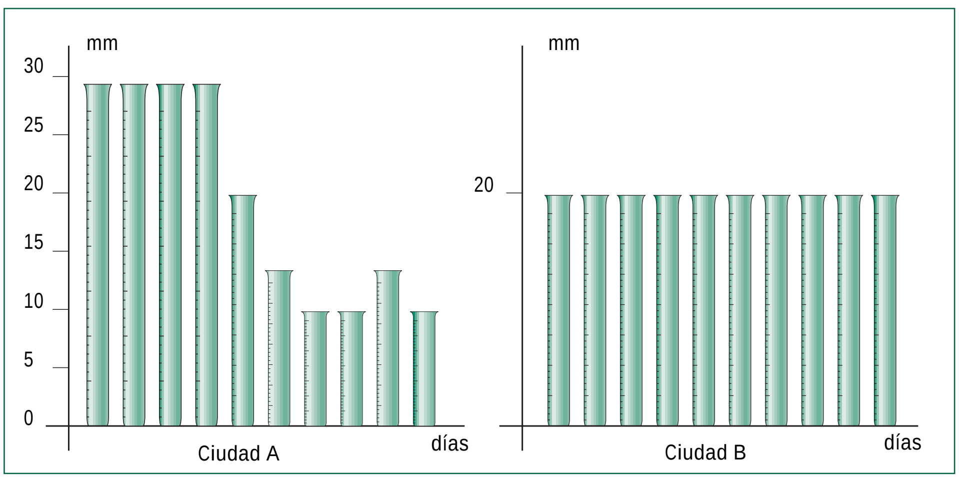
Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Actividad 1

Analizan distribuciones de datos a partir de gráficos, indicadores de tendencia central y de dispersión.

Ejemplo A

Considerar los siguientes gráficos de barra, que representan los mm de agua caída en dos ciudades diferentes, durante los primeros días de un mes.



I. A partir de los gráficos, ¿qué se puede afirmar en relación con la cantidad de agua caída en esos días en las dos ciudades?

II. ¿Cuál es la media aritmética de mm de agua caída en cada ciudad?

Observar qué cálculos realizan y cómo éstos reflejan la interpretación de ambos gráficos.

Ejemplo B

En una reunión de alumnos se escucha el siguiente diálogo:

Juan: Mi curso obtuvo promedio 5 en lenguaje.

Andrea: El mío obtuvo promedio 5,1, por lo tanto es un curso mejor.

Mateo: Momento, ¿me pueden dar la desviación estándar de las notas de cada curso?

Juan: Al calcularla resulta 0,2.

Andrea: A mí me dio 0,6.

De acuerdo a estos datos, ¿cuál es su opinión respecto a ambos cursos?

Observar si relacionan los indicadores (media aritmética y dispersión) para fundamentar la opinión.

Ejemplo C

Según el Informe sobre Desarrollo Mundial (1994) las áreas naturales protegidas a nivel mundial representan, en promedio, el 5,4% de la superficie de los países.

Chile, en cambio, cuenta con un 18,3% de su superficie total protegida.

(http://www.infor.cl/webinfor/producyserv/inforestad/estadisticas.htm)

País	**Superficie protegida (% de superficie del país)**
Brasil	3,3
Uruguay	0,2
México	5,1
Argentina	3,4
Puerto Rico	4,0
Nueva Zelanda	10,7
España	6,9
Canadá	5,0
Irlanda	0,6
Francia	9,8
EEUU	10,5
Australia	10,6
Singapur	2,6
Finlandia	2,5
Noruega	5,0
Suecia	6,6
Promedio	5,4
Chile	18,3

De acuerdo a estos datos, responder las siguientes preguntas:

- ¿Está el dato de Chile incluido en el cálculo del promedio? Fundamentar la respuesta.
- ¿Cómo interpreta el valor 5,4%?
- Observando los valores de la tabla anterior, ¿le parecen a Ud. muy dispersos? Explicar.
- Representar gráficamente los datos de la tabla.

Observar qué cálculos realizan, si hacen referencia al referente del % y cómo explican el que corresponde al promedio; si tienen nociones sobre la dispersión; si muestran competencia para hacer el gráfico.

Actividad 2

Establecen diferencias entre estadística descriptiva e inferencial.

Ejemplo A

Clasificar los estudios siguientes en estadística descriptiva o inferencia estadística:

a) Pedro predice que el candidato Belaire va a ganar la elección presidencial con un 53% de los votos a partir de los resultados de 45 comunas.
b) El ecologista Dr. Valverde dice que la carne de los peces del lago Rapel contiene un promedio de 400 unidades de mercurio.
c) En el Colegio Fuente Nueva, el promedio de la PAA Verbal fue de 550.
d) Se prevé 25 accidentes de tránsito el próximo fin de semana largo.
e) El año pasado 72% de los trabajadores de la fábrica de zapatos Tacones perdieron, al menos, un día de trabajo.

Ejemplo B

Indicar por qué las muestras que se proponen a continuación no son adecuadas:

a) Para tener una información sobre si una obra de teatro fue o no del agrado del público se encuestó a diez personas familiares de los actores.
b) Para tener información sobre las preferencias de los electores para la próxima elección presidencial se hizo una encuesta a 50 personas que trabajan en la minería del cobre.
c) Para tener información sobre la lectura de una revista entre los jóvenes se encuestó a 30 estudiantes de la carrera de diseño de una universidad.

Observar si hacen referencia a la representatividad de las muestras en relación con la población que debiera considerarse.

Actividad 3

Interpretan los márgenes de error y los grados de confianza señalados en las investigaciones y encuestas de opinión.

Ejemplo A

Considerar encuestas que se publican en la prensa, constatar si indican o no los márgenes de error y el nivel de confianza.

De acuerdo a esa información opinar sobre los resultados.

Ejemplo B

Conocer investigaciones hechas por instituciones responsables y analizar los resultados considerando los índices de error y los grados de confianza.

Informaciones estadísticas sobre 97 países
(http://www.amstat.org/publications/jse/).

Esta información se basa en un documento preparado por Rouncenfield (1995), quien usó como fuentes Day (1992) y UNESCO (1990). Está tomada de internet, del servidor de Journal of Statistical Education.
Contiene las siguientes variables, que se refieren a 1990:

I. Tasa de natalidad: Niños nacidos vivos en el año por cada 1000 habitantes;
II. Tasa de mortalidad: Número de muertes en el año por cada 1000 habitantes;
III. Mortalidad infantil: Número de muertes en el año por cada 1000 niños de menos de 1 año;
IV. Esperanza de vida al nacer para hombres y mujeres;
IV. PNB. Producto Nacional Bruto per cápita en dólares (USA);
VI. Grupo: Clasificación de países en función de la zona geográfica y situación económica, en las siguientes categorías:
    1. = Europa Oriental
    2. = Iberoamérica
    3. = Europa Occidental, Norte América, Japón, Australia, Nueva Zelanda
    4. = Oriente Medio
    5. = Asia
    6. = Africa.
VII. Población: número de habitantes en 1990 en miles de personas, tomado del anuario publicado por el periódico español "El País".

Tabla 1: Fichero de datos del proyecto "Análisis demográfico"

País	Grupo	Tasa natalidad	Tasa mortalidad	Mortalidad infantil	Esperanza vida hombre	Esperanza vida mujer	PNB	Población (miles)
Afganistán	5	40.4	18.7	181.6	41.0	42.0	168	16000
Albania	1	24.7	5.7	30.8	69.6	75.5	600	3204
Alemania (Oeste)	3	11.4	11.2	7.4	71.8	78.4	22320	16691
Alemania Este	1	12.0	12.4	7.6	69.8	75.9	.	61337
Algeria	6	35.5	8.3	74.0	61.6	63.3	2060	24453
Angola	6	47.2	20.2	137.0	42.9	46.1	610	9694
Arabia Saudí	4	42.1	7.6	71.0	61.7	65.2	7050	13562
Argentina	2	20.7	8.4	25.7	65.5	72.7	2370	31883
Austria	3	14.9	7.4	8.0	73.3	79.6	17000	7598
Bahrein	4	28.4	3.8	16.0	66.8	69.4	6340	459
Bangladesh	5	42.2	15.5	119.0	56.9	56.0	210	111590
Bélgica	3	12.0	10.6	7.9	70.0	76.8	15540	9886
Bielorusia	1	15.2	9.	13.1	66.4	75.9	1880	.
Bolivia	2	46.6	18.0	111.0	51.0	55.4	630	7110
Botswana	6	48.5	11.6	67.0	52.3	59.7	2040	1217

País	Grupo	Tasa natalidad	Tasa mortalidad	Mortalidad infantil	Esperanza vida hombre	Esperanza vida mujer	PNB	Población (miles)
Brasil	2	28.6	7.9	63.0	62.3	67.6	2680	147294
Bulgaria	1	12.5	11.9	14.4	68.3	74.7	2250	9001
Camboya	5	41.4	16.6	130.0	47.0	49.9	.	8250
Canadá	3	14.5	7.3	7.2	73.0	79.8	20470	26302
Colombia	2	27.4	6.1	40.0	63.4	69.2	1260	32335
Congo	6	46.1	14.6	73.0	50.1	55.3	1010	2208
Corea (Norte)	5	23.5	18.1	25.0	66.2	72.7	400	21143
Checoslovaq	1	13.4	11.7	11.3	71.8	77.7	2980	15641
Chile	2	23.4	5.8	17.1	68.1	75.1	1940	12980
China	5	21.2	6.7	32.0	68.0	70.9	380	1105067
Dinamarca	3	12.4	11.9	7.5	71.8	77.7	22080	5132
Ecuador	2	32.9	7.4	63.0	63.4	67.6	980	10329
Egipto	6	38.8	9.5	49.4	57.8	60.3	600	51390
Emiratos Arabes	4	22.8	3.8	26.0	68.6	72.9	19860	1544
España	3	10.7	8.2	8.1	72.5	78.6	11020	39161
Etiopía	6	48.6	20.7	137.0	42.4	45.6	120	48861
Filipinas	5	33.2	7.7	45.0	62.5	66.1	730	61224
Finlandia	3	13.2	10.1	5.8	70.7	78.7	26040	4974
Francia	3	13.6	9.4	7.4	72.3	80.5	19490	56119
Gabón	6	39.4	16.8	103.0	49.9	53.2	390	1105
Gambia	6	47.4	21.4	143.0	41.4	44.6	260	848
Ghana	6	44.4	13.1	90.0	52.2	55.8	390	14425
Grecia	3	10.1	9.2	11.0	65.4	74.0	5990	10039
Guayana	2	28.3	7.3	56.0	60.4	66.1	330	95
Holanda	3	13.2	8.6	7.10	73.3	79.9	17320	14828
Hong-Kong	5	11.7	4.9	6.10	74.3	80.1	14210	5735
Hungría	1	11.6	13.4	14.8	65.4	73.8	2780	10587
India	5	30.5	10.2	91.0	52.5	52.1	350	832535
Indonesia	5	28.6	9.4	75.0	58.5	62.0	570	178211
Irán	4	42.5	11.5	108.1	55.8	55.0	2490	50204
Iraq	4	42.6	7.8	69.0	63.0	64.8	3020	18271
Irlanda	3	15.1	9.1	7.5	71.0	76.7	9550	3537
Israel	4	22.3	6.3	9.7	73.9	77.4	10920	4525
Italia	3	9.7	9.1	8.8	72.0	78.6	16830	57537
Japón	3	9.9	6.7	4.0	75.9	81.8	25430	123045
Jordania	4	38.9	6.4	44.0	64.2	67.8	1240	4041
Kenya	6	47.0	11.3	72.0	56.5	60.5	370	23277
Kuwait	4	26.8	2.	15.6	71.2	75.4	16150	2020
Líbano	4	31.7	8.7	48.0	63.1	67.0	.	2900
Libia	6	44.0	9.4	82.0	59.1	62.5	5310	4395
Malasia	5	31.6	5.6	24.0	67.5	71.6	2320	17340
Malawi	6	48.3	25.0	130.0	38.1	41.2	200	8230
Marruecos	6	35.5	9.8	82.0	59.1	62.5	960	24567

País	Grupo	Tasa natalidad	Tasa mortalidad	Mortalidad infantil	Esperanza vida hombre	Esperanza vida mujer	PNB	Población (miles)
México	2	29.0	23.2	43.0	62.1	66.0	2490	85440
Mongolia	5	36.1	8.8	68.0	60.0	62.5	110	2128
Mozambique	6	45.0	18.5	141.0	44.9	48.1	80	15357
Namibia	6	44.0	12.1	135.0	55.0	57.5	1030	1300
Nepal	5	39.6	14.8	128.0	50.9	48.1	170	18431
Nigeria	6	48.5	15.6	105.0	48.8	52.2	360	113665
Noruega	3	14.3	10.7	7.8	67.2	75.7	23120	4215
Omán	4	45.6	7.8	40.0	62.2	65.8	5220	1486
Pakistán	5	30.3	8.1	107.7	59.0	59.2	380	109950
Paraguay	2	34.8	6.6	42.0	64.4	68.5	1110	4161
Perú	2	32.9	8.3	109.9	56.8	66.5	1160	21142
Polonia	1	14.3	10.2	16.0	67.2	75.7	1690	38061
Portugal	3	11.9	9.5	13.1	66.5	72.4	7600	10333
Rumania	1	13.6	10.7	26.9	66.5	72.4	1640	23148
Sierra Leona	6	48.2	23.4	154.0	39.4	42.6	240	4040
Singapur	5	17.8	5.2	7.5	68.7	74.0	11160	2664
Somalia	6	50.1	20.2	132.0	43.4	46.6	120	6089
Sri-Lanka	5	21.3	6.2	19.4	67.8	71.7	470	16779
Sudáfrica	6	32.1	9.9	72.0	57.5	63.5	2530	34925
Sudán	6	44.6	15.8	108.0	48.6	51.0	480	24423
Suecia	3	14.5	11.1	5.6	74.2	80.0	23660	8485
Suiza	3	12.5	9.5	7.1	73.9	80.0	34064	6541
Swazilandia	6	46.8	12.5	118.0	42.9	49.5	810	761
Tailandia	5	22.3	7.7	28.0	63.8	68.9	1420	55200
Tanzania	6	50.5	14.0	106.0	51.3	54.7	110	25627
Túnez	6	31.1	7.3	52.0	64.9	66.4	1440	7988
Turquía	4	29.2	8.4	76.0	62.5	65.8	1630	54899
U.K.	3	13.6	11.5	8.4	72.2	77.9	16100	57270
U.S.A.	3	16.7	8.1	9.1	71.5	78.3	21790	248243
Ucrania	1	13.4	11.6	13.0	66.4	74.8	1320	.
Uganda	6	52.2	15.6	103.0	49.9	52.7	220	16722
Uruguay	2	18.0	9.6	21.9	68.4	74.9	2560	3067
URSS	1	17.7	10.0	23.0	64.6	74.0	2242	287664
Venezuela	2	27.5	4.4	23.3	66.7	72.8	2560	19244
Vietnam	5	31.8	9.5	64.0	63.7	67.9	.	65758
Yugoslavia	1	14.0	9.0	20.2	68.6	74.5	.	23707
Zaire	6	45.6	14.2	83.0	50.3	53.7	220	34442
Zambia	6	51.1	13.7	80.0	50.4	52.5	420	7837
Zimbabwe	6	41.7	10.3	66.0	56.5	60.1	640	9567

Unidad 2

Funciones potencia, logarítmica y exponencial

Contenidos

1. Función potencia: $y = a\,x^n$, $a > 0$, para $n = 1, 2, 3$, y 4, su gráfico. Análisis del gráfico de la función potencia y su comportamiento para distintos valores de *a*.
2. Funciones logarítmica y exponencial, sus gráficos correspondientes. Modelación de fenómenos naturales y/o sociales a través de esas funciones. Análisis de las expresiones algebraicas y gráficas de las funciones logarítmica y exponencial. Historia de los logaritmos; de las tablas a las calculadoras.
3. Análisis y comparación de tasas de crecimiento. Crecimiento aritmético, y geométrico. Plantear y resolver problemas sencillos que involucren el cálculo de interés compuesto.
4. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Analizan el comportamiento gráfico y analítico de las funciones potencia, logarítmica y exponencial.
2. Reconocen las funciones exponencial y logarítmica una como inversa de la otra.
3. Analizan las relaciones entre los gráficos, los exponentes y los parámetros en la función potencia.
4. Utilizan las funciones potencia, logarítmica y exponencial para modelar situaciones o fenómenos naturales o sociales.

Orientaciones didácticas

El concepto de función es una de las llaves de la matemática actual y por lo tanto del desarrollo de la ciencia y la tecnología moderna. Es la formalización del reconocimiento de la existencia de relaciones entre diferentes variables que describen una situación y que pueden provenir de ámbitos tan diversos como la química, la física, la arqueología, la economía, la medicina y naturalmente de la matemática misma.

A lo largo del estudio de Matemática en la Educación Media, se han construido distintas funciones que han servido para modelar y describir variados aspectos del mundo real. Se han introducido funciones como las funciones lineales, parte entera, valor absoluto, cuadráticas, raíz cuadrada, y otras que han ayudado a que las alumnas y alumnos perciban la potencia de las funciones como herramienta sólida para modelar fenómenos de la realidad.

En esta unidad se introducen las funciones potencia, exponencial y logarítmica dada la importancia que éstas tienen tanto desde el punto de vista de la construcción matemática como desde la posibilidad que ofrecen para la modelación de nuevos fenómenos comprensibles y cercanos a los estudiantes.

En el desarrollo de esta unidad se enfatiza la utilización del gráfico como una herramienta que apoya la aprehensión del tipo de crecimiento que modelan estas funciones. Es importante incorporar y utilizar la tecnología disponible como calculadoras científicas o gráficas y programas computacionales. Sin embargo, es importante destacar también la génesis de algunos conceptos que permite vincular la creación matemática con el desarrollo de la cultura humana. En este sentido es pertinente destacar, por ejemplo, que los logaritmos se desarrollaron primeramente por el mejoramiento que trajeron a la aritmética, y que sus sorprendentes propiedades facilitadoras de los cálculos hicieron posible los grandes adelantos del siglo XVII en navegación y mecánica celeste. A pesar de disponer de calculadoras y computadores para efectuar los cálculos, las propiedades de los logaritmos no sólo permanecen sino que facilitan la modelación de nuevos fenómenos.

Para unificar los conceptos que se encuentran detrás de los modelos funcionales estudiados a lo largo de la enseñanza media, se sugiere incorporar el estudio y análisis de los elementos básicos del concepto de función.

Es importante que como culminación de la formación matemática escolar, los estudiantes tengan la noción de:

Función: como correspondencia entre dos variables en donde a cada variable independiente le corresponde una única variable dependiente.

