Educación Media Formación General

3

# Matemática

Programa de Estudio
Tercer Año Medio

EDUCACION
Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

# Matemática

## Programa de Estudio
## Tercer Año Medio

EDUCACION
Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Matemática
Programa de Estudio, Tercer Año Medio, Formación General
Educación Media, Unidad de Curriculum y Evaluación
ISBN 956-7933-56-1
Registro de Propiedad Intelectual Nº 116.760
Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
www.mineduc.cl
Priemera Edición 2000
Segunda Edición 2004

Santiago, octubre de 2000

Estimados profesores:

El presente programa de estudio de Tercer Año Medio de la Formación General ha sido elaborado por la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación y aprobado por el Consejo Superior de Educación, para ser puesto en práctica, por los establecimientos que elijan aplicarlo, en el año escolar del 2001.

En sus objetivos, contenidos y actividades busca responder a un doble propósito: articular a lo largo del año una experiencia de aprendizaje acorde con las definiciones del marco curricular de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media, definido en el Decreto N°220, de mayo de 1998, y ofrecer la mejor herramienta de apoyo a la profesora o profesor que hará posible su puesta en práctica.

Los nuevos programas para Tercer Año Medio de la Formación General plantean objetivos de aprendizaje de mayor nivel que los del pasado, porque la vida futura, tanto a nivel de las personas como del país, establece mayores requerimientos formativos. A la vez, ofrecen descripciones detalladas de los caminos pedagógicos para llegar a estas metas más altas. Así, al igual que en el caso de los programas del nivel precedente, los correspondientes al Tercer Año Medio incluyen numerosas actividades y ejemplos de trabajo con alumnos y alumnas, consistentes en experiencias concretas, realizables e íntimamente ligadas al logro de los aprendizajes esperados. Su multiplicidad busca enriquecer y abrir posibilidades, no recargar ni rigidizar; en múltiples puntos requieren que la profesora o el profesor discierna y opte por lo que es más adecuado al contexto, momento y características de sus alumnos y alumnas.

Los nuevos programas son una invitación a los docentes de Tercer Año Medio para ejecutar una nueva obra, que sin su concurso no es realizable. Estos programas demandan cambios importantes en las prácticas docentes. Ello constituye un desafío grande, de preparación y estudio, de fe en la vocación formadora, y de rigor en la gradual puesta en práctica de lo nuevo. Lo que importa en el momento inicial es la aceptación del desafío y la confianza en los resultados del trabajo hecho con cariño y profesionalismo.

Mariana Aylwin

MARIANA AYLWIN OYARZUN
Ministra de Educación

# Presentación

El programa de estudio para Tercer Año Medio continúa con el proceso de construcción y adquisición de habilidades intelectuales, en especial las relativas a procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos.

Para modelar problemas y situaciones en que las funciones lineales estudiadas en Segundo Año Medio son insuficientes, se estudian las funciones cuadráticas, considerando su representación gráfica, la relación entre estas representaciones y los parámetros en su expresión algebraica, el tipo de crecimiento que modela y las soluciones de la ecuación que se le pueden asociar.

Con el propósito de representar o modelar algunas situaciones de comparación, se estudian las inecuaciones y los sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita, enfatizando el tipo de solución que se obtiene y estableciendo la diferencia con las ecuaciones ya estudiadas en los años anteriores.

El tema de funciones se amplía con el inicio del estudio de las funciones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos rectángulos. En Cuarto Año Medio, se continuará con el estudio de las funciones exponencial, logarítmica y potencia.

Además, este año se amplía y profundiza el tema de las probabilidades iniciado en Segundo Año Medio, incorporando el estudio de experiencias aleatorias con resultados no equiprobables y la aproximación intuitiva a la Ley de los Grandes Números.

## Organización del programa

Este programa se estructura, en concordancia con los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, en las cuatro unidades siguientes:

- Unidad 1 **Las funciones cuadrática y raíz cuadrada**
- Unidad 2 **Inecuaciones lineales**
- Unidad 3 **Más sobre triángulos rectángulos**
- Unidad 4 **Otro paso en el estudio de las probabilidades**

En la elaboración de este programa se ha tenido especial cuidado de poner relevancia, en las instancias que se han considerado oportunas, las relaciones entre los temas ya estudiados en los años anteriores y los que se desarrollan durante este Tercer Año, los que, a su vez, son base para los que se estudiarán en Cuarto Año Medio.

En este sentido es interesante hacer notar que el tema de la primera unidad, Las funciones cuadrática y raíz cuadrada, se relaciona con todo el estudio sobre la función -lineal, afín, valor absoluto, parte entera- realizado en los años anteriores y las que se estudiarán en Cuarto Año Medio.

La segunda unidad, Inecuaciones lineales, está fuertemente relacionada con la resolución de ecuaciones con una incógnita en primer grado y, sin lugar a dudas, con el manejo de una operatoria algebraica básica.

La unidad Más sobre triángulos rectángulos, centrada en la semejanza entre triángulos rectángulos, es una prolongación del trabajo desarrollado en Primero y Segundo

Año sobre isometrías y semejanza y un primer paso hacia el estudio de la trigonometría, tema en el que nuevamente se encuentran las funciones.