Dominio: como el conjunto de los valores posibles de la variable independiente.

Recorrido: como el conjunto de los valores resultantes o imágenes.

Gráfico: como el conjunto de los puntos del plano que representan a la función.

También es importante dejar una ventana abierta a las alumnas y alumnos para que comprendan que con las funciones estudiadas no se ha agotado el repertorio de funciones inventadas por el hombre.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Analizan gráfica y analíticamente algunos fenómenos o situaciones que se modelan por una función potencia y estudian estas funciones considerando la paridad del exponente, variaciones en los valores de los parámetros, restricciones en el dominio y explicitación del recorrido.

Ejemplo A

Expresar el área y el volumen de un cubo en términos de la arista; construir una tabla de valores, el gráfico de la función correspondiente y determinar los valores posibles que puede tomar la variable independiente.

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos y alumnas relacionen los valores de la tabla con la expresión algebraica y la representación gráfica de la función; que distingan en cada caso la variable dependiente y la independiente.

Es importante que los estudiantes se den cuenta que, dado el contexto, la variable independiente sólo puede tomar valores positivos.

El uso de una planilla de cálculo puede ser un buen instrumento para organizar rápidamente muchos valores en una tabla que considere las medidas de arista, área y volumen del cubo.

Además, se sugiere comentar las diferencias entre un gráfico hecho a partir de una tabla de valores y el que se obtiene por valores continuos de la variable independiente: puntos sólo en el primer cuadrante versus curva continua con valores positivos y negativos.

Convendría hacer uso de la notación

$$A(a) = a^2$$
$$V(a) = a^3$$

en que *a* es la longitud de la arista; distinguir los dominios y recorridos de las respectivas funciones, de aquellos valores que son pertinentes para el contexto.

Si no es posible que los alumnos y alumnas accedan directamente a un computador, se sugiere obtener buenas transparencias de los gráficos correspondientes. De este modo se ahorra tiempo y se favorece una reflexión sobre los modelos y sus campos de validez. Es necesario indicar las unidades de medida en cada uno de los ejes.

Ejemplo B

Se desea hacer una caja de cartón con forma de paralelepípedo recto de base cuadrada, que tenga el mayor volumen posible, sabiendo que se dispone de 1,2 m de una cinta decorativa para pegarla en todas las aristas y que se quiere ocupar toda la cinta.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario que los alumnos y alumnas visualicen distintas cajas que cumplen la condición de 1,2 m. en la suma total de las medidas de las aristas, pero que tienen diferentes volúmenes. A partir de esta diversidad de cajas, tiene sentido buscar aquélla que tiene el volumen máximo.

Los estudiantes saben que $V= a^2 h$ permite determinar el volumen de un paralelepípedo de base cuadrada en que a es la medida del lado del cuadrado y h, la altura del prisma.

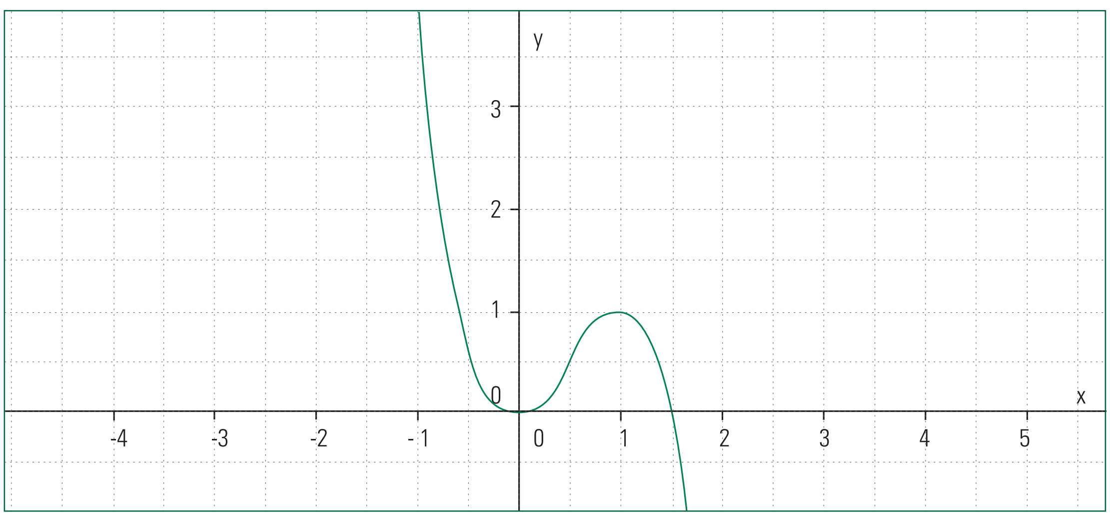
Además, de acuerdo al problema,

$$8a + 4h = 12$$

lo que lleva a la expresión

$$V(a) = a^2 (3 - 2a)$$

en que a está expresado en dm y cuyo gráfico es el siguiente:



De acuerdo al contexto, los valores de a son siempre positivos y el valor máximo se puede obtener a partir del gráfico. Es interesante observar con los estudiantes que este volumen máximo corresponde a una caja con forma de cubo cuya arista mide 1dm.

Ejemplo C

I. Graficar las funciones $y = x^3$; $y = x^4$; comparar ambos gráficos.

II. Graficar funciones de la forma $y = ax^2$; $y = ax^4$; considerar valores de *a* positivos y negativos.

III. Graficar funciones de la forma $y = ax^3$; $y = ax^5$; considerar valores de *a* positivos y negativos.

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere utilizar un graficador computacional; si esto no fuera posible, conviene disponer de trasparencias para superponerlas, después de algunos intentos de graficación manual.

En el caso I, interesa que los alumnos y alumnas distingan ambos gráficos y busquen explicaciones sobre esta diferencia de forma y especulen sobre los gráficos de exponente par e impar.

En el caso II el gráfico permite establecer la relación entre el signo de *a* y la orientación de la gráfica. Ello incide directamente en el recorrido de la función. Se observa una simetría en torno al eje *y*, la que se puede expresar anotando $f(x) = f(–x)$.

Si se considera oportuno, se puede ampliar el análisis a las funciones potencia con exponente fraccionario, como $y = \sqrt[4]{x}$; $y = \sqrt{x}$; constatar cómo en ambos casos el gráfico tiene sólo una rama en el primer cuadrante a causa de la paridad del índice de la raíz. Es un buen momento para retomar los conceptos de dominio y recorrido.

En el caso III, a diferencia de las funciones del caso II, no se observa una simetría en torno a uno de los ejes, sino una simetría central en torno al origen, la que se puede expresar como $f(x) = – f(- x)$.

En forma similar al caso anterior, los alumnos y alumnas podrán graficar funciones potencia con exponente fraccionario como $y = \sqrt[3]{x}$; $y = \sqrt[5]{x}$; constatar cómo, a diferencia de los ejemplos anteriores, en estos casos el gráfico tiene ramas en el primer y tercer cuadrante lo que incide en que tanto el dominio como el recorrido sean todos los números reales.

A partir de estos gráficos, los alumnos y alumnas pueden llegar a establecer características generales para las representaciones gráficas de la función potencia según la paridad de su exponente y el signo del parámetro *a*.

Ejemplo D

En un mismo sistema de coordenadas, graficar las siguientes funciones:

I. $y = x^5$; $y = (x + 1)^5$; $y = (x - 2)^5$

II. $y = x^5$; $y = x^5 + 1$; $y = x^5 - 2$

III. Analizar el rol que juegan los parámetros *b* y *c* en las expresiones de la forma

$y = (x + b)^n$; $y = x^n + c$

INDICACIONES AL DOCENTE

El uso de un graficador computacional es útil para analizar la relación entre estas expresiones algebraicas y el correspondiente gráfico, ya sea para que los estudiantes mismos lo manipulen, o en su defecto, para proveer de gráficos de calidad que se pueden imprimir en transparencias para su uso en clases.

Interesa que los estudiantes lleguen a expresar las relaciones entre los desplazamientos del gráfico y la posición del parámetro en la expresión de la función. Para el caso del exponente par, puede resultar interesante observar que $f(x) = x^n + c, c \neq 0$, tiene recorrido en el intervalo [c, + ∞[

Es importante recalcar aquí que estas expresiones no agotan las posibles funciones que se pueden obtener usando potencias. Si se considera oportuno se podría motivar a los alumnos a graficar funciones polinomiales tales como $f(x) = x^2 + x + 1$; $g(x) = 5x^4 - x^3 + 3$ y comentar acerca de sus gráficos, dominios y recorridos. Análogamente podrían graficarse funciones racionales sencillas como $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ observando las restricciones necesarias en el dominio.

Actividad 2

Estudian y relacionan las propiedades y las gráficas de las funciones logarítmica y exponencial en distintas bases.

Ejemplo A

Supongamos que se dispusiera de una cartulina de 1 mm de grosor que se pudiera doblar sucesivamente de modo que cada doblez se hiciese sobre el anterior:

I. ¿Cuál es la expresión matemática que indica la relación entre la altura del papel doblado y el número de dobleces? Graficar esta expresión.

II. ¿Qué altura alcanzaría el papel doblado si se hiciesen 5, 15, 20, dobleces?

III. Si en lugar de duplicar la altura en cada doblez, ésta se triplicara, ¿cuál es, en ese caso, la expresión matemática que expresa la relación entre la altura del papel doblado y el número de dobleces? Graficar la relación en el mismo sistema de coordenadas del gráfico anterior.

IV. Y, si la altura aumentase según potencias de 10, ¿cuál es el modelo matemático que expresa la relación entre la altura del papel doblado y el número de dobleces? Graficar la relación en el mismo sistema de coordenadas del gráfico anterior.

V. Comparar los tres gráficos y señalar sus características.

VI. En el caso que la altura se duplica en cada doblez, ¿cuántos dobleces son necesarios para obtener una altura de 250 metros aproximadamente?

VII. Y, si se quisiera una altura de 800 metros, en el caso que la altura se triplica con cada doblez, ¿cuántos dobleces son necesarios?

VIII. Y, si la altura aumenta en potencias de 10, y se quiere una altura de 500 metros, ¿cuántos dobleces son necesarios?

Indicaciones al docente

Esta situación se trabajó en Primer Año Medio, asociada a las potencias y como ejemplo de un crecimiento diferente a las adiciones sucesivas de un mismo sumando.

El tipo de pregunta genera otras reflexiones relativas al mismo tema. Las cinco preguntas iniciales se refieren a la función exponencial y las tres últimas a la función logaritmo.

Es importante que los alumnos y alumnas visualicen la rapidez del crecimiento exponencial y comparen los crecimientos de acuerdo a las bases; ayuda a esta percepción la conversión, en este ejemplo, de milímetros a metros o kilómetros.

Si se estima conveniente se puede profundizar más en el estudio de alguna de las funciones consideradas; se sugiere plantear a los estudiantes el cálculo de valores que permita explicar el significado de 2^2 para valores reales de x: calcular 2^2, 2^8, $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\frac{4}{5}}$, 2^{π}. En esos cálculos es necesario discutir sobre las características de algunas calculadoras en relación con notación y aproximación de los resultados.

Además, es interesante comparar y sacar conclusiones a partir del estudio de los gráficos de las siguientes funciones:

$$y = 2^x;\ y = 10^x;\ y = 2^{-x};\ y = 10^{-x}$$

Es conveniente en cada caso establecer el dominio y el recorrido correspondiente.

Los tres últimos casos del ejemplo abren el espacio para definir la función logaritmo con distintas bases. Nuevamente es importante resaltar el dominio y recorrido de la función logaritmo por su relación con el dominio y recorrido de la correspondiente función exponencial.

Ejemplo B

Calcular el capital final que se obtiene al cabo de 10 meses, al depositar 4 millones de pesos a un interés mensual de 2,5%.

Indicaciones al docente

En este ejemplo importa que los estudiantes lleguen a determinar la fórmula para el cálculo del capital final. En esta perspectiva, puede ser oportuno incentivarlos para que construyan una tabla de valores como la siguiente.

N° de mes	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	5°
Capital inicial	4000000	4100000	4202500,0		
Incremento del capital debido al interés	100000	102500	105062,5		
Capital final	4100000	4202500	4307562,5		

Generalizar la fórmula obtenida a $Cf = Ci(1 + \frac{i}{100})^t$ en que Cf es el capital final, Ci el capital inicial, *i* es el interés fijado de acuerdo con la unidad de tiempo elegida y *t* son unidades de tiempo. Complementar con informaciones relativas a préstamos financieros y a compras a crédito en las casas comerciales.

Hacer notar que se trata de una función que utiliza valores discretos.

Para una mejor comprensión del interés compuesto se sugiere que los alumnos y alumnas desarrollen este ejemplo calculando interés simple y establezcan las comparaciones.

Ejemplo C

Sofía soñaba que había un banco que ofrecía el 100% de interés anual sobre los depósitos. En su sueño, ella depositaba un capital de 1 millón de pesos y al cabo de un año retiraba los 2 millones correspondientes.

Continuando con su sueño, ella lograba llegar a un acuerdo con el agente del banco para que el 100% anual se lo aplicaran mensualmente, distribuido en 12 partes iguales, y lo incorporaran cada vez al capital depositado. En esas condiciones del sueño, ¿cuánto dinero tiene en depósito al cabo de un año?

Continuando en la línea de ese sueño, si los intereses se los abonaran diariamente y pasaran a ser depositados automáticamente, ¿cuánto sería el dinero depositado al cabo de un año?

Si se disminuyera aún más la fracción del tiempo en que le abonan los intereses, ¿llegaría Sofía a triplicar su capital?

INDICACIONES AL DOCENTE

Este ejemplo es una manera de introducir el número *e*, a partir de una situación obviamente ficticia. Es importante establecer que ningún banco aceptaría las condiciones soñadas.

Al hacer las liquidaciones mensualmente, la fórmula que permitiría determinar el dinero al cabo de un año es

$$C(f) = 1\ 000\ 000\ (1 + \frac{1}{12})^{12}$$

Si el interés se calculara diariamente, la fórmula para determinar el total de capital es

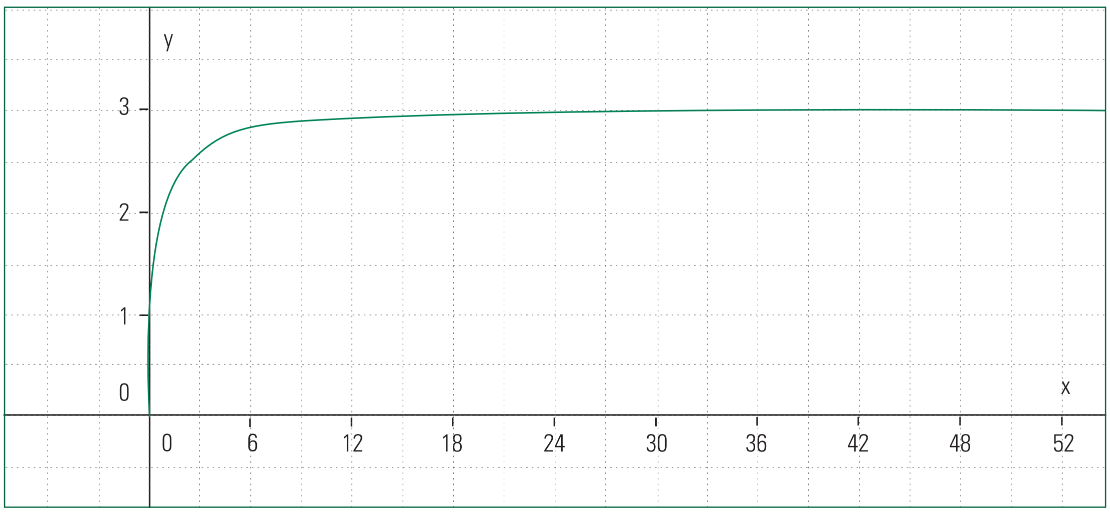
$$C(f) = 1\ 000\ 000\ (1 + \frac{1}{365})^{365}$$

Es necesario que constaten con la calculadora que por mucho que se minimice la unidad de tiempo, el factor por el cual se multiplica el capital inicial no llega al valor 3 sino que tiende a estabilizarse en un número comprendido entre 2,5 y 3.

Como complemento a este ejemplo, para una buena definición del número *e*, proponer a los estudiantes que evalúen la expresión $(1 + \frac{1}{n})^n$ para n= 10; 100; 1 000; 10 000; 100 000; que observen y describan la tendencia que se observa y, además, que grafiquen la expresión

$$y = (1+\frac{1}{x})^x, \text{ con } x > 0.$$

El gráfico de la función muestra que *y* tiende a estabilizarse en la medida que *x* aumenta.



Ejemplo D

I. Calcular log 100; log 1; log 10^{21}; log 10; log 100000. En cada caso explicar la relación con la correspondiente potencia base 10.

II. Graficar las funciones y = log x; y = 10^x

III. Especular sobre el valor para log 50 teniendo como referencia los valores de log 10 y log 100; constatar sus intuiciones con los resultados que proporciona una calculadora y con el gráfico.

Indicaciones al docente

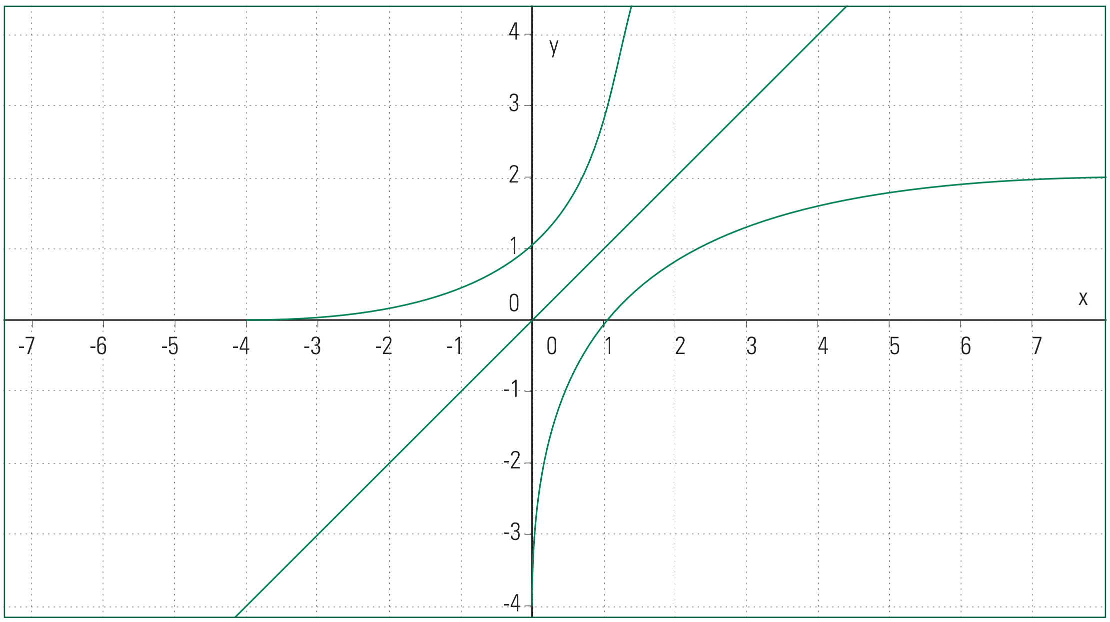
Es importante que los estudiantes perciban la función logaritmo asociada a la función exponencial.

Este ejemplo se puede complementar pidiendo que señalen el orden de magnitud de un número si se conoce su logaritmo; que lleguen a percibir que la diferencia de una unidad entre un logaritmo y otro indica una diferencia de un factor 10 en el antilogaritmo.

Este ejemplo se puede complementar pidiendo a los estudiantes que grafiquen las funciones

$$y = e^x;\ y = \mathrm{Ln}\,(x)$$

Es importante visualizar, tanto para la base 10 como para la base *e*, el eje de simetría de ambos gráficos y relacionarlo con el concepto de funciones inversas entre sí.



Ejemplo E

I. Transformar a su forma exponencial las siguientes expresiones:

$2 = \log_5 25$; $a = \log_2 b$; $a = \log_b c$

II. Transformar a su forma logarítmica las siguientes expresiones:

$9 = 3^2$; $a = 7^4$; $b = 5^a$; $a = b^c$;

Indicaciones al docente

Es necesario que los estudiantes ejerciten la transformación de la forma exponencial a la logarítmica y viceversa utilizando diferentes bases; que se den cuenta que la base 10 y base *e* son casos particulares. Interesa que perciban que fundamentalmente se trata de un cambio de notación.

Ejemplo F

Obtener, a partir de las propiedades de las potencias, las siguientes propiedades de los logaritmos.

I. $\log 1 = 0$

II. $\log 10 = 1$

III. $\log (ab) = \log a + \log b$

IV. $\log (\frac{a}{b}) = \log a - \log b$

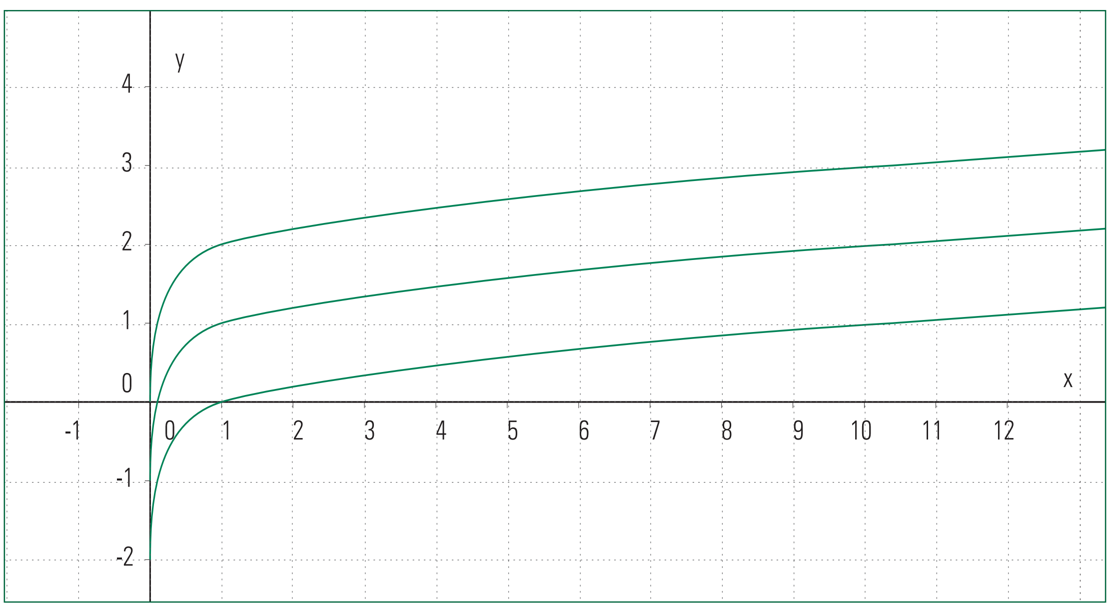
V. $\log (a^b) = b \log a$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas visualicen los logaritmos, desde una perspectiva histórica, como herramientas facilitadoras del cálculo.

Si se considera oportuno, se puede hacer referencia a las tablas de logaritmos y/o a las reglas de cálculo como instrumentos de apoyo para el trabajo con los logaritmos y, principalmente, con los logaritmos base 10, por la facilidad en los cálculos.

Se sugiere enriquecer la comprensión de las propiedades de los logaritmos, graficando log(x), log(10x), log(100x) en un mismo sistema de coordenadas y comparar los tres gráficos.



Es importante que los alumnos y alumnas sepan que la imagen que puede obtenerse con algún graficador en la que las gráficas parecieran intersectar el eje es equívoca; esto se puede aclarar utilizando una calculadora científica para constatar qué valores toma y en cada caso, para valores de *x* positivos, próximos a cero.

La ilustración permite ver con relativa precisión los valores de *y* tanto para x = 1 como para x =10 en cada una de las tres gráficas y tener la intuición visual que entre las gráficas la distancia es constante lo que es coherente con la propiedad de transformar el producto en suma.

Como complemento, para los logaritmos naturales, se puede graficar Ln(x), Ln(ex), Ln(e^{2x}), en un mismo gráfico, para visualizar los gráficos y establecer las diferencias para un mismo valor de *x*.

Ejemplo G

Resolver ecuaciones exponenciales sencillas como:

I. $2^x = 1$; $2^x = 8$

II. $2^{(x+1)} = 4^{(x+2)}$; $3^x = 81^{(x+1)}$

III. $2^x = 5$; $8 \bullet 3^x = 5$

IV. $5^{(x-2)} = 3^{(3x+2)}$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es interesante que los estudiantes resuelvan estas ecuaciones recurriendo a los procedimientos que consideren más cómodos; posteriormente, analizar las ventajas de cada uno.

Ejemplo H

Considerar las funciones $f(x) = 4x + 1$ y $g(x) = 3^x$

I. Graficar ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.

II. Comparar f(1) y g(1)

$f(\frac{5}{2})$ y $g(\frac{5}{2})$

f(3) y g(3)

f(5) y g(5)

III. ¿Para qué valores de x es $f(x) \geq g(x)$?

IV. ¿Para qué valores de x es $f(x) \leq g(x)$?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas diferencien los distintos tipos de crecimiento; en este caso, diferenciar el crecimiento lineal o aritmético del geométrico.

Actividad 3

Resuelven problemas acerca de fenómenos de distintos ámbitos que se modelan a través de la función exponencial y logarítmica.

Ejemplo 1

En un equipo de amplificación se lee la siguiente información: "2.000 watts/m^2 de salida". ¿A qué nivel de sonido, en decibeles, corresponde esta información?

Si otro equipo tuviera la lectura "4.000 watts/m^2 de salida", ¿correspondería a un nivel de sonido igual al doble de decibeles que el anterior?

Considere que si *I* es la intensidad del sonido medido en watts/m^2, el nivel de decibeles (db) del sonido es:

$$D = 10 \log_{10}(I \bullet 10^{12}) \text{ db}$$

Indicaciones al docente

Este es un tema muy próximo a la generalidad de los estudiantes. Es conveniente coordinar acciones con profesores o profesoras de Física y de Artes Musicales para precisar conceptos relativos a sonidos, unidades de medida de la intensidad y potencia.

En la tabla que sigue se incluye una diversidad de sonidos habituales y sus correspondientes decibeles; esto permitirá desarrollar algunas argumentaciones sobre la contaminación acústica y sobre el cuidado de los oídos.

Relación sonido vs decibeles		
Fuente	**Intensidad**	**dB**
Umbral auditivo	10^{-12}	0
Susurro	10^{-10}	20
Tráfico callejero intenso	10^{-5}	70
Posible daño auditivo	$10^{-3,5}$	85
Cercano a un trueno	10^{0}	120
Umbral de dolor	10^{1}	130
Perforación instantánea del tímpano	10^{4}	160

Ejemplo B

Un modelo matemático del crecimiento de la población mundial, para períodos cortos de tiempo, está dado por: $P = P_0\, e^{rt}$, donde P_0 es la población cuando $t = 0$, r es la tasa de crecimiento en % anual, t es el tiempo en años, P es la población en el tiempo t.

Si actualmente la población de Chile es de 15 millones de habitantes y la tasa de crecimiento, de acuerdo al período intercensal 1982 a 1992, es igual a 1,6% anual, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse la población, de acuerdo a este modelo?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es interesante retomar el tema de los modelos matemáticos y sus restricciones al aplicarse a situaciones concretas; en este caso no se considera ningún accidente que pueda alterar el proceso demográfico sino que se supone que se mantiene la tasa.

Este problema abre un espacio para conversar sobre las consecuencias del crecimiento poblacional sobre los ecosistemas y su relación con los problemas ambientales globales.

Ejemplo C

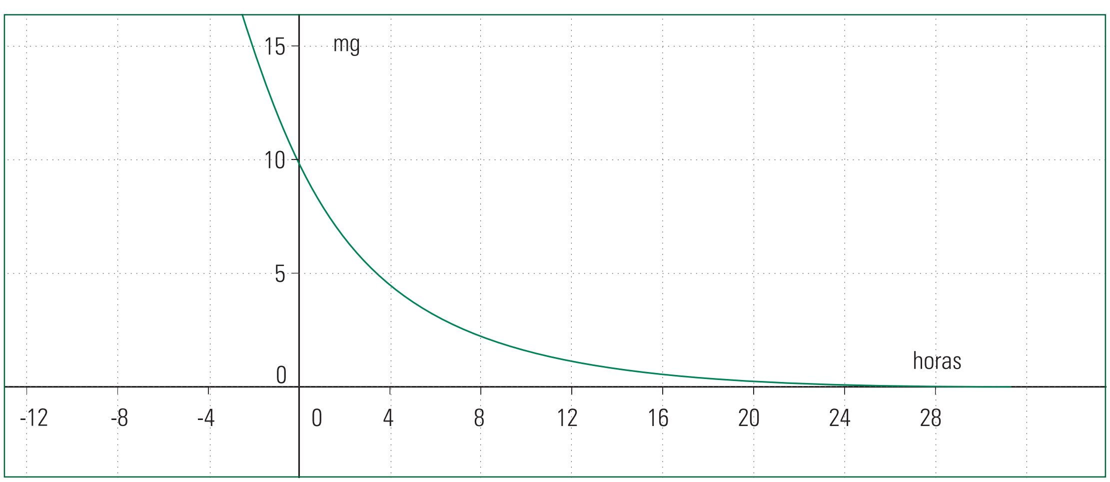
La cantidad de miligramos de un medicamento que queda en el organismo de una persona luego de h horas de haber sido administrado está dada por $10e^{(-0,2\,h)}$.

I. Graficar la función y comentarla.

II. Si la cantidad de remedio no puede bajar de 2 mg, ¿cada cuánto tiempo en horas deberá tomar el medicamento?

INDICACIONES AL DOCENTE

Con motivo de este ejemplo se puede conversar con los estudiantes sobre el problema de la automedicación y la necesidad de cumplir adecuadamente los horarios de ingesta de remedios.



Ejemplo D

Se sabe que mientras un animal o planta esté vivo mantiene en sus tejidos una concentración constante de carbono 14 (radiactivo). Al morir, los tejidos dejan de absorber carbono con lo cual comienza a disminuir su presencia por desintegración radiactiva según el modelo matemático:

$$C(t) = C_i\, e^{-(0.000124\, t)}$$

donde C(t) es la cantidad restante de carbono después de *t* años, Ci es la cantidad inicial y *t* es el tiempo en años.

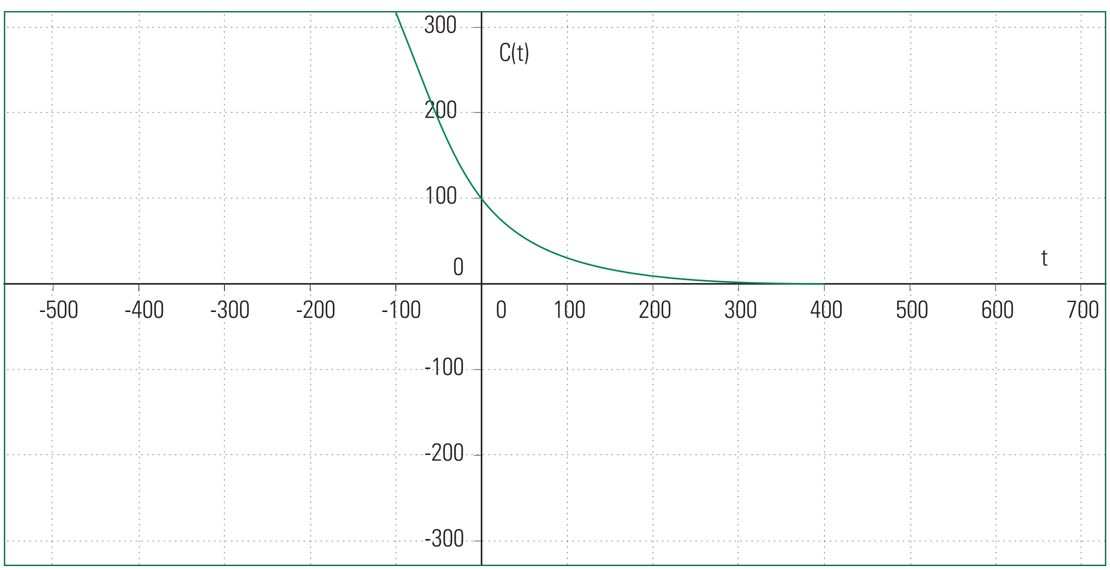
I. Graficar la función determinando dominio y recorrido.

II. Determinar en cuántos años la cantidad inicial de carbono 14 baja a la mitad.

III. Calcular la antigüedad de un cráneo descubierto en un sitio arqueológico, si aún está presente el 10% de la cantidad original de carbono 14.

Indicaciones al docente

Al intentar graficar surgirán probablemente dificultades dado que la constante que multiplica a *t* es muy pequeña, por lo cual convendrá trabajar con *t* expresado en siglos.



Ejemplo E

Una escala utilizada para medir la magnitud de un sismo es la escala de Richter. La cantidad de energía liberada en un movimiento sísmico está dada por la fórmula:

$$\log E = 1{,}5\ R + 11{,}8$$

donde *E* es la energía liberada medida en ergios y *R* es la magnitud del sismo en grados de la escala de Richter.

I. Expresar la energía liberada en su forma exponencial.

II. ¿Qué cantidad de energía se libera en un temblor de grado 4?; ¿de grado 5?

III. ¿Cuál es la relación numérica entre ambos valores?

IV. El aumento de un grado en la escala Richter, ¿qué aumento representa, aproximadamente, en la cantidad de energía liberada? Y si el aumento fuera de dos grados, ¿qué incremento se produce en la energía liberada?

V. Desde que se dispone de instrumentos de medición sísmica, el terremoto de mayor magnitud registrada es el de Valdivia en el año 1960, que tuvo una magnitud de 9,5 grados en la escala de Richter. Comparar la energía liberada en este terremoto con la de otros de magnitud conocida.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es interesante que los alumnos y alumnas relacionen este ejemplo con el ejemplo D de la actividad anterior y encuentren significado al incremento de una unidad en una escala logarítmica.

Los estudiantes pueden investigar sobre la escala de Mercalli, que es cualitativa, en el sitio de internet del Servicio Sismológico de la Universidad de Chile o en otras fuentes.

Ejemplo F

Investigaciones médicas afirman que el riesgo *R*, expresado en porcentaje, que tiene una persona de sufrir un accidente mientras conduce un vehículo bajo los efectos del alcohol, está dado por la expresión:

$$R = 6\ e^{(kx)}$$

donde *x* es la concentración porcentual de alcohol en la sangre y *k* es una constante.

I. Calcular la constante sabiendo que una concentración de un 4% de alcohol en la sangre significa un riesgo de un 10% de tener un accidente.

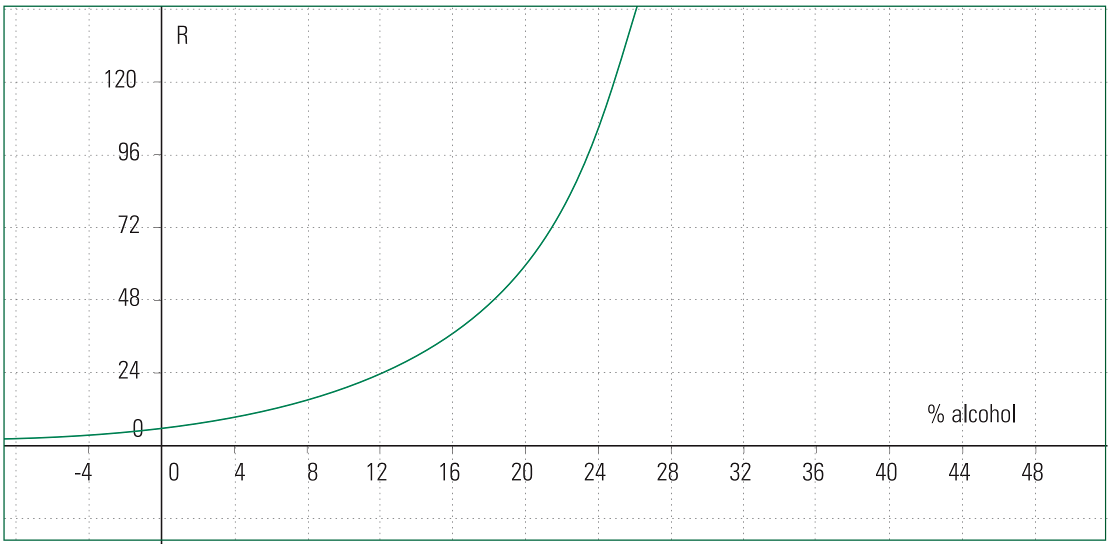
II. Graficar la función y comentarla.

III. Comentar sobre el máximo riesgo posible.

IV. Calcular la máxima concentración posible para no sobrepasar el 20% de riesgo.

Indicaciones al docente

A partir del gráfico, será interesante conversar con los estudiantes sobre el rango de validez del modelo y averiguar acerca de la concentración máxima de alcohol que puede soportar el cuerpo humano.