Finalmente, la unidad Otro paso en el estudio de las probabilidades, se basa en lo estudiado en Segundo Año, para profundizar y ampliar el estudio sobre fenómenos aleatorios y abrir la posibilidad de trabajar nociones sobre estadística inferencial en Cuarto Año de Enseñanza Media.

En el desarrollo de estas unidades se sugiere incorporar, en la medida que se considere necesario, nociones básicas sobre conjuntos; su lenguaje contribuye a explicitar y graficar las soluciones de inecuaciones y a una mejor comprensión de probabilidades.

## Organización interna de cada unidad

Cada unidad, en forma similar a los programas de Primero y Segundo Año Medio, se estructura considerando los siguientes puntos:

- Contenidos
- Aprendizajes esperados
- Orientaciones didácticas
- Actividades para el aprendizaje complementadas con ejemplos
- Actividades para la evaluación y ejemplos

A continuación se plantea una breve descripción de cada uno de estos elementos.

### Contenidos

Los contenidos corresponden a los señalados en el marco curricular. Con el propósito de enfatizar y/o clarificar algunos de ellos se han desglosado en contenidos más específicos.

Es necesario dejar establecido que la palabra contenidos, en este enfoque curricular, incorpora lo conceptual y procedimental; el desarrollo de habilidades, disposiciones y actitudes.

### Aprendizajes esperados

Expresan las capacidades y competencias que se busca que los alumnos y alumnas logren, considerando los contenidos de cada unidad y los objetivos fundamentales para el año escolar. Su número es variable por unidad.

Los aprendizajes esperados orientan el proceso pedagógico y dan una dirección al proceso de aprendizaje. En consecuencia, son determinantes para definir los criterios de evaluación.

### Orientaciones didácticas

En este punto se precisan los focos de la unidad; se incorporan comentarios pedagógicos relativos al aprendizaje del tema y sus relaciones intramatemáticas.

### Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Las actividades explicitan acciones y procesos que importa e interesa que vivan los alumnos y las alumnas para el logro de los aprendizajes esperados. No existe una correspondencia biunívoca entre los aprendizajes esperados y las actividades; una actividad puede estar al servicio de varios aprendizajes esperados; además, la dinámica que se dé en el desarrollo de la clase puede favorecer más a unos que a otros.

Para la realización de cada actividad se sugieren ejemplos que pueden ser implementados tal cual se propone en el programa, adaptados a la realidad escolar o sustituidos por otros que se consideren más pertinentes. Al hacer estas adecuaciones locales hay que procurar el desarrollo de las habilidades de pensamiento que el programa promueve.

Para numerosas actividades, los ejemplos seleccionados se ordenan según nivel de dificultad; todos los ejemplos se complementan con comentarios pedagógicos específicos.

**ACTIVIDADES PARA LA EVALUACIÓN Y EJEMPLOS**

La evaluación se considera parte del proceso de aprendizaje. Debe proveer al joven y al docente de la retroalimentación necesaria como referente para continuar, corregir y orientar las actividades futuras.

Es recomendable que se evalúen diversos aspectos del proceso de aprendizaje, y no sólo los resultados de los diversos ejercicios. Cobra relevancia en esta propuesta observar y evaluar el tipo de razonamiento utilizado, el método empleado, la originalidad de la o las ideas planteadas.

Al término de cada unidad se incluye un conjunto de preguntas, propuestas de trabajo y problemas, utilizables como parte de una evaluación de término de la unidad. La evaluación, en consonancia con el proceso de aprendizaje, aporta a un proceso de integración y relación entre los conceptos.

Los siguientes criterios orientan el proceso de evaluación:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas:
  Reconocer la o las incógnitas e interpretar las preguntas; diseñar una estrategia o plan de trabajo con los datos; establecer relaciones matemáticas entre datos, variables, incógnitas; traducirlas, representar y/o expresar en un lenguaje y simbología comprensible y adecuada; seleccionar y aplicar procedimientos; explicitar la respuesta al problema y analizar su pertinencia.

- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático:
  Conjeturar, relacionar, establecer conclusiones; organizar y encadenar argumentos matemáticos; demostrar propiedades; reconocer regularidades numéricas, algebraicas, geométricas.

- Organización y estructuración de conceptos matemáticos:
  Reconocer la noción o el concepto involucrado; reconocer equivalentes y establecer relaciones con otras nociones o conceptos; generalizar, particularizar.

- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios:
  Seleccionar y utilizar reglas, algoritmos, fórmulas y/o formas para realizar cálculos o transformar relaciones matemáticas en otras más sencillas o más convenientes de acuerdo al contexto.

Interesa además considerar que el aprendizaje de matemática contribuye al desarrollo de habilidades en el ámbito de la comunicación: analizar e interpretar cuadros, gráficos y fórmulas, traducir de un registro a otro, registrar, describir, explicar ideas, argumentos, relaciones o procedimientos.

Finalmente, no está ajeno al aprendizaje de matemática el desarrollo de actitudes y disposiciones para el estudio y el trabajo: abordar problemas y desafíos; analizar errores; escuchar otros argumentos, analizarlos; expresar críticas fundamentadas.

# Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

Los objetivos fundamentales transversales (OFT) definen finalidades generales de la educación referidas al desarrollo personal y la formación ética e intelectual de alumnos y alumnas. Su realización trasciende a un sector o subsector específico del currículum y tiene lugar en múltiples ámbitos o dimensiones de la experiencia educativa, que son responsabilidad del conjunto de la institución escolar, incluyendo, entre otros, el proyecto educativo y el tipo de disciplina que caracteriza a cada establecimiento, los estilos y tipos de prácticas docentes, las actividades ceremoniales y el ejemplo cotidiano de profesores y profesoras, administrativos y los propios estudiantes. Sin embargo, el ámbito privilegiado de realización de los OFT se encuentra en los contextos y actividades de aprendizaje que organiza cada sector y subsector, en función del logro de los aprendizajes esperados de cada una de sus unidades.

Desde la perspectiva señalada, cada sector o subsector de aprendizaje, en su propósito de contribuir a la formación para la vida, conjuga en un todo integrado e indisoluble el desarrollo intelectual con la formación ético-social de alumnos y alumnas. De esta forma se busca superar la separación que en ocasiones se establece entre la dimensión formativa y la instructiva. Los programas están construidos sobre la base de contenidos programáticos significativos que tienen una carga formativa muy importante, ya que en el proceso de adquisición de estos conocimientos y habilidades los estudiantes establecen jerarquías valóricas, formulan juicios morales, asumen posturas éticas y desarrollan compromisos sociales.

Los Objetivos Fundamentales Transversales definidos en el marco curricular nacional (Decreto Nº 220) corresponden a una explicitación ordenada de los propósitos formativos de la Educación Media en cuatro ámbitos: *Crecimiento y Autoafirmación Personal*, *Desarrollo del Pensamiento*, *Formación Ética*, *Persona y Entorno;* su realización, como se dijo, es responsabilidad de la institución escolar y la experiencia de aprendizaje y de vida que ésta ofrece en su conjunto a alumnos y alumnas. Desde la perspectiva de cada sector y subsector, esto significa que no hay límites respecto a qué OFT trabajar en el contexto específico de cada disciplina; las posibilidades formativas de todo contenido conceptual o actividad debieran considerarse abiertas a cualquier aspecto o dimensión de los OFT.

Junto a lo señalado, es necesario destacar que hay una relación de afinidad y consistencia en términos de objeto temático, preguntas o problemas, entre cada sector y subsector, por un lado, y determinados OFT, por otro. El presente programa de estudio ha sido definido incluyendo ('verticalizando') los objetivos transversales más afines con su objeto, los que han sido incorporados tanto a sus objetivos y contenidos, como a sus metodologías, actividades y sugerencias de evaluación. De este modo, los conceptos (o conocimientos), habilidades y actitudes que este programa se propone trabajar integran explícitamente gran parte de los OFT definidos en el marco curricular de la Educación Media.

- Los OFT de ámbito *Crecimiento y Autoafirmación Personal* referidos al interés y capacidad de conocer la realidad y utilizar el conocimiento y la información.
- Los OFT del ámbito *Desarrollo del Pensamiento*, en especial los relativos a habilidades de investigación y de modelamiento matemático de situaciones y fenómenos, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos; las de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientados al aprendizaje de algoritmos o procedimientos rutinarios, así como a la aplicación de leyes y principios, por un lado, y de generalización a partir de relaciones observadas, por otro. El desarrollo del pensamiento probabilístico contribuye a tomar decisiones fundamentadas en situaciones sociales.
- Los OFT del ámbito *Persona y su Entorno* referidos al trabajo, y que plantean el desarrollo de actitudes de rigor y perseverancia, así como de flexibilidad, originalidad y asunción del riesgo, y las capacidades de recibir y aceptar consejos y críticas.
- A través de los problemas a resolver matemáticamente que plantean las actividades del programa es posible ampliar el trabajo de los OFT con alumnos y alumnas a su capacidad de juicio, y la aplicación de criterios morales, a problemas del medio ambiente, económicos y sociales.

Junto a lo señalado, el programa, a través de las sugerencias al docente que explicita, invita al desarrollo de actividades pedagógicas que ponen en práctica los valores y orientaciones éticas de los OFT, así como sus definiciones sobre habilidades intelectuales y comunicativas.

Además, el programa se hace cargo de los OFT de *Informática* incorporando en diversas actividades y tareas la búsqueda de información a través de redes de comunicación, empleo de softwares y la selección de sitios en internet.

# Objetivos Fundamentales

Las alumnas y los alumnos desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de los sistemas de inecuaciones, de la función cuadrática, de nociones de trigonometría en el triángulo rectángulo y de variable aleatoria, mejorando en rigor y precisión la capacidad de análisis, de formulación, verificación o refutación de conjeturas.
2. Analizar información cuantitativa presente en los medios de comunicación y establecer relaciones entre estadística y probabilidades.
3. Aplicar y ajustar modelos matemáticos para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.
4. Resolver desafíos con grado de dificultad creciente, valorando sus propias capacidades.
5. Percibir la matemática como una disciplina que recoge y busca respuestas a desafíos propios o que provienen de otros ámbitos.