Además, la información que se obtiene desde el gráfico se puede constatar con cálculos más precisos, con ayuda de una calculadora.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

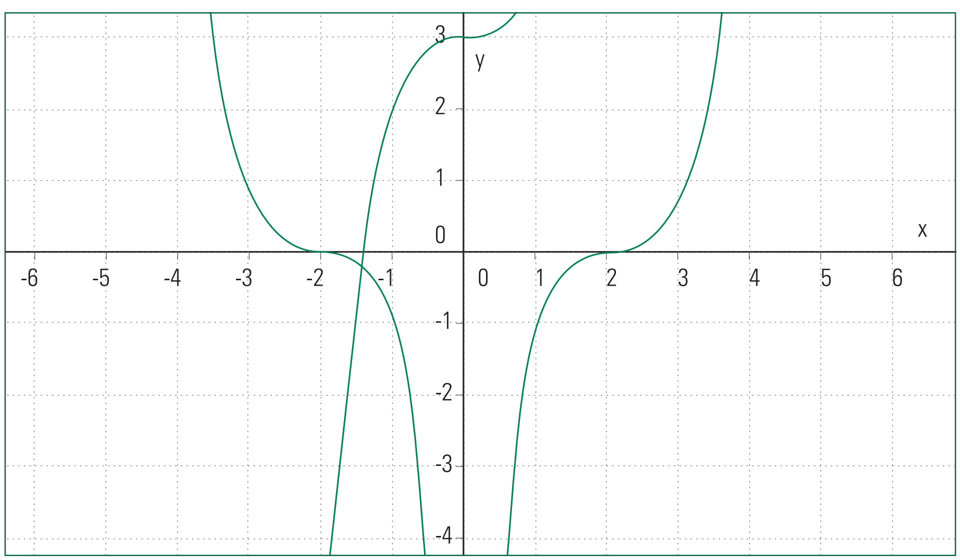
- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

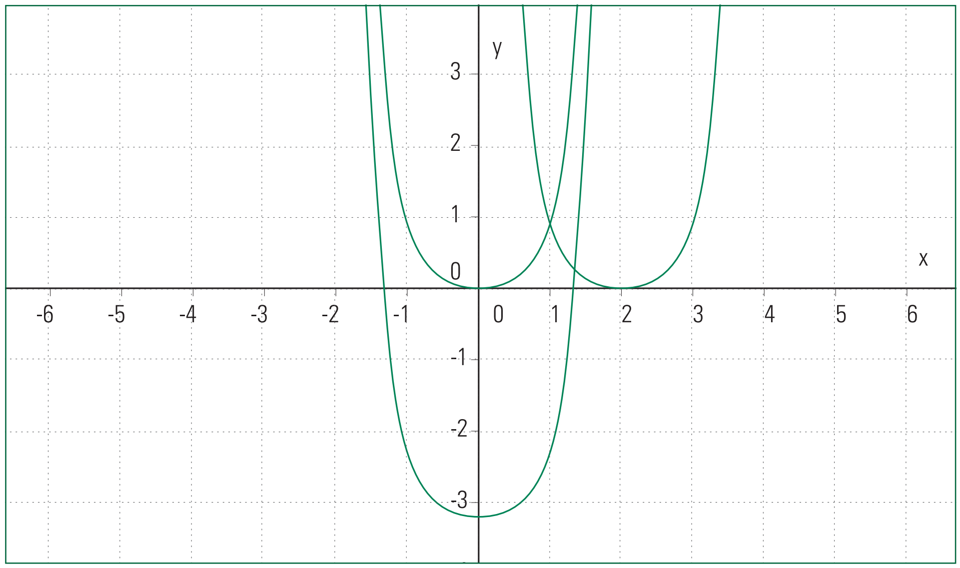
Actividad 1

Relacionan la expresión algebraica y el gráfico de la función potencia; la utilizan para el estudio de algunos fenómenos.

Ejemplo A

En el gráfico siguiente identificar el tipo de expresión algebraica que representa a cada uno de los gráficos.





Observar si asocian los parámetros con los desplazamientos de los gráficos. Es posible que algunos alumnos y alumnas recurran a un graficador para confirmar o para averiguar la respuesta.

Ejemplo B

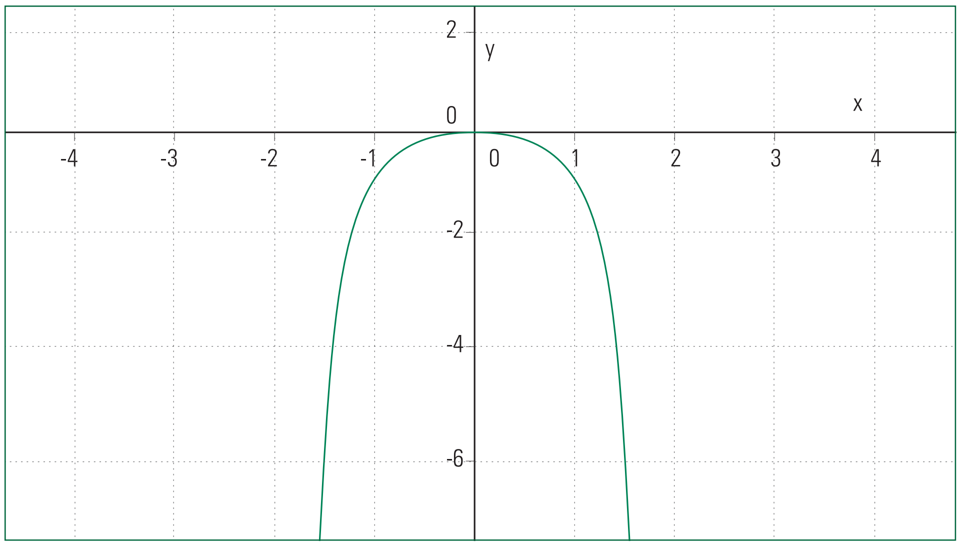
Determinar los puntos de intersección con el eje *x* de la función

$$y = x\,(x^2 - 9)$$

Observar si grafican la función y encuentran la respuesta a través del gráfico o bien, si la resuelven algebraicamente, igualando y = 0

Ejemplo C

Caracterizar el parámetro *a* y el exponente *n* en la función $y = ax^n$, si el gráfico es del tipo siguiente



Observar si asocian la forma simétrica en torno al eje *y* con el exponente par mayor que 2 y la orientación de la gráfica con el signo del parámetro *a*.

Actividad 2

Utilizan la función exponencial, en particular la de base *e* para el estudio de algunos fenómenos.

Ejemplo A

Comparar el costo de un préstamo al 12% anual con otro al 1% mensual.

Observar si relacionan el tiempo con el encarecimiento del préstamo, si aplican adecuadamente la fórmula y hacen correctamente lo cálculos.

Ejemplo B

La ecuación del decaimiento del gas radón es $y(t) = y(0) \bullet e^{(-0{,}8\ t)}$, en que *t* está medido en días. ¿Cuánto tiempo demorará para decaer el 90% de la cantidad inicial?

Observar si logran interpretar bien la expresión porcentual, la reemplazan correctamente en la fórmula y hacen la operatoria pertinente.

Ejemplo C

El estroncio 90 se utiliza en los reactores nucleares y se desintegra según la fórmula $A = Pe^{(-0{,}0248\ t)}$, donde *P* es la cantidad presente cuando t=0, *A* es la cantidad restante después de *t* años. Encontrar *t* tal que *A* sea la mitad de *P*.

Observar si interpretan las condiciones del problema y las traducen en la fórmula; la operatoria algebraica tiene menos grados de dificultad que los dos pasos anteriores.

Unidad 3

Geometría

Contenidos

1. Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.
2. Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Angulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Conocen y utilizan la operatoria básica con vectores en el plano y en el espacio (adición, sustracción y ponderación por un escalar), y la relacionan con traslaciones y homotecias de figuras geométricas.
2. Conocen y valoran la capacidad del modelo vectorial para representar fenómenos físicos como desplazamientos y fuerzas.
3. Resuelven problemas relativos al cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas.

Orientaciones didácticas

El mundo en el que nos desenvolvemos es tridimensional. Sin embargo, a lo largo de la Educación Media los estudiantes se han visto enfrentados fundamentalmente a situaciones en las que sólo han necesitado desarrollar habilidades geométricas en el plano. Por ello, la intención fundamental de esta unidad es situar al alumno o alumna en el contexto geométrico real tridimensional, entregándole una nueva herramienta de representación del plano y del espacio, como es el modelo vectorial. Este modelo constituye hoy uno de los pilares básicos de la física y de la matemática.

Interesa que los estudiantes desarrollen capacidades de representación de vectores tanto en el plano como en el espacio y que puedan manejar con soltura la operatoria básica que se presenta. A través de la comprensión y utilización de esta operatoria, tendrán las herramientas que les permitirán representar rectas en el plano y el espacio, y también una diversidad de planos contenidos en el espacio.

Metodológicamente, se propone trabajar inicialmente con vectores en el plano, que son fáciles de dibujar e imaginar, para luego extender la representación y la operatoria al espacio. Esto podría invitar a los estudiantes a reflexionar sobre las posibilidades de extensión a dimensiones mayores que tres.

Con el fin de mantener presente la consistencia interna de la matemática y las fuertes relaciones que existen entre los diferentes tópicos, es importante enfatizar las relaciones entre las respectivas ecuaciones cartesianas y vectoriales de las figuras geométricas. Ello se propone con fuerza en la Actividad 2, con el fin de aprovechar también los conocimientos previos de los estudiantes.

Finalmente, debe enfatizarse la diferencia entre magnitudes escalares y vectoriales. Estas últimas tienen asociada una dirección y un sentido, lo cual permite que los vectores puedan utilizarse para representar traslaciones. Es importante que se distinga entre traslaciones y rotaciones y, más aún, que en este último caso se comprenda que tiene sentido rotar figuras planas en el espacio.

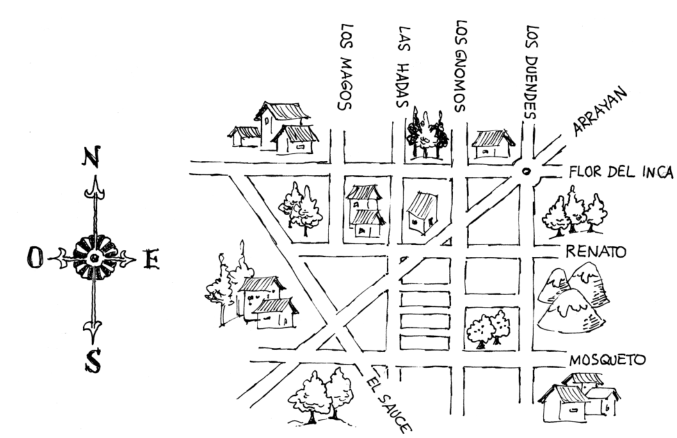
Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Representar vectores en el plano cartesiano, calcular gráfica y algebraicamente sumas y diferencias de vectores; determinar el producto de un escalar por un vector.

Ejemplo A

En el mapa siguiente marcar los desplazamientos que han hecho Diego y Cecilia. Ambos partieron desde la plazoleta del Arrayán con Flor del Inca y Los Duendes; Diego se fue hacia el sur por Los Duendes, dobló hacia el poniente por Mosqueto y subió en dirección noroeste por El Sauce hasta Arrayán. Cecilia en cambio, se fue en dirección suroeste por Arrayán, dobló en Retamo hacia el oeste y al llegar a El Sauce dobló por esta calle hacia el sureste hasta llegar a Flor del Inca, donde ambos amigos se encontraron después de haber hecho algunas diligencias.



I. Distinguir entre el camino recorrido por cada uno (la trayectoria) y el desplazamiento entre el punto de partida y el de la llegada final.
II. Codificar los caminos recorridos utilizando un sistema de coordenadas.
III. Codificar otros caminos que cumplan la condición de tener, aproximadamente, la misma longitud que el de Diego, pero que conducen a otros puntos de llegada.
IV. Establecer diferencias entre magnitudes escalares y vectoriales.

Indicaciones al docente

Este ejemplo esta orientado a poner en la conversación con los alumnos y alumnas la noción de vector. Una flecha es una representación cómoda que pone en evidencia el punto de partida, la magnitud, dirección y sentido del vector.

Puede ser interesante para los estudiantes que el mapa corresponda a algún sector de su ciudad. Para la claridad de vocabulario importa que comprendan que en el lenguaje habitual se suelen usar las palabras dirección y sentido como sinónimos; la dirección está asociada directamente con el paralelismo entre rectas; una misma dirección acepta dos sentidos; el sentido lo da la punta de flecha.

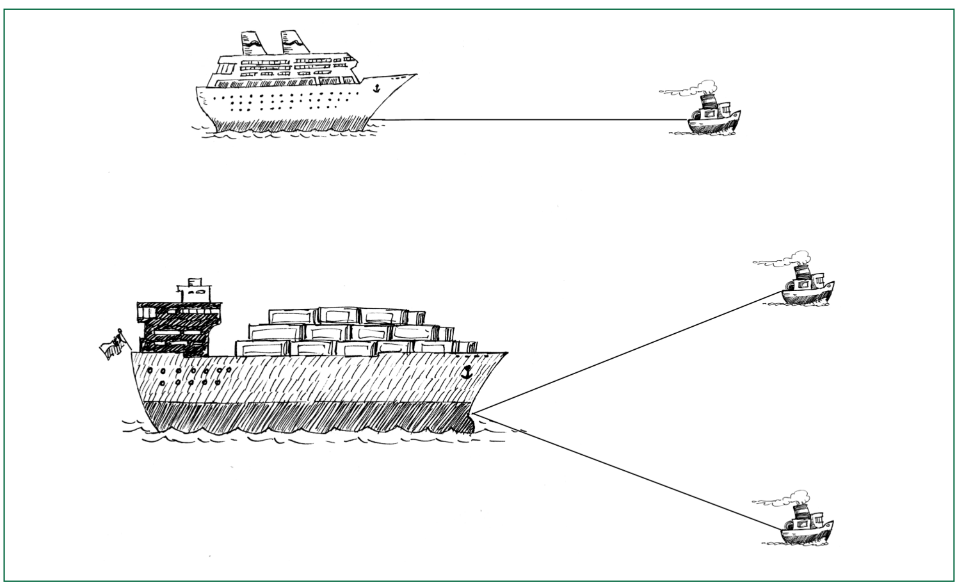
Al dibujar los vectores del ejemplo en un sistema de coordenadas, elegir una unidad de medida. Comparar las representaciones que se dibujen.

De acuerdo a los intereses de los alumnos y alumnas conversar sobre otros conceptos físicos en los que se usan vectores: fuerza, velocidad, entre otros.

Ejemplo B

Una de las actividades que se desarrolla en los puertos es el atraque de los barcos a un sitio, por medio de uno o dos remolcadores.

El siguiente dibujo ilustra ambas situaciones:



I. Dibujar la traza del movimiento que se espera realiza el barco, en cada caso.

II. En un sistema de coordenadas, representar ambas situaciones.

Indicaciones al docente

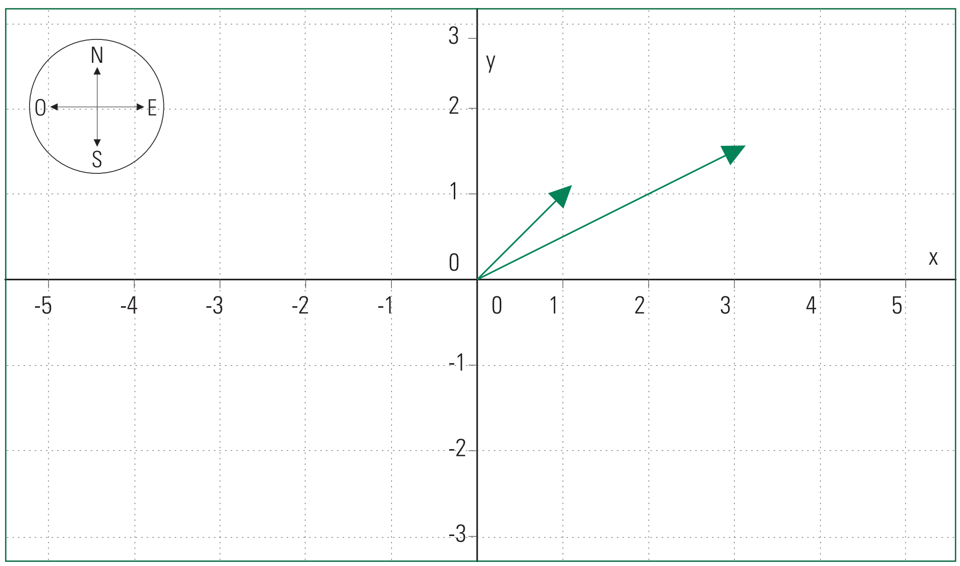
Será conveniente coordinar acciones con el profesor o profesora de Física para precisar los conceptos físicos involucrados en el ejemplo: fuerza, movimiento, peso del cuerpo, etc.

En este ejemplo se plantea de manera explícita la suma de vectores.

Se sugiere llevar este ejemplo a una representación en un sistema de coordenadas para visualizar la regla del paralelogramo.

Ejemplo C

En el sistema de coordenadas están dibujados dos vectores: el vector (3; 1,5) representa el desplazamiento que se quiere realizar al término de un viaje y el vector (1,1) lo que ya se ha realizado. ¿Cuál es el vector que representa lo que falta por realizar del viaje?



Indicaciones al docente

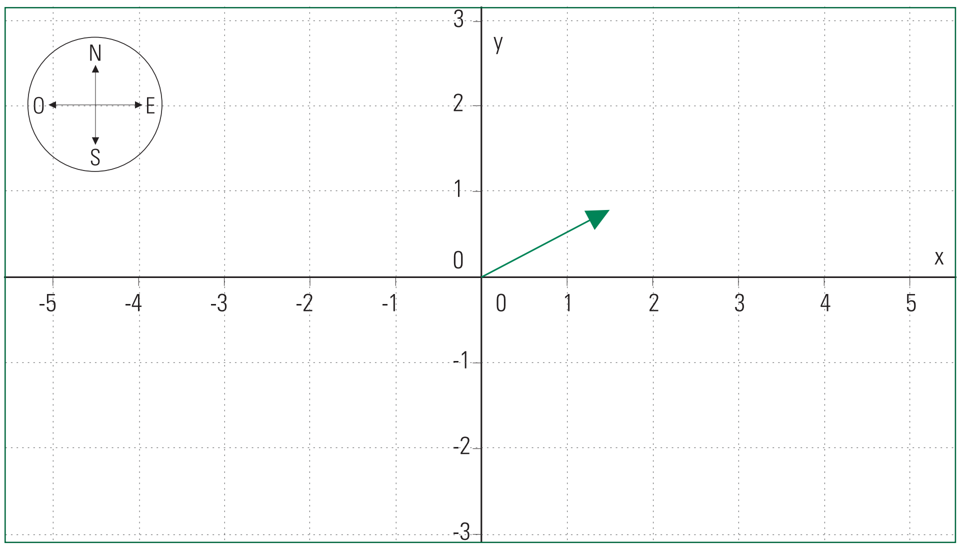
Este ejemplo permite determinar algebraicamente e interpretar geométricamente la diferencia entre dos vectores. Es necesario insistir en la representación de los vectores con su punto de partida en el origen del sistema de coordenadas; además, es importante que los alumnos y alumnas relacionen lo algebraico y lo geométrico.