# Unidades, contenidos y distribución temporal

## Cuadro sinóptico

| Unidades | | | |
|---|---|---|---|
| **1** Las funciones cuadrática y raíz cuadrada | **2** Inecuaciones lineales | **3** Más sobre triángulos rectángulos | **4** Otro paso en el estudio de las probabilidades |
| **Contenidos** | | | |
| a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cuociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.<br>b. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:<br>$y = ax^2$<br>$y = x^2 \pm a$, $a > 0$,<br>$y = (x \pm a)^2$ $a > 0$<br>$y = ax^2 + bx + c$<br>Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x. Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.<br>c. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x, deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = \mid x \mid$.<br>d. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica. | a. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita.<br>b. Intervalos en los números reales.<br>c. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones.<br>d. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales. | a. Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.<br>b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.<br>c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.<br>d. Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentarios sobre el Teorema de Fermat. | a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.<br>b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.<br>c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada. |
| **Tiempo estimado** | | | |
| 30 a 35 horas | 20 a 25 horas. | 25 a 30 horas | 25 a 30 horas |

## Unidad 1

# Las funciones cuadrática y raíz cuadrada

### Contenidos

a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cuociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.

b. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:

$$y = ax^2$$
$$y = x^2 \pm a,\ a > 0$$
$$y = (x \pm a)^2,\ a > 0$$
$$y = ax^2 + bx + c$$

Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x. Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.

c. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = |x|$.

d. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

## Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

Conocen y utilizan procedimientos de cálculo algebraico con expresiones en las que intervienen raíces cuadradas y cúbicas.

Plantean y resuelven problemas que involucran ecuaciones de segundo grado; explicitan sus procedimientos de solución y analizan la existencia y pertinencia de las soluciones obtenidas.

Analizan la función cuadrática y la función raíz cuadrada en el marco de la modelación de algunos fenómenos sencillos, con las correspondientes restricciones en los valores de la variable; reconocen limitaciones de estos modelos y su capacidad de predicción.

Conocen la parábola como un lugar geométrico, reconocen su gráfica e identifican aquéllas que corresponden a una función cuadrática; identifican algunas de sus propiedades y aplicaciones en diversos ámbitos de la tecnología.

Reconocen el potencial de las funciones estudiadas para reflejar distintos tipos de crecimiento y modelar diversos fenómenos.

### Orientaciones didácticas

En el mundo de las comunicaciones y de la energía, la parábola está presente en diversas formas. No es extraño hoy en día encontrarse con antenas parabólicas, cocinas solares o estufas eléctricas de sección parabólica.

Por otra parte, las funciones cuadráticas, cuya representación gráfica es una parábola, permiten modelar problemas y situaciones en que las funciones lineales, estudiadas en Segundo Año Medio, son insuficientes. Sin duda con esto no se agotará toda la gama de funciones que permiten representar situaciones y problemas; se estudiará en la tercera unidad de este programa, las funciones trigonométricas elementales, y en Cuarto Año Medio, se introducirán las funciones logarítmica, exponencial y potencia. Sin embargo, el estudio de la función cuadrática permite a los estudiantes continuar el descubrimiento de la matemática como una representación de la realidad y una herramienta de modelación.

En la presente unidad se estudia la función cuadrática, su representación gráfica y su estrecha relación con la función raíz cuadrada. Interesa fundamentalmente que los alumnos y alumnas visualicen y comparen el tipo de crecimiento que modelan las funciones cuadrática, raíz cuadrada y función lineal. Ello les permitirá distinguir la necesidad de utilizar un modelo u otro, frente a una determinada situación.

Interesa que en el estudio de la función cuadrática se entienda el rol que juega cada uno de los parámetros involucrados. Ello simplificará la graficación de la función, permitirá la comprensión del fenómeno que se está estudiando. Asimismo, los estudiantes podrán establecer con claridad las relaciones entre las expresiones algebraica y gráfica de las funciones. El uso de un programa computacional que permita graficar funciones o de calculadoras gráficas será de gran ayuda.

Se ha optado por introducir el trabajo algebraico con raíces cuadradas y cúbicas, a través de situaciones que involucran no sólo la resolución algebraica, sino también el análisis del procedimiento y de las soluciones.

En el desarrollo de esta unidad es conveniente una coordinación con los docentes de ciencias; se podría organizar un sistema que utilice computador, interfases y sensores, y algún programa computacional ad hoc para recoger y graficar información a partir de algún experimento o fenómeno (intensidad de sonido, movimiento, presión, temperatura, velocidad, pH, u otros) y analizarla desde las relaciones matemáticas.

Como parte del proceso de construcción de una cultura matemática de los estudiantes, es valioso que ellos conozcan la parábola como un lugar geométrico que satisface determinadas condiciones.

# Actividades para el aprendizaje y ejemplos

## Actividad 1

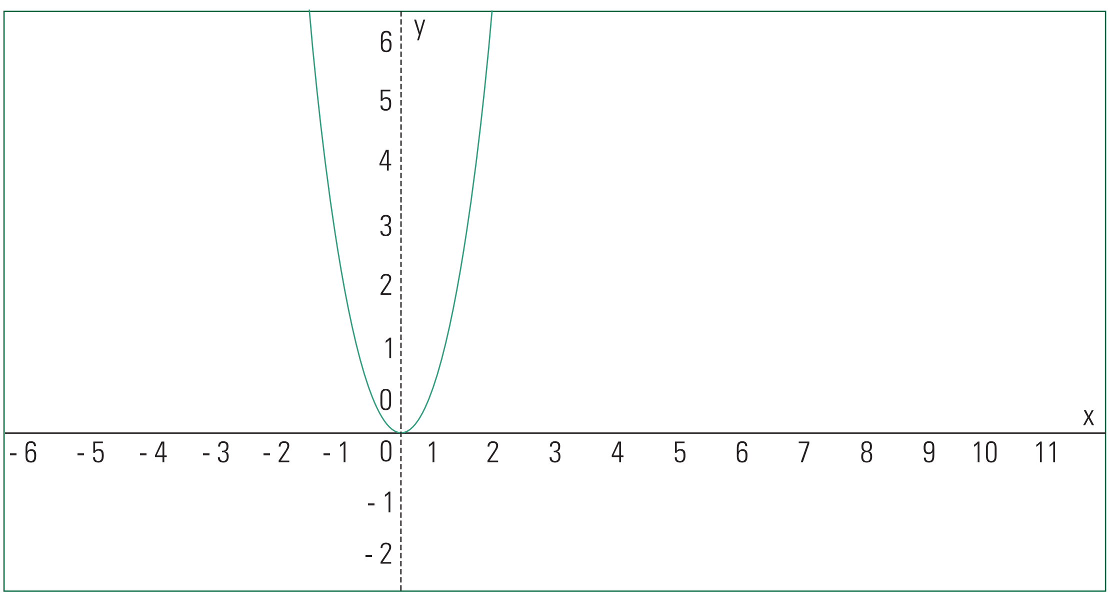
**Estudian la función cuadrática como modelo de algunos fenómenos o situaciones; organizan una tabla de valores y trazan el gráfico correspondiente utilizando, preferentemente, un programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.**

Ejemplo A

Construyen una tabla de valores y grafican la relación entre la medida del radio de una circunferencia y el área del círculo correspondiente.

INDICACIONES AL DOCENTE

Analizar en el gráfico las variaciones entre los valores de las variables visualizando cómo varía *y* al tomar *x* diferentes valores.




Si x varía en un intervalo de longitud igual a 1, por ejemplo [2,3], ¿cuál es la variación correspondiente en y? Y, si el intervalo fuera [8,9] , ¿cuál sería la variación que corresponde en y?

Es conveniente completar la otra rama de la parábola para los valores negativos de x.

De acuerdo a las condiciones de trabajo, en algunos establecimientos se podrá hacer el gráfico de $y = \pi r^2$ con algún programa computacional; en otros, los alumnos y alumnas lo trazarán en el cuaderno, a partir de una tabla de valores. En este último caso es recomendable considerar una aproximación entera de $\pi$ y una cantidad de puntos tal que se note que se trata de una curva y no de una sucesión de pequeños trazos.

### Ejemplo B

En el Norte Chico se descubre una vertiente de agua subterránea que debe ser extraída con bombas. Se sabe que por cada nueva bomba que se conecte, la cantidad de $m^3$ diarios que es posible extraer con cada bomba decrece en 5 $m^3$, como puede apreciarse en la tabla siguiente:

| Número de bombas | $m^3$ de agua extraída |
|---|---|
| 1 | 60 (= 1 • 60) |
| 2 | 110 (= 2 • 55) |
| 3 | 150 (= 3 • 50) |
| 4 | 180 (= 4 • 45) |
| ... | ... |
| ... | ... |

I. Completar la tabla hasta un número de bombas que parezca razonable. Justificar su elección.
II. Graficar convenientemente la tabla anterior.
III. ¿Cuál es la máxima cantidad de agua que se puede extraer diariamente de la vertiente? ¿Con cuántas bombas se logra?
IV. ¿Con qué cantidad de bombas comienza a disminuir la cantidad de agua extraída?
V. ¿Cuánta agua se extraerá si se colocan trece bombas? ¿Tiene sentido colocar más bombas?

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere organizar a los estudiantes en grupos de trabajo para discutir el problema, hacer la tabla y graficar esta información para visualizar el comportamiento del fenómeno.