Además, es conveniente enfatizar sobre las nociones de dirección y sentido de los vectores; ejemplificar un vector y su correspondiente vector opuesto con números y en el gráfico para aclarar ambos conceptos; además, constatar que por ejemplo: (2,3) = – (– 2, – 3) y generalizar.

Ejemplo D

En el sistema de coordenadas que sigue se representa el camino recorrido por un móvil en una hora.

I. Si se mantiene la velocidad, dirección y sentido del movimiento, ¿cuál es la representación, en este sistema, del camino recorrido en 6 horas?



II. Si se supone que el móvil se ha venido desplazando en esta misma dirección y con la misma velocidad, ¿cuál es el vector que indica la posición hace 3 horas?

INDICACIONES AL DOCENTE

Este ejemplo permite determinar algebraicamente e interpretar geométricamente la ponderación de un vector por un escalar. Como en el ejemplo anterior, es importante que los alumnos y alumnas relacionen lo algebraico y lo geométrico.

Se sugiere hacer ejercicios considerando números enteros, decimales y fraccionarios, positivos y negativos, como factores de ponderación.

Ejemplo E

Dibujar en un sistema cartesiano un polígono irregular cualquiera y representar el desplazamiento si se traslada 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia el sentido negativo del eje de las *y*.

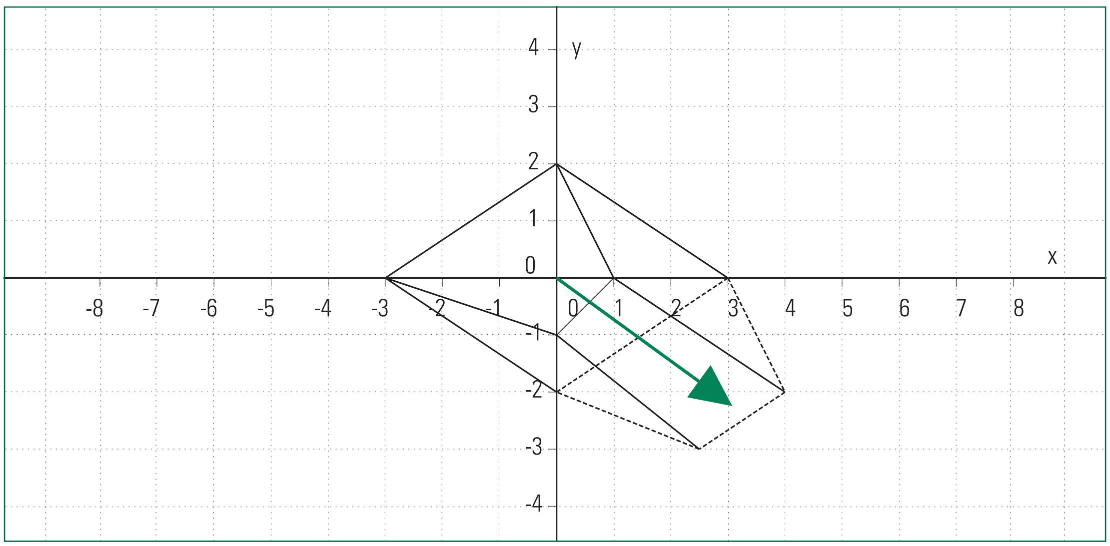
I. Caracterizar las flechas que representan esta traslación para cada vértice del polígono.

II. Determinar el vector que corresponde a esta traslación.

III. Si los vértices de un cuadrilátero son (1,0); (0,2); (–3,0); (0, –1), ¿cuáles serán los vértices de este cuadrilátero si se le aplica la traslación (3, –2)?

INDICACIONES AL DOCENTE

El dibujo que sigue ilustra esta traslación; se puede constatar que el polígono trasladado es congruente con el original, tema ya conocido desde Primer Año Medio. Además, sólo es necesario dibujar la imagen de los vértices trasladados y unir los correspondientes para obtener el polígono trasladado; al realizar este procedimiento se constata que las flechas asociadas a la traslación de cada vértice son paralelas y de igual medida.



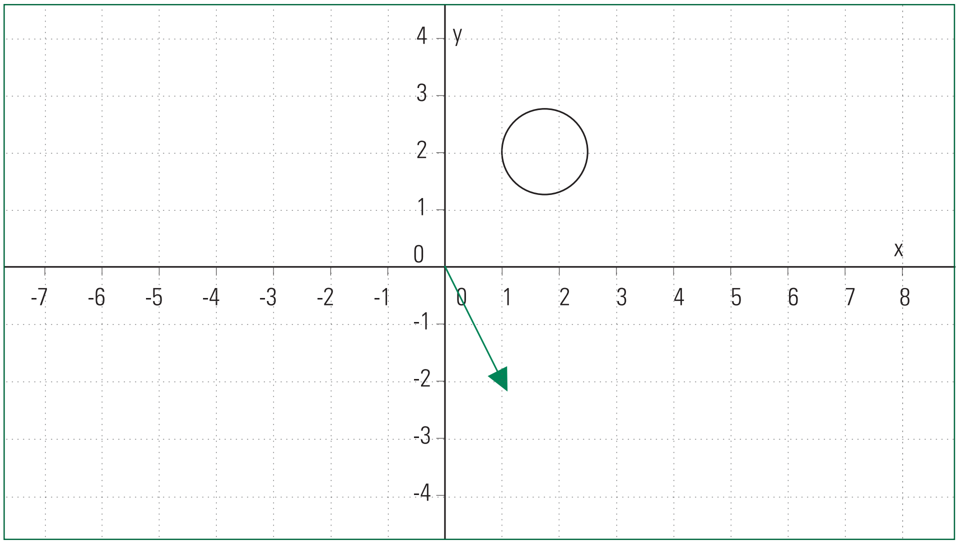
Será necesario que el profesor o profesora explique que a cualquier par ordenado de números (x, y) se le puede asociar un punto –tema que es conocido por los alumnos y alumnas– y un vector en el plano; que el vector se representa por una flecha que parte desde el origen con su otro extremo en el punto (x, y); que además se puede anotar $\vec{v} = (x, y)$.

De acuerdo al dibujo es necesario que los alumnos y alumnas reconozcan como vector (3, –2) a todas las flechas paralelas y de igual magnitud y sentido que la que representa al vector (3, –2) con el punto inicial en el origen.

Ejercitar con diferentes traslaciones, con distintas figuras de fácil dibujo. Interesa que los estudiantes constaten que la traslación de un punto a otro punto del plano está definida por un vector con origen en el punto (0, 0).

Ejemplo F

Si una circunferencia de radio 1 tiene su centro en el punto (2,2); aplicar a esta circunferencia una traslación (1, –2).



I. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia trasladada?

II. El punto (3,2) pertenece a la circunferencia en su ubicación inicial, ¿cuáles son sus coordenadas después de la traslación?

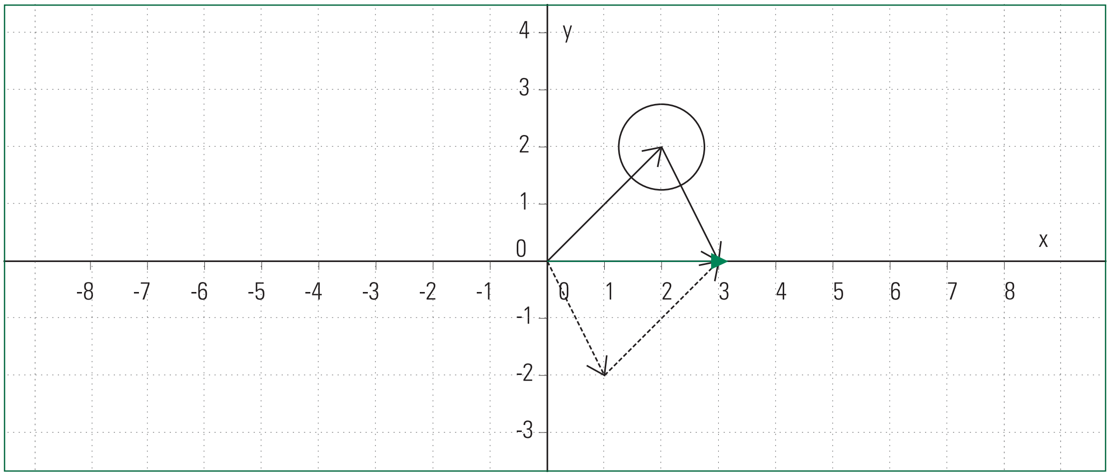
III. Si a la circunferencia inicial se le aplicase una traslación tal que al punto (3,2) de la circunferencia le correspondiera el punto (–3, –5) en la circunferencia trasladada, ¿cuál sería el vector traslación en ese caso y cuáles serían las coordenadas del nuevo centro de la circunferencia?

INDICACIONES AL DOCENTE

Ejemplos de este tipo se pueden utilizar para comprender la suma de vectores. Si al centro de la circunferencia se le asocia un vector posición (2,2) y a la traslación aplicada el vector (1, –2), el nuevo centro tendrá asociado el vector posición (3,0) que corresponde a:

$$(2,2) + (1, -2) = (2 + 1, 2 - 2) = (3, 0);$$

Es necesario representar esta expresión en el gráfico y constatar que este último corresponde a la diagonal del paralelogramo formado por los dos vectores que se suman.



Es necesario que los alumnos y alumnas ejerciten tanto gráfica como numéricamente la adición de vectores.

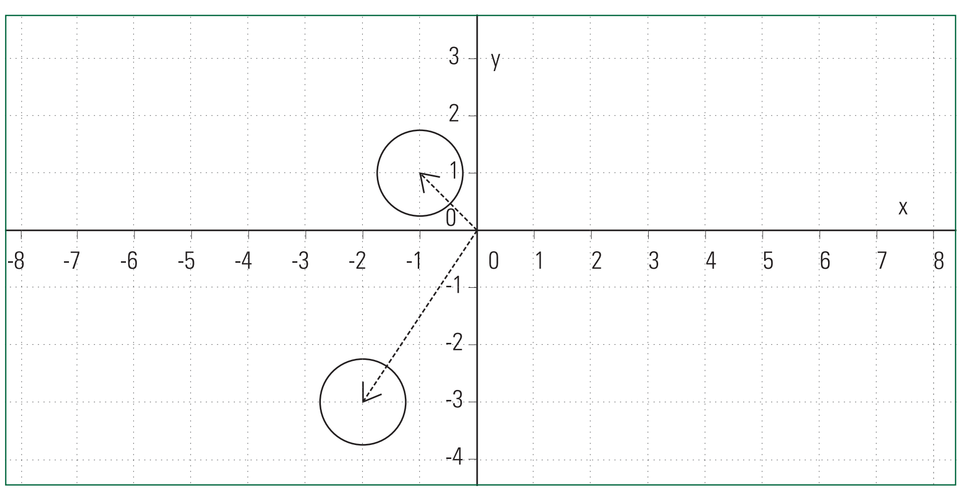
Ejemplo G

Considerar, como en el gráfico que sigue, dos posiciones diferentes de una misma circunferencia: una con centro en O = (– 2, – 3) y la otra con centro en A = (– 1, 1).

I. Determinar y trazar el vector que permite trasladar la circunferencia desde la posición con centro en *O* a la posición con centro en *A*.

II. A partir del resultado obtenido, determinar el vector que permite realizar el traslado inverso.

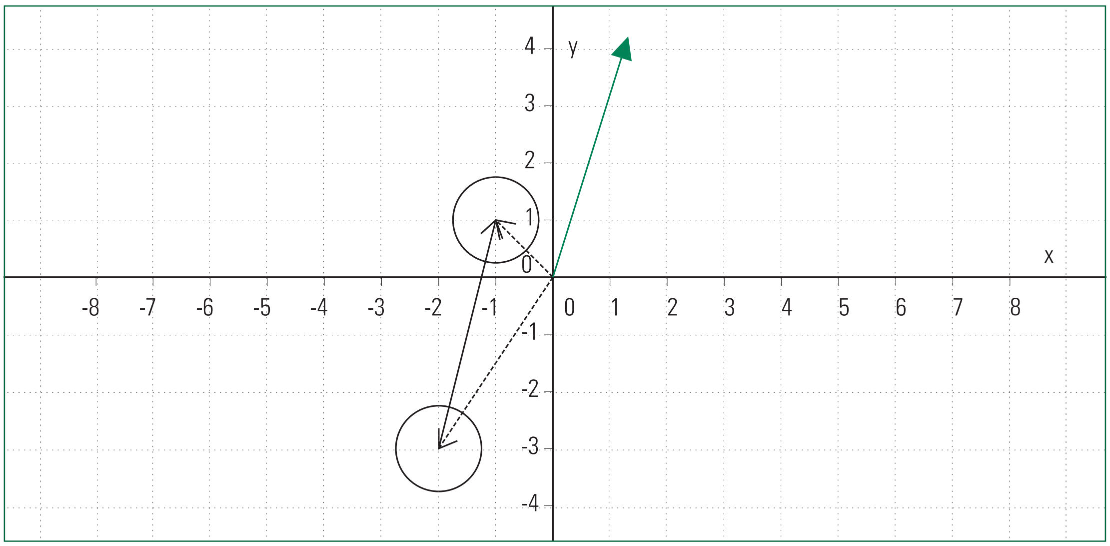
III. En ambos casos, expresar ese vector en función de los vectores que definen los centros de ambas circunferencias.



INDICACIONES AL DOCENTE

Ejemplos de este tipo se pueden utilizar para el cambio de signo de los vectores y, por supuesto, para la sustracción de vectores.

En el dibujo que sigue se ilustran el vector que permite trasladar la circunferencia de centro *O* a la posición de la circunferencia de centro *A*.



A partir del ejemplo anterior se puede anotar (–2, –3) + (x, y) = (–1, 1), de donde se deduce que (x, y) = (–1, 1) – (–2, –3) = (1, 4).

Será necesario que los alumnos y alumnas ejerciten la adición y la sustracción de vectores y lo relacionen con la interpretación gráfica correspondiente.

Ejemplo H

Ejercitar adición y sustracción de vectores resolviendo y graficando situaciones como las siguientes

I. (3 , 4) + (5 , –2)=

II. (2 , –3) – (6 , –7) =

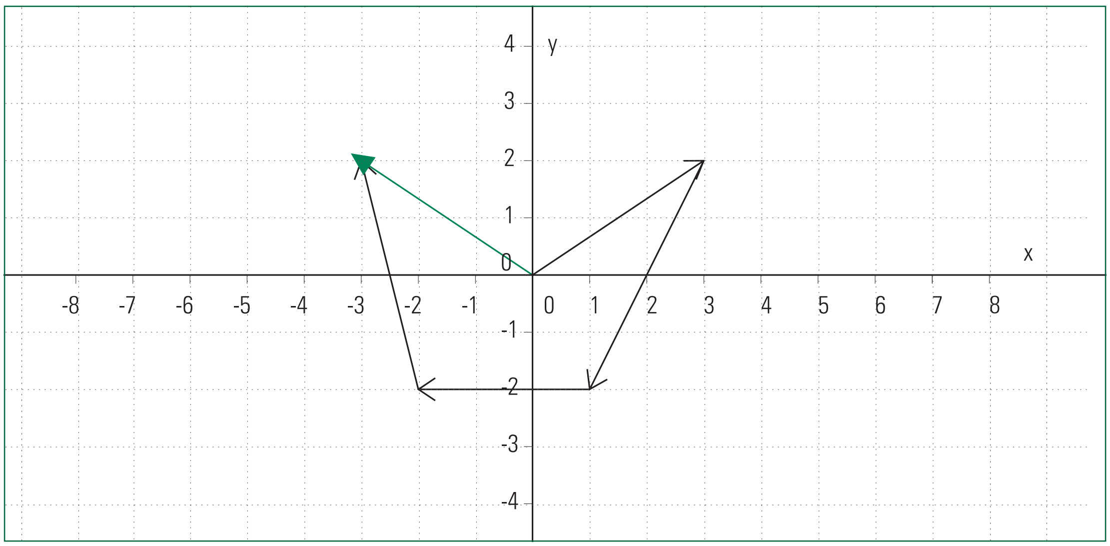
III. (x , y) + (–3, 13) = (0 , –5) ¿cuál es el valor de (x , y)?

IV. Calcular algebraica y gráficamente la suma siguiente: (3,2) + (–2, –4) + (–3, 0) + (–1, 4) =

INDICACIONES AL DOCENTE

En la adición y la sustracción de vectores se sugiere relacionar constantemente la parte algebraica del cálculo, que suele ofrecer menos dificultades a los estudiantes, con la parte gráfica; es esta última la que permite relacionar plano y operatoria con vectores.

Para los alumnos y alumnas es sorprendente constatar la relación entre la suma y el gráfico que se ilustra a continuación.



Se sugiere contactar al profesor o profesora de Física para coordinar acciones que puedan llevar a comentar con los estudiantes distintas contextualizaciones en relación con este u otro diagrama de suma de vectores. Por ejemplo, interpretándolos como fuerza, se puede pensar en mover algo en cierta dirección por combinación de fuerzas distintas ejercidas en diferentes direcciones y sentidos.

Será necesario y conveniente desarrollar otros ejemplos con tres vectores y construir los paralelogramos correspondientes para llegar a esta síntesis gráfica.

Ejemplo I

Considerar los vectores (1 , 3); (4 , 12); (0 , 0); (–2 , –6).

Expresar algebraicamente, por medio del producto de un escalar por un vector, cada uno en términos del otro; graficar los cuatro vectores.

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos y alumnas consideren tanto la expresión

$$(4,12) = 4\ (1, 3) \text{ como la expresión } (1, 3) = \frac{1}{4}\ (4, 12).$$

Además, conviene que dibujen estos vectores y constaten que están en una misma recta que pasa por el origen; no se trata que 'formalicen' el concepto de dependencia lineal, sino que sólo tengan una aproximación empírica con esta regularidad.