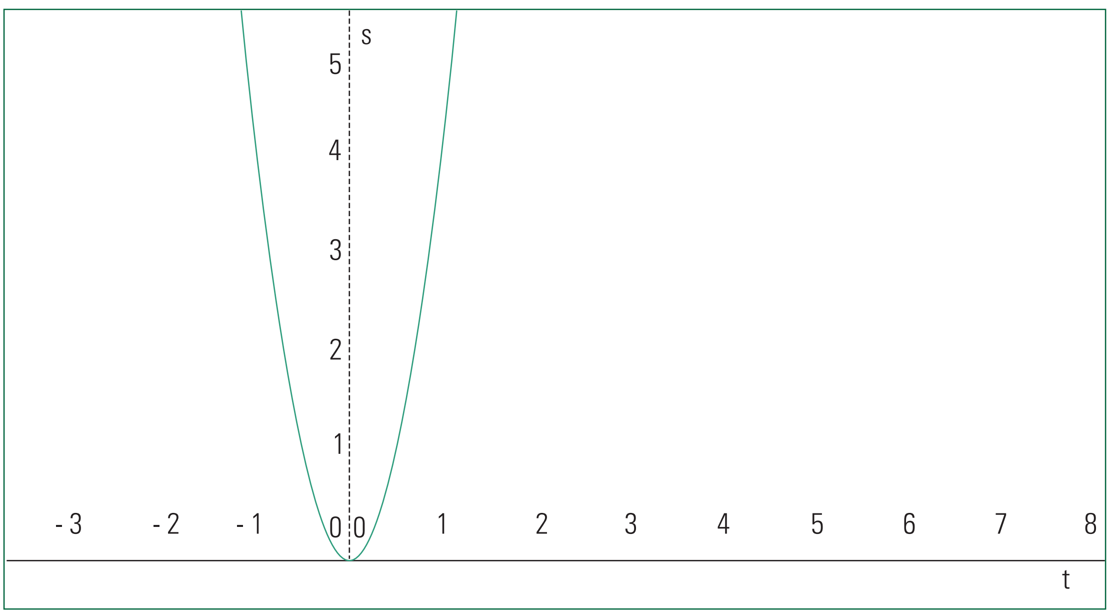
### Ejemplo C

Interpretan el gráfico que corresponde a la fórmula $s = \frac{1}{2}gt^2$ que representa el desplazamiento de un cuerpo en caída libre, en que *g* es la aceleración de gravedad y *t* el tiempo transcurrido.

I. ¿Qué distancia recorre un cuerpo en caída libre en el primer segundo?
II. ¿Qué distancia recorre un cuerpo en caída libre en el tercer segundo? Y, ¿en el décimo segundo?
III. Si un cuerpo se dejara caer desde 2000 m de altura, ¿qué distancia recorrería en el último segundo?

INDICACIONES AL DOCENTE

Coordinar acciones con el profesor o profesora de Física para las explicaciones y satisfacción de dudas de los estudiantes en el estudio del movimiento de un objeto que cae libremente, suponiendo que se toman fotografías a intervalos regulares de tiempo, y que se grafica la distancia recorrida, o la posición, en función del tiempo obteniendo la gráfica que corresponde a la fórmula $s = \frac{1}{2} gt^2$




En la elaboración del gráfico es más cómodo aproximar la aceleración de gravedad a 10 m/s$^2$. Será necesario considerar las unidades de medida en cada eje.

Utilizando el gráfico pueden constatar que la distancia recorrida en caída libre depende cuadráticamente del tiempo.

Un análisis similar se puede hacer estudiando el movimiento uniformemente acelerado.

## Actividad 2

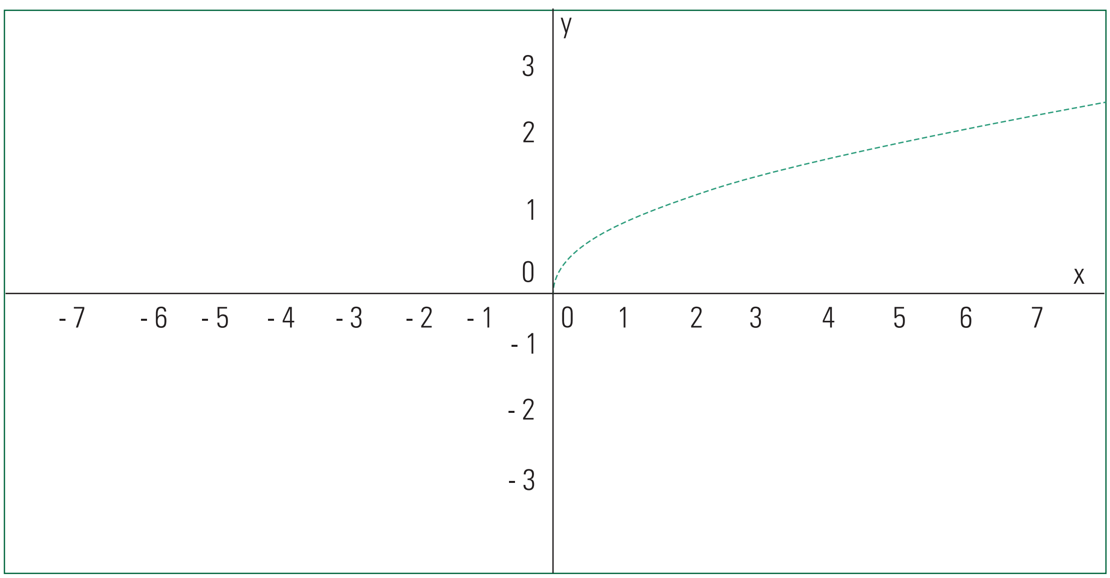
**Estudian la expresión $y = \sqrt{x}$, como modelo de algunos fenómenos o situaciones; organizan una tabla de valores y trazan el gráfico correspondiente utilizando, preferentemente, un programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.**

Ejemplo A

Graficar y analizar la expresión $y = \sqrt{x}$, en que la variable *x* corresponde al área de un cuadrado en tanto que *y* corresponde a la medida del lado de ese cuadrado.