Se pueden proponer cinco o seis vectores y que ellos seleccionen aquellos que se pueden expresar uno en función del otro o, lo que es lo mismo, que pertenezcan a una misma recta que pasa por el origen.

Ejemplo J

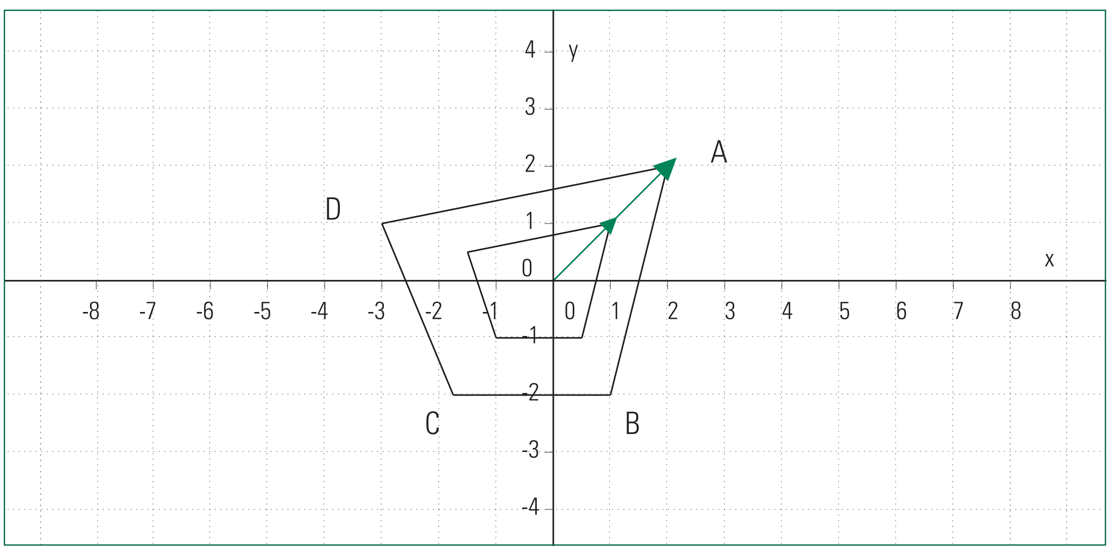
Dado un cuadrilátero cuyos vértices tienen coordenadas determinadas; anticipar qué figura resulta al multiplicar los vectores que definen los vértices por el escalar 3, o bien por el escalar 0,5.

Dibujar la figura que se obtiene y comparar con la primitiva.

INDICACIONES AL DOCENTE

En el dibujo siguiente se presenta el cuadrilátero de coordenadas A = (2,2); B = (1, –2); C = (–2, -2); D = (-3, 1) de modo que el origen pertenece al interior del cuadrilátero.

En este caso, los vectores se han multiplicado por el escalar 0,5 y los lados del cuadrilátero también se han reducido a la mitad.



Averiguar si estas condiciones se mantienen para una figura plana si el origen del sistema de coordenadas está en el exterior del polígono.

Es importante relacionar lo que ocurre en casos como este con la homotecia estudiada en Segundo Año Medio en relación con el tema de semejanza de figuras planas. Se puede complementar estableciendo las razones de semejanza entre los elementos lineales y el área de ambas figuras.

Actividad 2

Generalizan la noción de vector y la de operatoria vectorial desde el plano al espacio tridimensional.

Ejemplo A

Representar puntos del espacio en el sistema de coordenadas x, y, z;

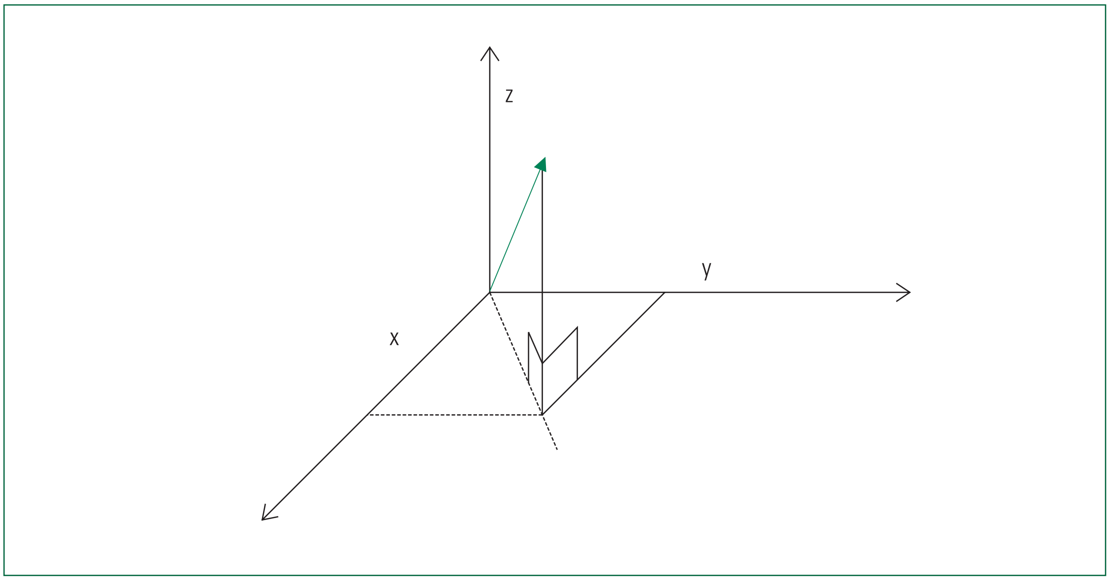
- A = (3, 4, 0) B = (3, 4, 1) C = (3, 4, –1)
- D = (1, 1, 1) E = (2, 2, 2) F = (3, 3, 3)
- G =(3, 0, –1) H = (4, 0, –1) I = (5, 0, –1)

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere al profesor o profesora que utilice medios físicos para que los estudiantes puedan visualizar estos puntos en el espacio y establecer la relación con su ubicación en cualquiera de los ocho octantes en que se divide el espacio.

Podría pegar cartulinas con cuadrículas en los muros que concurren en alguna de las esquinas de la sala de clases; así es más fácil distinguir los planos XY, XZ y ZY en cada uno de los muros y el octante positivo de los tres ejes de coordenadas.

También se pueden utilizar una escuadra, de modo que un cateto se quede sobre el plano XY con el ángulo recto en el punto (x, y); si uno de los otros vértices de la escuadra se ubica en el origen, el tercer vértice corresponderá a la coordenada (x, y, z); en esta ubicación, la hipotenusa de la escuadra corresponde al vector que se representa por una flecha con su origen en (0,0,0) y su extremo en (x,y,z).



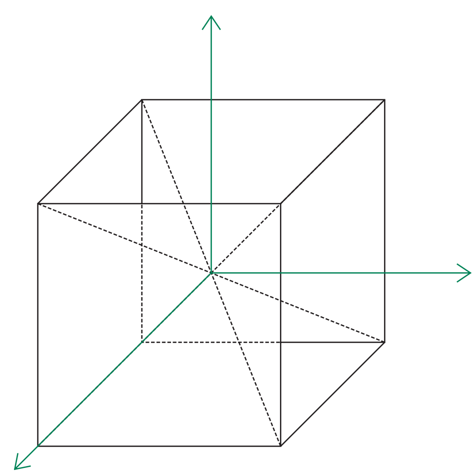
Ejemplo B

Definen un cubo en el espacio por medio de las coordenadas de los vértices.

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere motivar a los alumnos y alumnas para que ubiquen el cubo en diversas posiciones en relación con el origen.

Si el origen corresponde al centro del cubo, los estudiantes pueden visualizar los ocho octantes y tener un vértice en cada uno de ellos.



En cualquiera de los casos, es interesante observar las regularidades que presentan las coordenadas de los vértices de una misma cara, o bien, de caras paralelas.

Este ejemplo se puede complementar proponiendo dos vértices del cubo y pidiendo a los estudiantes que definan las coordenadas de los otros seis vértices; en este caso, hay variadas soluciones.

También se podría fijar la longitud de las aristas del cubo, o bien, ante un cubo ya definido, duplicar, por ejemplo, la longitud de sus aristas.

Lo importante es que los alumnos y alumnas se imaginen cuerpos en el espacio que ofrezcan alguna regularidad, que visualicen los ocho octantes y las coordenadas de sus vértices.

Ejemplo C

Considerando las coordenadas de los vértices de un cubo (pueden tomarse las del ejemplo anterior), determinar las nuevas coordenadas si se lo moviera 3 unidades hacia delante, 4 hacia la derecha y 2 hacia arriba.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario relacionar las traslaciones realizadas en el plano con estas en el espacio tridimensional y asociarles los vectores correspondientes. Este ejemplo permite utilizar la adición de vectores.

Es preferible trabajar con un modelo físico para visualizar el movimiento del cubo desde su posición inicial a la posición después de la traslación.

Se sugiere hacer traslaciones del cubo por uno de los planos de sus caras y anticipar qué cambios se producirían en las coordenadas y cuáles permanecerían constantes en ese caso.

Ejemplo D

Determinar qué traslación hay que aplicar a un cubo de coordenadas (1,1,0); (1,2,0) (2,1,0); (2,2,0); (1,1, –1); (1,2, –1) (2,1, –1); (2,2, –1); para obtener otro tal que dos de sus coordenadas sean (1, –1, 0) y (2, –1, 0).

INDICACIONES AL DOCENTE

Este es un ejemplo muy interesante por la variedad de soluciones que presenta.

Es un ejemplo que se puede relacionar con la resta de vectores en el espacio y generalizar la resta de vectores con dos dimensiones.

Ejemplo E

Ampliar el cubo del ejemplo anterior al doble de sus aristas.

INDICACIONES AL DOCENTE

Este es un ejemplo que permite darle sentido a la multiplicación por un escalar; relacionar este ejemplo en el espacio tridimensional con los ejemplos del plano.

Proponer otros ejemplos con escalares no enteros y con números menores que 1. Relacionar, además, con la semejanza de cuerpos regulares.

Ejemplo F

Resolver los siguientes ejercicios de cálculo vectorial:

I. (3,4,-5) – (–2,4,0) + 0,5 (0, –3,2) =

II. (–2, 3, 0) + 0,3 (2, –3, 0) =

¿Cómo se pueden caracterizar estos vectores?

III. Determinar los valores de x, y ,z sabiendo que (x, –4, 0) – 1,5 (x, –y, + 3) = – (2, 6, z)

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas desarrollen y utilicen sus destrezas para efectuar cálculos.

Actividad 3

Determinan la ecuación vectorial de la recta en el plano, la relacionan con la ecuación cartesiana de la misma y extienden a la ecuación vectorial de una recta en el espacio.

Ejemplo A

Versión 1

I. Graficar en el plano la recta L: y = x.

- Determinar qué tienen de común los vectores (o los puntos) que pertenecen a ella;
- seleccionar 7 de estos vectores y expresar cada uno de ellos como producto de un escalar por uno de los otros vectores;
- reconocer que expresiones de la forma $\vec{v}(t) = t(1,1)$ o bien $\vec{v}(t) = t(5,5)$ son ecuaciones vectoriales de la misma recta y que esta recta pasa por el origen.

II. En el mismo gráfico anterior, trazar la recta L' : y = x + 3.

- Reconocer el paralelismo gráfico entre ambas rectas y justificarlo desde la geometría analítica;
- marcar el punto (0,3) y cuatro puntos más de esta recta;
- expresar cada uno de estos cuatro puntos como suma entre el vector (0,3) y uno de los vectores de la recta L;
- reconocer que expresiones de la forma $\vec{v}(t) = (0,3) + t(1,1)$ u otras equivalentes son ecuaciones vectoriales de la recta L'; distinguir entre vector posición y vector dirección.

III. Generalizar la ecuación vectorial para cualquier recta que pasa por un punto cualquiera del plano y es paralela a una recta L, que pasa por el origen.

Versión 2

Considerar el vector (1,2) y todos los vectores que resulten de multiplicar éste por un número real. ¿Qué figura se obtiene?

Considerar la recta y = 3x, graficarla y obtener la ecuación vectorial siguiendo el procedimiento anterior.

Trasladar la recta y = 3x en el vector (0,3). ¿Qué figura se obtiene? Plantear la ecuación de la nueva figura.

Indicaciones al docente

Para introducir la ecuación vectorial de la recta se proponen dos formas diferentes y complementarias; en la versión 1 se parte de la ecuación analítica mientras que en la versión 2 se recurre a la ponderación de un vector por números reales.

En ambos casos se recurre a rectas que pasan por el origen como momento inicial y en un segundo momento se establece la ecuación vectorial de una recta paralela a la primera, generalizando para cualquier recta del plano.

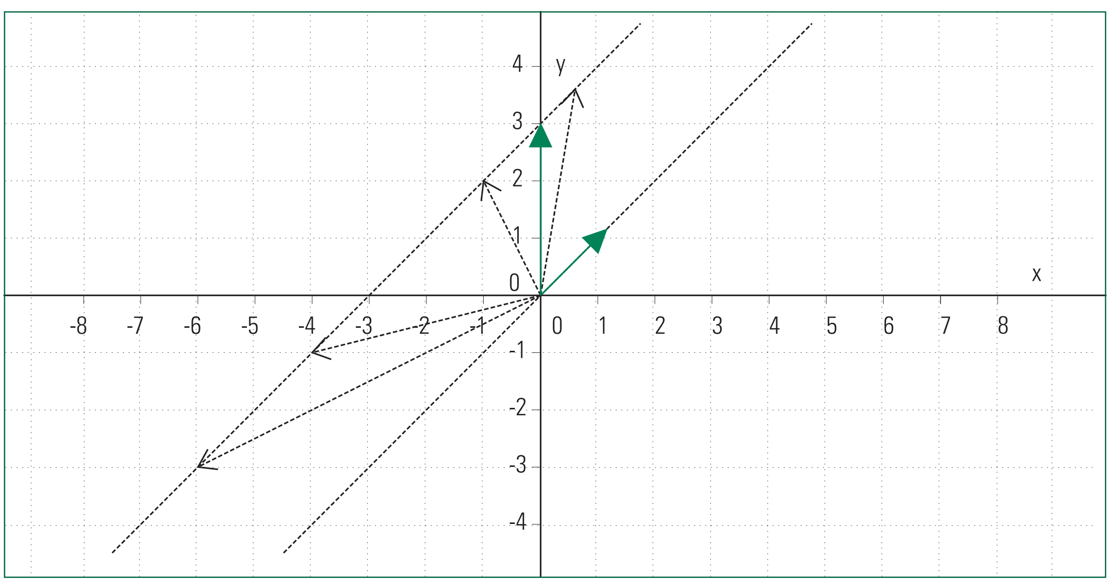
En la versión 2, los alumnos o alumnas pueden reconocer que se trata de una recta que pasa por el origen y por el punto (1,2) y que su ecuación vectorial es $\vec{v}(t) = t(1,2)$.

Interesa que los estudiantes lleguen a generalizar que todas las rectas que pasan por el origen se obtienen de esta manera y tienen este tipo de ecuación vectorial.

Al hacer la traslación de la recta, los alumnos y alumnas pueden constatar que se obtiene una recta que pasa por el punto (0,3) y que es paralela a la recta anterior. Con apoyo gráfico logran establecer que la ecuación vectorial de la nueva recta se obtiene sumando el vector (0,3), es decir, $\vec{v}(t) = (0,3) + t(1,2)$.

Es muy importante graficar las rectas, distinguir los vectores posición y dirección y mostrar, con algunos puntos de la recta, que éstos se pueden expresar como suma de los vectores posición y dirección.

Si se considera necesario, se puede constatar que todos los puntos de la recta $y = x + 3$ que se ubican a la derecha del eje *y* corresponden a la suma del vector (0,3) con el producto de un escalar positivo por el vector (1,1); además, que todos los puntos que están a la izquierda del eje *y* corresponden a la suma del mismo vector (0,3) con el producto de escalar negativo por el vector (1,1).

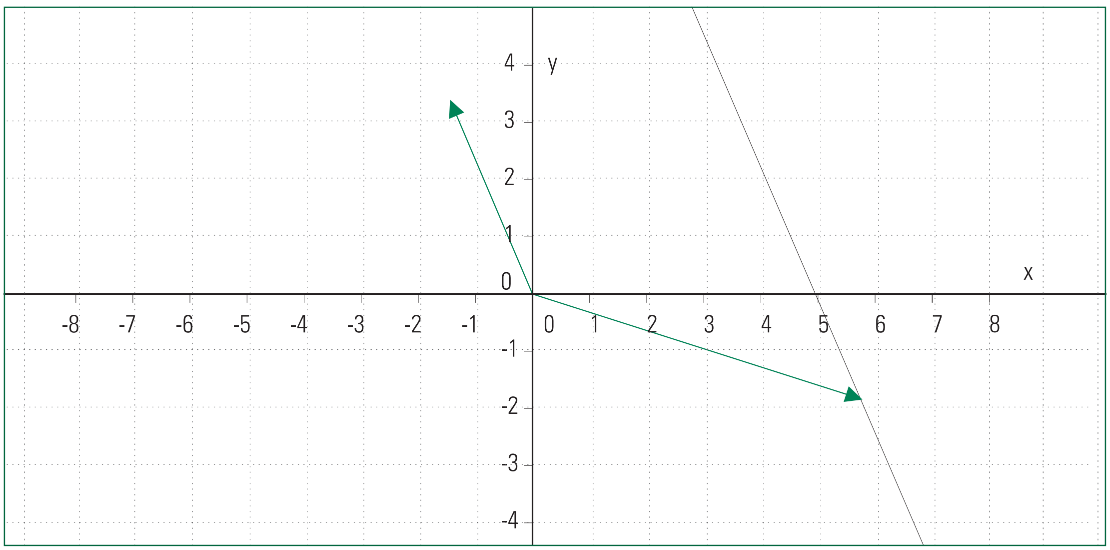


Ejemplo B

Establecer la ecuación vectorial y analítica de la recta que pasa por el punto (5, –2) y es paralela a la dirección del vector d = (–2, 3).

Indicaciones al docente

Es importante que los alumnos y alumnas grafiquen la recta en función de los vectores dados; la representación gráfica es un soporte para escribir la ecuación vectorial de la recta.



A partir del dibujo el profesor o profesora puede establecer la relación entre el vector dirección de la ecuación vectorial y la pendiente *m* de la ecuación analítica; $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{2}$. En consecuencia, la ecuación analítica de la recta es 2y = –3x + 11.