INDICACIONES AL DOCENTE

Los estudiantes analizan en el gráfico las variaciones entre los valores de las variables; si *x* toma valores en el intervalo [1,2], ¿cuál es el intervalo para *y*? Y si *x* varía en el intervalo [4,5], ¿cuáles son los valores para *y*?




Comparan con las variaciones observadas en la actividad anterior.

Este es un buen momento para profundizar en relación con las raíces cuadradas de números enteros, de fracciones, de decimales y, en general, de cualquier número real. El uso de una calculadora científica permite aproximarse a valores decimales de las raíces cuadradas irracionales, incluyendo, si se considera pertinente, números como $\sqrt{\sqrt{2}}$, por ejemplo.

Ejemplo B

Retomar el fenómeno de la caída libre estudiando la relación $t = 0{,}45\sqrt{d}$ para analizar la variable tiempo en función de la distancia. En esta expresión se ha aproximado la aceleración de gravedad a 10 $m/s^2$ y se han considerado dos cifras decimales como aproximación al coeficiente de $\sqrt{d}$.

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los estudiantes se den cuenta que ésta es la misma fórmula anterior. Es importante que ellos puedan interpretar desde la fórmula las relaciones entre las variables *t* y *d* . Si un objeto cayera desde 5 m de altura, el tiempo que demora en llegar al suelo es 1 segundo aproximadamente; si cayera desde 10 m, el tiempo sería de 1,42 s.

El tiempo se duplicará si la altura es cercana a 25 metros.

Ejemplo C

Analizan la relación $T = 2\sqrt{l}$ en que *l* es la longitud de un péndulo y *T* es el período, a partir de la interpretación de su gráfico.

INDICACIONES AL DOCENTE

En la fórmula propuesta en este ejemplo, el coeficiente 2 es una aproximación al coeficiente más exacto que es $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$ en que g es la aceleración de gravedad. En su expresión más exacta, este experimento permite un cálculo aproximado de la aceleración de gravedad en un determinado lugar.

Es interesante constatar que para un péndulo de longitud igual a 1 m, el tiempo de una oscilación es aproximadamente 2 s; si se duplicara la longitud del péndulo, el tiempo aumenta a 2,8 s. Este se duplicará de 2 a 4 segundos, si la longitud del péndulo llega a ser de 4 metros.

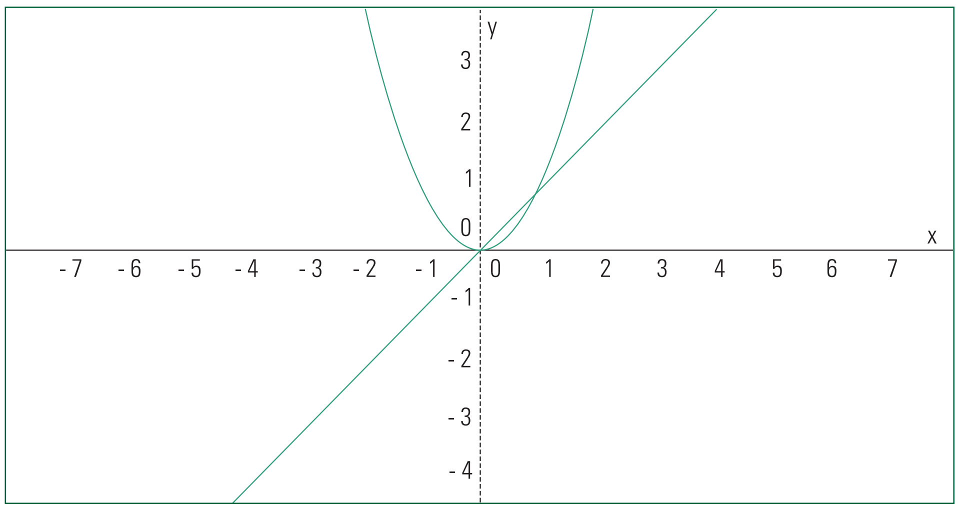
Para apoyar la comprensión de la relación entre las variables es conveniente que los estudiantes resuelvan problemas en relación con estos fenómenos, apoyándose en las relaciones que se explicitan en la gráfica.

## Actividad 3

**Comparan entre crecimiento lineal, crecimiento cuadrático y el que modela la raíz cuadrada.**

Ejemplo A

Graficar, en un mismo sistema de coordenadas, las funciones $y = x$ e $y = x^2$ visualizar el intervalo que satisface la desigualdad $x^2 < x$.




Los estudiantes analizan las variaciones de *y* para los intervalos [0,1] y [0,-1] de *x*; para los intervalos [1,2] y [-1,-2] de *x*, en ambos gráficos. Explicitan las conclusiones de su análisis.

INDICACIONES AL DOCENTE

En este ejemplo, desde una perspectiva gráfica, se visualiza que en el intervalo [0,1] se cumple la desigualdad $x^2 < x$.

Ambos gráficos en un mismo sistema de coordenadas permiten comparar el crecimiento lineal y cuadrático. El punto de intersección de coordenadas (1,1) marca el cambio de posición relativa de ambas gráficas.

Generalmente se usa el término crecimiento para indicar tanto el crecimiento como el decrecimiento. Es interesante observar lo que sucede en ambas gráficas para valores negativos de x.