Ejemplo C

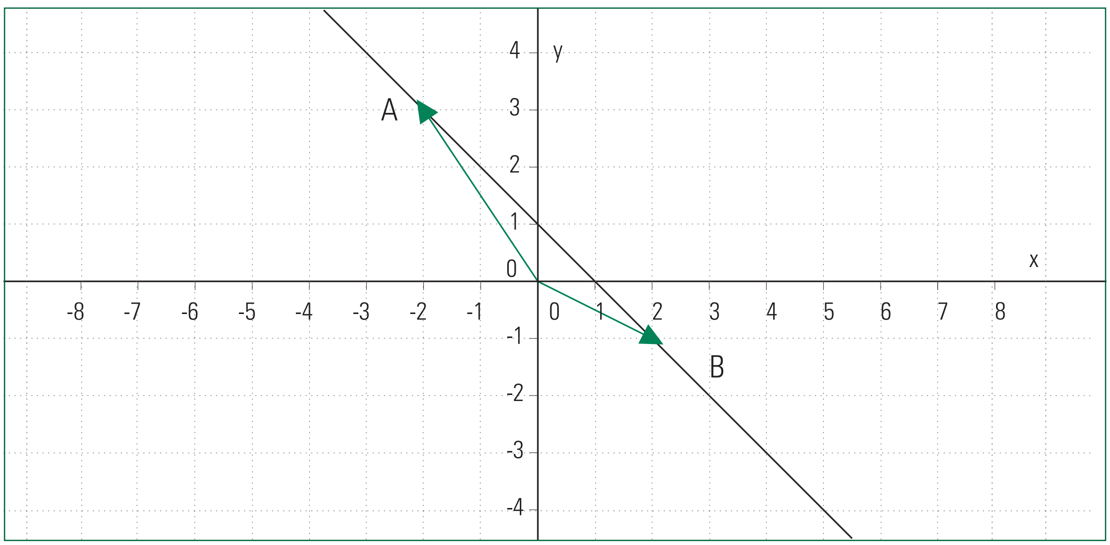
Establecer la ecuación vectorial de la recta que pasa por dos puntos dados:

A = (–2, 3); B = (2, –1).

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere dibujar un gráfico con los puntos dados y la correspondiente recta.

A partir de éste, los alumnos y alumnas deberán proponer un vector posición y determinar el vector dirección. Es necesario observar que este último está dado por la diferencia de los vectores que corresponden a los dos puntos dados.



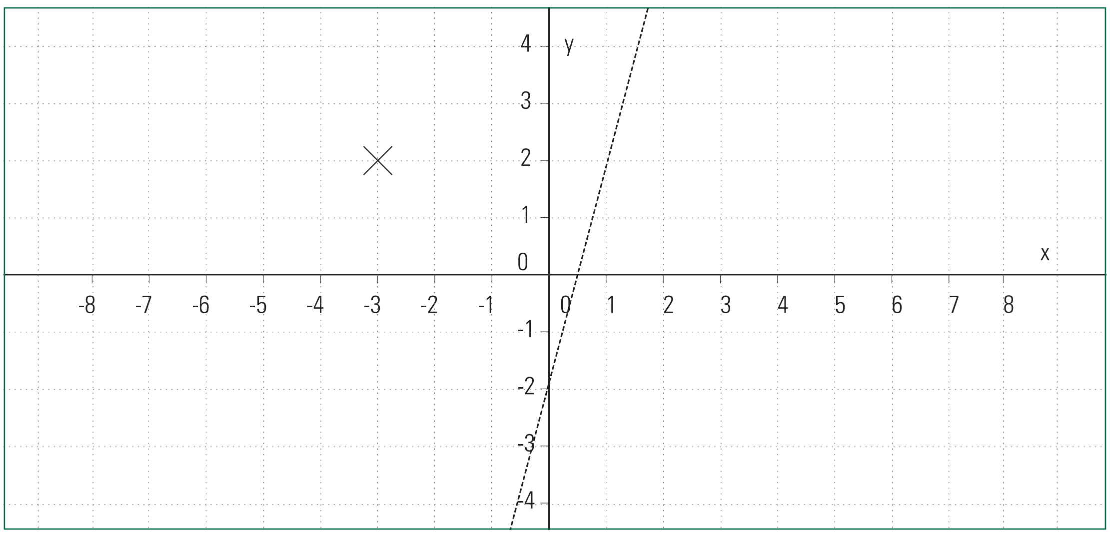
Conviene que los estudiantes constaten que es la misma recta si el vector dirección que se considere es A – B o bien, B – A.

Ejemplo D

- Establecer la ecuación analítica y vectorial de la recta que pasa por el punto A = (–3,2) y es paralela a la recta y = 3x – 2.
- Determinar si los puntos (0,0); (0,11); (– 3,0) pertenecen o no a esta recta.

INDICACIONES AL DOCENTE

Un gráfico que incluya la recta dada y el punto por el que pasa la recta pedida sirve de apoyo para definir el vector posición y el vector dirección y así establecer la ecuación vectorial y también la ecuación analítica de la misma.



Ejemplo E

Determinar la ecuación vectorial de una recta perpendicular a la recta.

$$\vec{v}\,(t) = (5, -3) + t(2,3).$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Con ayuda del gráfico los alumnos y alumnas pueden determinar un vector perpendicular al vector dirección de la recta, por ejemplo el vector (-3,2).

Se puede sacar conclusiones generales acerca de cómo obtener este vector y relacionar esto con las condiciones analíticas de perpendicularidad.

Es tan importante que los estudiantes establezcan relaciones entre el gráfico y las expresiones analíticas y vectoriales como que desarrollen una relativa fluidez en la ejercitación.

Ejemplo F

Versión 1

En un modelo físico ubicar los puntos (3, 3, 3); (5, 5, 5); (10, 10, 10); (15, 15, 15) u otros que tengan el mismo número en sus tres coordenadas.

I. ¿Qué tienen en común estos puntos en relación con su ubicación espacial?

II. Expresar cada uno de ellos como producto de un escalar por uno de los otros vectores.

III. Reconocer que expresiones de la forma

$$\vec{v}(t) = t(1,1,1) \text{ o bien } \vec{v}(t) = t(5,5,5)$$

son ecuaciones vectoriales de la recta que pasa por los puntos de la forma (t, t, t) con *t* en los reales.

IV. Generalizar a la ecuación vectorial de una recta en el espacio que pasa por el origen.

V. Generalizar la ecuación vectorial para una recta que pasa por un punto cualquiera del espacio y es paralela a una recta L que pasa por el origen.

Versión 2

I. Considerar un vector cualquiera, ponderarlo por escalares reales; escribir y reconocer lo que se obtiene.

II. Escribir la ecuación vectorial de una recta que pasa por el origen; comparar con el caso anterior.

III. Graficar esta recta y trasladarla según un vector. Comparar ambas rectas y escribir la ecuación de la segunda recta.

IV. Generalizar para la ecuación vectorial de cualquier recta en el espacio.

Indicaciones al docentes

Nuevamente, dos versiones complementarias de un ejemplo.

En esta extensión del modelo de ecuación de recta vectorial desde el plano al espacio tridimensional, para algunos estudiantes es indispensable el modelo físico que ayuda a ver la colinealidad de los puntos y darle sentido a lo algebraico; otros estudiantes, en cambio, podrán hacer la extensión a partir de lo algebraico ya trabajado en el plano.

Actividad 4

Conocen la ecuación vectorial y analítica de un plano en el espacio y consideran las condiciones de paralelismo entre planos.

Ejemplo A

I. Determinar valores para α y β, en la suma $\alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$ que permitan obtener los puntos (5,6); (0,9); (–9, 4); (–3, –7); (π, $-\pi$); y marcar estos puntos en un sistema de coordenadas.

II. ¿Existe algún punto del plano que no se pueda obtener por la suma $\alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$, si no hay restricciones para los valores de α y β?

III. Elegir otro par de vectores cualesquiera $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ del plano XY; analizar si la suma de la forma $\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2$ en que α y β toman cualquier valor numérico, permite obtener todos los puntos del plano. Establecer las restricciones para los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

INDICACIONES AL DOCENTE

En este primer ejemplo sólo se involucran vectores en el plano; interesa que, en esta primera instancia, los alumnos y alumnas lleguen a establecer en forma empírica que si α y β son parámetros reales, $\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 = \vec{v}$ es la ecuación vectorial del plano XY si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores del plano XY con la restricción que ambos vectores no estén en la misma recta.

Ejemplo B

I. Caracterizar el plano que se define por $\alpha\,(2,2,0) + \beta(0,0,1) = \vec{v}$ en que α y β son dos números cualesquiera.

II. Estudiar la suma $\alpha\,\vec{v} + \beta(0,0,1)$ para cualquier valor de α y β, en que *v* es un vector del espacio tridimensional; ¿qué se obtiene?

III. Generalizar la ecuación vectorial de planos que pasan por el origen: $\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 = \vec{v}$ en que, si α y β son parámetros reales, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores del espacio tridimensional; establecer la restricción para $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

INDICACIONES AL DOCENTE

Inicialmente, se sugiere proponer diversas ecuaciones de planos que pasan por alguno de los ejes del sistema de coordenadas tridimensional y, eventualmente, hacer el modelo físico correspondiente; la intención es que los alumnos y alumnas puedan, en cierta medida, constatar que realmente se pueden generar todos los puntos de ese plano, variando los valores numéricos de los escalares que ponderan los dos vectores elegidos.

A continuación, se propone establecer la ecuación de planos que pasan por el origen: $\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 = \vec{v}$ manteniendo la restricción que ambos vectores deben ser linealmente independientes.

Se sugiere proponer ecuaciones de planos que pasan por el origen y que los estudiantes los caractericen, así como a la inversa, proponer planos específicos y que los estudiantes determinen la correspondiente ecuación, manteniendo la condición que sean planos que pasan por el origen.

Ejemplo C

Situar un cubo con un vértice en el origen, de modo que las aristas se ubiquen sobre los ejes X, Y, Z. Determinar las ecuaciones vectorial y analítica de los planos portadores de sus caras y de las rectas portadoras de sus aristas.

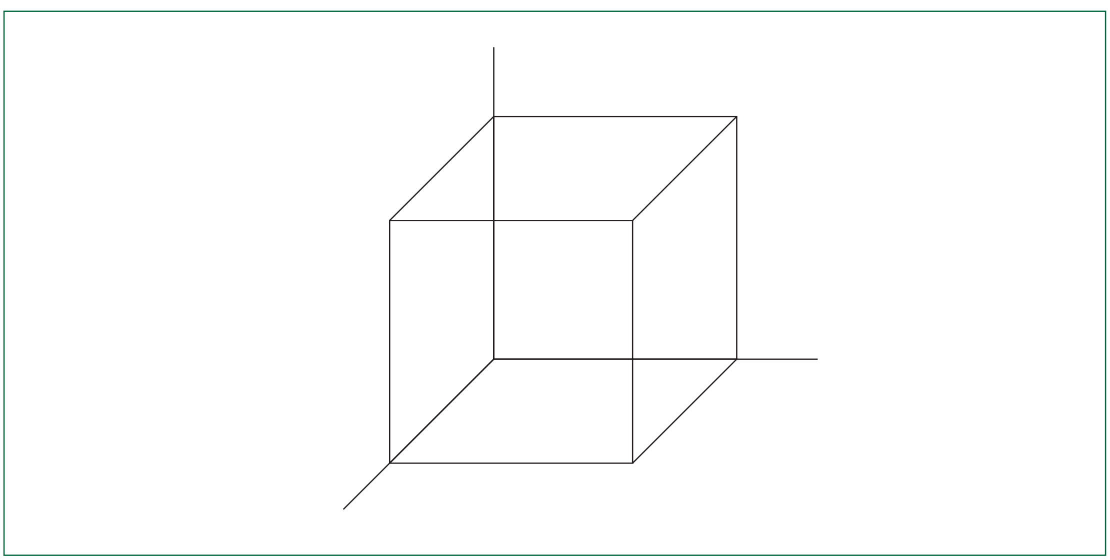
INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante comentar con los estudiantes que las ecuaciones de los planos portadores de las caras, suponiendo una arista de longitud igual a 1, en su forma analítica son

$$x = 0;\ x = 1;\ y = 0;\ y = 1;\ z = 0;\ z = 1.$$

Es importante destacar y conversar con los estudiantes que estas expresiones podrían tener otra interpretación en otro contexto:
$x = 0$ en el plano XY corresponde al eje y;
$x = 1$, en el mismo plano, es la recta paralela al eje y que pasa por el punto (0,1).

En su expresión vectorial, tres de los planos pedidos pasan por el origen; los otros tres son planos trasladados en un vector ya conocido.



De este modo, el plano portador de la cara anterior se puede anotar como:
$(x,y,z) = (1, 0, 0) + \alpha(0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0)$ paralelo al plano YZ cuya ecuación es
$(x, y, z) = \alpha(0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0)$.

Ejemplo D

Determinar la ecuación analítica y vectorial del plano que interesecta a los ejes del sistema de coordenadas en los puntos (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1).

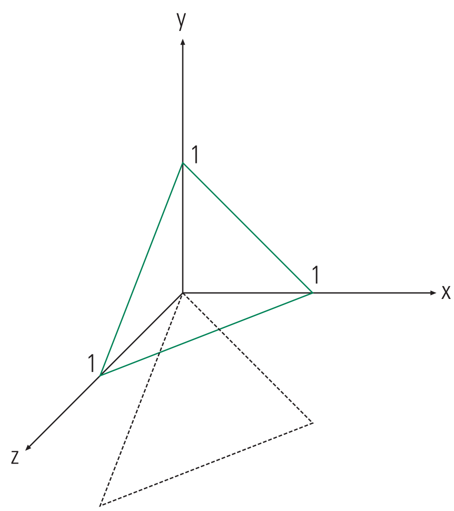
INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere representar físicamente este plano en el primer octante y visualizar que se extiende infinitamente por los octantes contiguos.

Se pueden trabajar en paralelo las ecuaciones vectorial y analítica o bien, primero lo vectorial y después lo analítico.

Para determinar su ecuación vectorial se puede trasladar este plano en el vector –1(0,0,1).

Con esta traslación los puntos de intersección (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1) se trasladan a las ubicaciones (1, 0, –1); (0, 1, –1); (0, 0, 0), lo que permite establecer la ecuación de este plano que pasa por el origen.



De acuerdo a esta representación, si *a* y *b* son parámetros reales

$$(x, y, z) = \alpha\,(1, 0, -1) + \beta\,(0, 1, -1)$$

es la ecuación vectorial del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano que intersecta a los ejes X, Y, Z en los puntos (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1).

Y, en consecuencia,

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \alpha\,(1, 0, -1) + \beta\,(0, 1, -1)$$

es la ecuación vectorial del plano pedido.

Para continuar con el análisis vectorial y profundizar en el tema, se puede analizar una ecuación como la siguiente:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha\,(1, 0, -1) + \beta\,(0, 1, -1)$$

Se podría llegar a generalizar que

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \alpha\,(1, 0, -1) + \beta\,(0, 1, -1)$$

son todos los planos que pasan por el punto (a, b, c) paralelos al plano que intersecta a los ejes X, Y, Z en los puntos que tienen una distancia 1 desde el origen.

Desde el punto de vista analítico, en relación con el plano que intesecta los tres ejes a una distancia 1 del origen, apoyándose en lo vectorial ya estudiado,

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \alpha\,(1, 0, -1) + \beta\,(0, 1, -1)$$

se puede anotar: $x = \alpha$; $y = \beta$; $z = 1 - \alpha - \beta$

de donde $x + y + z = 1$ es la ecuación analítica del plano pedido.

En forma similar, se pueden analizar otros planos paralelos.

Así se puede obtener que

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha\,(1, 0, -1) + \beta\,(0, 1, -1)$$

es la ecuación vectorial en tanto que

$$x + y + z = 6$$

es la ecuación analítica del mismo plano.

Asimismo, se puede pedir que conjeturen sobre expresiones analíticas de la forma

$$x + y + z = k$$

Actividad 5

Visualizan el cuerpo que se genera por traslación o rotación de una figura geométrica, lo caracterizan y calculan sus volúmenes y áreas.

Ejemplo A

Suponer un cuadrado con uno de sus vértices en el origen, con dos de sus lados sobre los ejes de coordenadas y con una arista de 4 unidades de longitud.

I. ¿Qué se genera al trasladar este cuadrado por un vector (0, 0, 4)?

II. ¿Cuál es el volumen de este cuerpo?

III. ¿Cuál es el área total del cuerpo generado?

IV. Variar la posición del cuadrado de modo que se ubique centrado en el origen; calcular el volumen y el área total del cuerpo que se genera por la traslación por el vector (0, 0, –4).

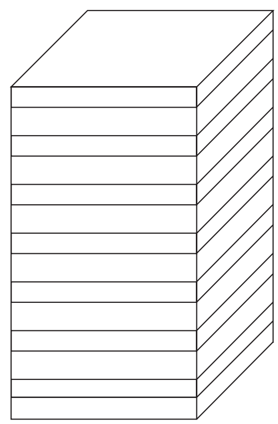
V. Comparar con el caso anterior; establecer diferencias y semejanzas.

VI. Si el vector traslación fuera (0, 0, –8), ¿qué cuerpo se generaría y cuánto sería su volumen?

VII. ¿Cuál debiera ser el vector traslación que se aplique a este cuadrado para generar un paralelepípedo que tenga un volumen igual a 1000 unidades cúbicas?

Indicaciones al docente

Se sugiere utilizar numerosos cuadrados congruentes apilados, para dar una imagen del cuerpo que se genera por traslación perpendicular de un cuadrado al plano que lo contiene.



Se puede complementar este ejemplo generando cuerpos por la traslación de diferentes polígonos en la dirección perpendicular al plano que los contiene. Se puede ampliar a polígonos irregulares.

Se pueden comparar volúmenes y áreas.

Es conveniente considerar la circunferencia como un caso interesante de analizar.

Ejemplo B

Imaginar que un rectángulo de lados 4 cm y 6 cm gira en torno a su lado menor:

I. Visualizar el sólido que se genera.

II. Calcular su volumen.

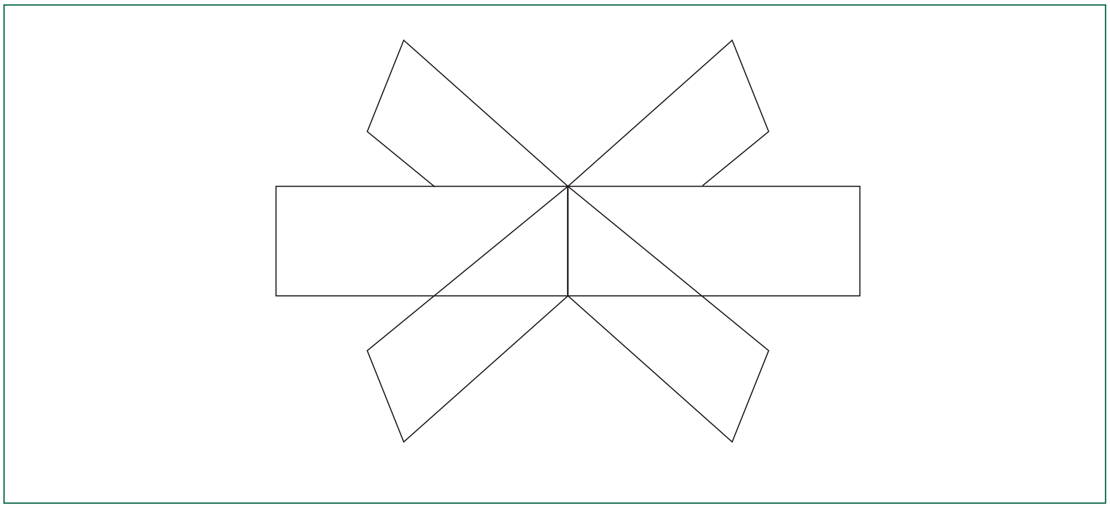
III. Comparar con el volumen del sólido que se obtiene si la rotación se hiciera en torno al lado mayor.

IV. Calcular las áreas de ambos sólidos.

V. Determinar las condiciones que debe satisfacer un rectángulo para que el volumen del sólido generado por rotación en torno a uno de sus lados sea igual al doble del volumen del sólido que se genera al rotar sobre el otro lado.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario que los alumnos y alumnas imaginen la rotación del rectángulo y puedan visualizar el cuerpo que se genera. Puede ser necesario apoyar esta visualización con material concreto. Por ejemplo, recortar unos diez o más rectángulos congruentes y ubicarlos radialmente en torno al lado que se constituye en eje de rotación, como lo indica el dibujo siguiente:



También es posible generar el movimiento sobre un rectángulo u otra figura a partir de una construcción artesanal con una plataforma que gira por la acción de un pequeño motor; un dispositivo de este tipo permite visualizar bien los cuerpos que se pueden generar por rotación.

Este ejemplo se puede complementar considerando otros polígonos. Parece aconsejable considerar ejes de rotación externos a la figura geométrica que rota, sólo para visualizar el cuerpo que se genera sin hacer cálculos de sus volúmenes ni de sus áreas.

Ejemplo C

Comparan entre el tipo de cuerpo que se genera por rotación con el que se puede generar por traslación.

I. ¿Se puede generar un cono por traslación?

II. ¿Se puede generar un cilindro por traslación?

III. ¿Cómo se puede generar un cubo?

IV. ¿Se puede generar una pirámide por traslación, por rotación?

Indicaciones al docente

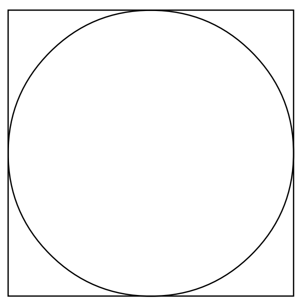
Los alumnos y alumnas podrían llegar a ordenar sus conclusiones en una tabla como la siguiente:

	Rotación	**Traslación**
Es posible	cilindro	prisma, cubo
	cono	cilindro
No es posible	prisma, cubo	pirámide
	pirámide	cono

En los casos en que es posible generar la figura, será interesante indicar qué figura plana lo posibilita.

Ejemplo D

Considerar una circunferencia inscrita en un cuadrado, como lo indica el dibujo que sigue:



I. Describir qué cuerpos se generan si ambas figuras rotan solidariamente en torno a una de las rectas que une los puntos medios de los lados opuestos del cuadrado.

II. Describir qué cuerpos se generan si ambas figuras se trasladan por un vector (0, 0, a) en que *a* es la medida del lado del cuadrado.

III. Calcular, en cada caso, la diferencia de volumen entre ambos cuerpos.

Indicaciones al docente

Interesa que los estudiantes visualicen los cuerpos que se forman y puedan hacer los cálculos correspondientes; es posible que algunos aún necesiten considerar medidas numéricas para el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia.

Se puede enriquecer este ejemplo e incrementar su dificultad incorporando las razones entre los volúmenes de un cuerpo contenido en otro. Esto se puede contextualizar en el diseño de objetos como una alcuza, por ejemplo, que contenga aceite y vinagre, en sendos depósitos separados, pero contenido uno dentro del otro; según estimaciones, los usuarios consumen aceite y vinagre en una razón de 4:1.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Calculan sumas y diferencias de vectores en el plano y en el espacio; determinan el producto de un escalar por un vector.

Ejemplo A

Calcular y representar en un sistema de coordenadas:

(2, –3) + (5, 0) =

(0, 0) – 3 (–1, 0) =

(a, b) + (3, c) =

(a, 3, b) – (2, –3, -b) =

Observar si establecen la relación entre la operatoria algebraica, que no ofrece gran dificultad, con la representación gráfica de la suma o diferencia.

Ejemplo B

Considerar los vectores (2,4); (3, 9); (6, 36); ($\frac{1}{2}$, 1); (7,14).

Seleccionar los pares de vectores tales que uno se puede expresar como producto del otro vector por un escalar.

Observar si averiguan en forma mental o por cálculos escritos los escalares que permiten transformar un vector en otro.

Ejemplo C

Proponer tres vectores del espacio tales que cada uno se pueda expresar como ponderados de los otros dos. Escribir los seis casos que resultan.

Observar la manera de generar los tres vectores; si optaran por generarlos a partir de uno que ponderan por número enteros, ¿qué dificultades se observan al escribir los seis casos que resultan?

Actividad 2

Determinan la ecuación vectorial de la recta en el plano y en el espacio.

Ejemplo A

Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (3, –3) y es paralela al vector (5, 0).

Observar si la solución es desde lo algebraico y si distinguen el vector posición del vector dirección y los utilizan adecuadamente para proponer la ecuación; o bien, si recurren al gráfico para resolverlo.

Ejemplo B

Escribir la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (0,0) y es paralela a la recta $x + y = 1$.

Observar si recurren a un gráfico para resolver el problema, o bien, identifican desde la expresión algebraica que se trata de expresar vectorialmente la recta $x + y= 0$.

Ejemplo C

a) Escribir la ecuación vectorial de la recta $y = 3x$.

b) Escribir la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos (0,1) y (0,3).

c) Determinar tres puntos que pertenezcan a la recta $\vec{v}(t) = (4, -2) + t(4,-2)$ con *t* real.

d) Escribir la ecuación de una recta que pasa por el punto (3,3) y es paralela a la recta $y = 2x - 4$.

Observar si recurren a un gráfico a mano alzada para identificar las rectas y las condiciones planteadas o si sólo les basta la información de la expresión algebraica.

Bibliografía

Berlanga, Ricardo; Bosch, Carlos; Rivaud, Juan José (1999). *La matemática, el perejil de todas las salsas. Ciencia para todos*. Fondo de Cultura Económica. México.

Chevallard, Yves; Bosch, Mariana; Gascon, Joep (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Editorial Síntesis. España.

De Guzmán, Miguel; Colera, José (1989). *Matemática I COU*. Anaya. España.

De Guzmán, Miguel; Colera, José (1989). *Matemática II COU*. Anaya. España.

De la Peña, José Antonio (1999). *Álgebra en todas partes. Ciencia para todos*. Fondo de Cultura Económica. México.

Guillen, Michael (1995). *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo*. Temas de debate. España.

Paulos, John Allen (1999). *Érase una vez un número*. Libros para pensar la ciencia. España.

Paulos, John Allen (1997). *El hombre anumérico*. Libros para pensar la ciencia. España.

Paulos, John Allen (1998). *Más allá de los números*. Libros para pensar la ciencia. España.

Perry, Patricia y otros (1996). *Matemáticas, Azar, Sociedad*. Conceptos básicos de estadística. Grupo Editorial Iberoamérica. Colombia.

Peterson, Ivars (1991). *El turista matemático*. Alianza Editorial. España.

Stewart, Ian (1996). *Juega Dios a los dados*, Grijalbo Mandadori. España.

Stewart, Ian (1998). *De aquí al infinito*. Drakontos. España.

Graficadores en internet
http://www.mfsoft.com/equationgrapher/
http://graphmataica.com/

Sitios en internet
(Es posible que algunas direcciones hayan dejado de existir o se modifiquen después de la publicación de este programa).

http://www.enlaces.cl
http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa
http://www.dim.uchile.cl/
http://www.nalejandria.com/forms/matemas.htm
http://www.mat.puc.cl/ socmat
http://rsme.uned.es
http://fermat.usach.cl/ somachi/index.html
http://roble.pntic.mec.es/ jcamara/websup1.htm
httpo://nti.educa.rcanaria.es/usr/matematicas
http:/members.xoom.com/pmatematicas
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/
http://www.redemat.com

Objetivos Fundamentales y
Contenidos Mínimos Obligatorios
Primer a Cuarto Año Medio

Matemática

Objetivos Fundamentales

1º

Primer Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la proporcionalidad, del lenguaje algebraico inicial y de la congruencia de figuras planas.
2. Analizar aspectos cuantitativos y relaciones geométricas presentes en la vida cotidiana y en el mundo de las ciencias; describir y analizar situaciones, con precisión.
3. Utilizar diferentes tipos de números en diversas formas de expresión (entera, decimal, fraccionaria, porcentual) para cuantificar situaciones y resolver problemas.
4. Resolver problemas seleccionando secuencias adecuadas de operaciones y métodos de cálculo, incluyendo una sistematización del método ensayo-error; analizar la pertinencia de los datos y soluciones.
5. Percibir la matemática como una disciplina en evolución y desarrollo permanente.
6. Representar información cuantitativa a través de gráficos y esquemas; analizar invariantes relativas a desplazamientos y cambios de ubicación utilizando el dibujo geométrico.

2º

Segundo Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la ecuación de la recta, sistemas de ecuaciones lineales, semejanza de figuras planas y nociones de probabilidad; iniciándose en el reconocimiento y aplicación de modelos matemáticos.
2. Analizar experimentos aleatorios e investigar sobre las probabilidades en juegos de azar sencillos, estableciendo las diferencias entre los fenómenos aleatorios y los deterministas.
3. Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.
4. Percibir la relación de la matemática con otros ámbitos del saber.
5. Analizar invariantes relativas a cambios de ubicación y ampliación o reducción a escala, utilizando el dibujo geométrico.

3º

Tercer Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de los sistemas de inecuaciones, de la función cuadrática, de nociones de trigonometría en el triángulo rectángulo y de variable aleatoria, mejorando en rigor y precisión la capacidad de análisis, de formulación, verificación o refutación de conjeturas.
2. Analizar información cuantitativa presente en los medios de comunicación y establecer relaciones entre estadística y probabilidades.
3. Aplicar y ajustar modelos matemáticos para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.
4. Resolver desafíos con grado de dificultad creciente, valorando sus propias capacidades.
5. Percibir la matemática como una disciplina que recoge y busca respuestas a desafíos propios o que provienen de otros ámbitos.

4º

Cuarto Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de rectas y planos en el espacio, de volúmenes generados por rotaciones o traslaciones de figuras planas; visualizar y representar objetos del espacio tridimensional.
2. Analizar informaciones de tipo estadístico presente en los medios de comunicación; percibir las dicotomías, determinista-aleatorio, finito-infinito, discreto-continuo.
3. Aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos al análisis de situaciones y a la resolución de problemas.
4. Reconocer y analizar las propias aproximaciones a la resolución de problemas matemáticos y perseverar en la sistematización y búsqueda de formas de resolución.
5. Percibir la matemática como una disciplina que ha evolucionado y que continua desarrollándose, respondiendo a veces a la necesidad de resolver problemas prácticos, pero también planteándose problemas propios, a menudo por el sólo placer intelectual o estético.

Contenidos Mínimos Obligatorios

1º Primer Año Medio

I. Números y Proporcionalidad

1. Números

a. Distinción entre números racionales e irracionales. Aproximación y estimación de números irracionales. Estimaciones de cálculos, redondeos. Construcción de decimales no periódicos. Distinción entre una aproximación y un número exacto.

b. Análisis de la significación de las cifras en la resolución de problemas. Conocimiento sobre las limitaciones de las calculadoras en relación con truncar y aproximar decimales.

c. Resolución de desafíos y problemas numéricos, tales como cuadrados mágicos o cálculos orientados a la identificación de regularidades numéricas.

d. Comentario histórico sobre la invención del cero, de los números negativos y de los decimales.

e. Potencias de base positiva y exponente entero. Multiplicación de potencias.

2. Proporcionalidad

a. Noción de variable. Análisis y descripción de fenómenos y situaciones que ilustren la idea de variabilidad. Tablas y gráficos.

b. Proporcionalidad directa e inversa. Constante de proporcionalidad. Gráfico cartesiano asociado a la proporcionalidad directa e inversa (primer cuadrante).

c. Porcentaje. Lectura e interpretación de información científica y publicitaria que involucre porcentaje. Análisis de indicadores económicos y sociales. Planteo y resolución de problemas que perfilen el aspecto multi-

2º Segundo Año Medio

I. Algebra y Funciones

1. Lenguaje algebraico

a. Expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador). Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples.

b. Relación entre la operatoria con fracciones y la operatoria con expresiones fraccionarias.

c. Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números.

d. Potencias con exponente entero. Multiplicación y división de potencias. Uso de paréntesis.

2. Funciones

a. Representación, análisis y resolución de problemas contextualizados en situaciones como la asignación de precios por tramos de consumo, por ejemplo, de agua, luz, gas, etc. Variables dependientes e independientes. Función parte entera. Gráfico de la función.

b. Evolución del pensamiento geométrico durante los siglos XVI y XVII; aporte de René Descartes al desarrollo de la relación entre álgebra y geometría.

c. Ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y del intercepto con el eje de las ordenadas. Condición de paralelismo y de perpendicularidad.

d. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Gráfico de las rectas. Planteo y resolución de problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones. Análisis y pertinencia de las soluciones.

3º Tercer Año Medio

I. Algebra y Funciones

1. Algebra

a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cuociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.

b. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita. Intervalos en los números reales. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.

2. Funciones

a. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:

$y = x^2$

$y = x^2 \pm a,\ a > 0$

$y = (x \pm a)^{2,\ a>0}$

$y = ax^2 + bx + c$

Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x. Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.

4º Cuarto Año Medio

I. Algebra y Funciones

a. Función potencia: $y = a\,x^n$, $a > 0$, para $n = 2, 3$ y 4, y su gráfico correspondiente. Análisis del gráfico de la función potencia y su comportamiento para distintos valores de a.

b. Funciones logarítmica y exponencial, sus gráficos correspondientes. Modelación de fenómenos naturales y/o sociales a través de esas funciones. Análisis de las expresiones algebraicas y gráficas de las funciones logarítmica y exponencial. Historia de los logaritmos; de las tablas a las calculadoras.

c. Análisis y comparación de tasas de crecimiento. Crecimiento aritmético y geométrico. Plantear y resolver problemas sencillos que involucren el cálculo de interés compuesto.

d. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.

plicativo del porcentaje. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Relación entre porcentaje, números decimales y fracciones.

d. Planteo y resolución de problemas que involucren proporciones directa e inversa. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Construcción de tablas y gráficos asociados a problemas de proporcionalidad directa e inversa. Resolución de ecuaciones con proporciones.

e. Relación entre las tablas, los gráficos y la expresión algebraica de la proporcionalidad directa e inversa. Relación entre la proporcionalidad directa y cuocientes constantes y entre la proporcionalidad inversa y productos constantes.

II. Algebra y Funciones

a. Sentido, notación y uso de las letras en el lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas no fraccionarias y su operatoria. Múltiplos, factores, divisibilidad. Transformación de expresiones algebraicas por eliminación de paréntesis, por reducción de términos semejantes y por factorización. Cálculo de productos, factorizaciones y productos notables.

b. Análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la incidencia de la variación de los elementos lineales y viceversa.

c. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis.

d. Comentario histórico sobre la evolución del lenguaje algebraico.

e. Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad. Interpretación geométrica de los productos notables.

f. Ecuación de primer grado. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de los datos, las soluciones y su pertinencia.

Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.

e. Función valor absoluto; gráfico de esta función. Interpretación del valor absoluto como expresión de distancia en la recta real.

f. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

a. Semejanza de figuras planas. Criterios de semejanza. Dibujo a escala en diversos contextos.

b. Teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada. Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales. Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones.

c. Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales. Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos. Presencia de la geometría en expresiones artísticas; por ejemplo, la razón áurea.

d. Angulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia. Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos.

e. Uso de algún programa computacional geométrico que permita medir ángulos, y ampliar y reducir figuras.

---

b. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x, deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = |x|$. Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentario sobre el Teorema de Fermat.

c. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

a. Demostración de los Teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.

b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.

III. Estadística y Probabilidad

a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.

b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.

c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.

II. Geometría

a. Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.

b. Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Angulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.

III. Estadística y Probabilidad

a. Graficación e interpretación de datos estadísticos provenientes de diversos contextos. Crítica del uso de ciertos descriptores utilizados en distintas informaciones.

b. Selección de diversas formas de organizar, presentar y sintetizar un conjunto de datos. Ventajas y desventajas. Comentario histórico sobre los orígenes de la estadística.

c. Uso de planilla de cálculo para análisis estadístico y para construcción de tablas y gráficos.

d. Muestra al azar, considerando situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, ecología, salud pública, control de calidad, juegos de azar, etc. Inferencias a partir de distintos tipos de muestra.

III. Geometría

1. Congruencia

a. Congruencia de dos figuras planas. Criterios de congruencia de triángulos.

b. Resolución de problemas relativos a congruencia de trazos, ángulos y triángulos. Resolución de problemas relativos a polígonos, descomposición en figuras elementales congruentes o puzzles con figuras geométricas.

c. Demostración de propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, relacionadas con congruencia. Aporte de Euclides al desarrollo de la Geometría.

2. Transformaciones

a. Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. Construcción de figuras por traslación, por simetría y por rotación en 60, 90, 120 y 180 grados.

   Traslación y simetrías de figuras en sistemas de coordenadas.

b. Análisis de la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos. Aplicaciones de las transformaciones geométricas en las artes, por ejemplo, M.C. Escher.

c. Clasificación de triángulos y cuadriláteros considerando sus ejes y centros de simetría.

d. Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas.

III. Estadística y Probabilidad

a. Juegos de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos. Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad.

b. La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.

c. Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el triángulo de Pascal. Interpretaciones combinatorias.

"...haz capaz a tu escuela de todo lo grande que pasa o ha pasado por el mundo."

Gabriela Mistral

EDUCACION Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

www.mineduc.cl

Matemática Cuarto Año Medio