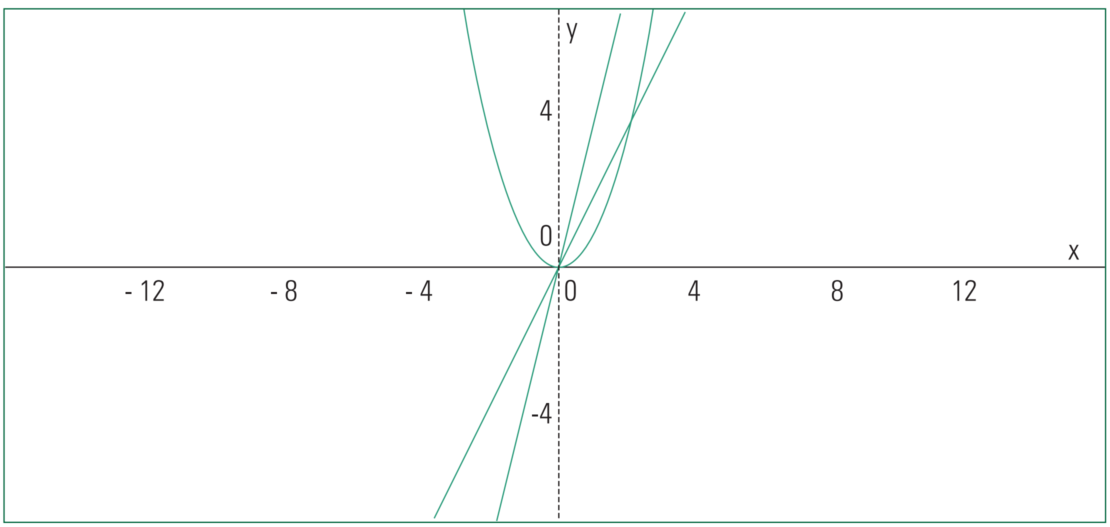
Ejemplo B

Grafican, en un mismo sistema de coordenadas, las funciones $y = 4x$; $y = 2x$; $y = x^2$; comparan las variaciones de los valores de *y* para un mismo intervalo de valores para *x*.

INDICACIONES AL DOCENTE

Estas funciones podrían asociarse a las relaciones entre el lado de un cuadrado como variable *x*, con su perímetro, su semiperímetro y su área como variables *y*, en cada caso.

Si para facilitar la comparación, estos gráficos se presentaran en un mismo sistema de coordenadas, es necesario tener presente que en el eje de las ordenadas se superponen en una misma escala unidades de longitud para la representación del perímetro y del semiperímetro y unidades de área para la parábola.




Pese a esta diferencia de unidades en el eje de las ordenadas, esta superposición de gráficos permite percibir las variaciones para *y* en relación con un mismo intervalo de variación para los valores de *x*.

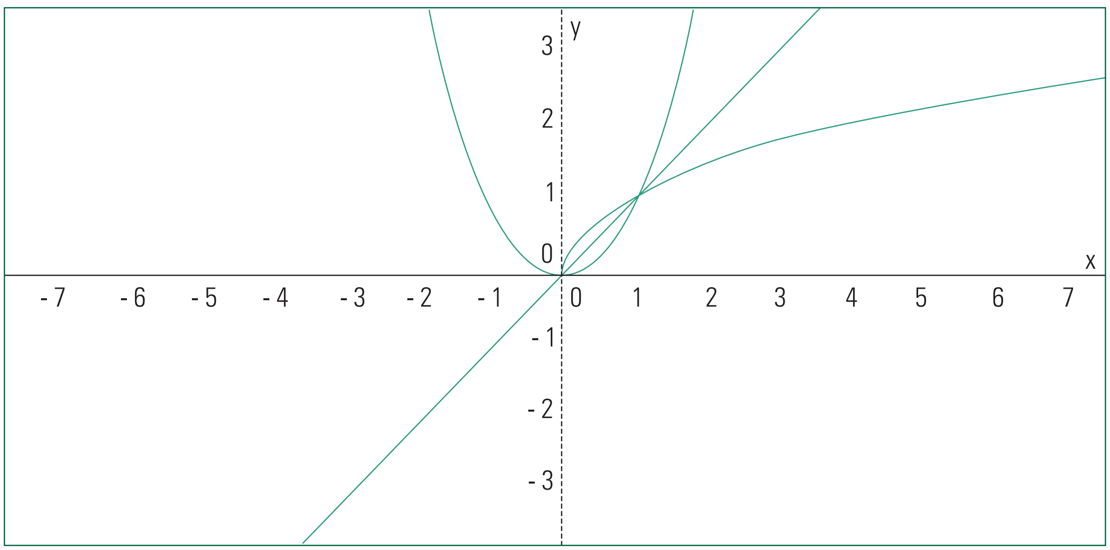
En forma similar se puede analizar las funciones que describen la variación del volumen en relación con la variación de la medida de un lado del cuadrado basal, en un paralelepípedo recto de base cuadrada y altura constante.

Ejemplo C

Constatan la simetría de la gráfica de la función cuadrática con la de la raíz cuadrada, respecto a la recta $y = x$. Discuten acerca de la necesidad que $x \geq 0$.

INDICACIONES AL DOCENTE

En un mismo sistema grafican $y = x$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$




Observar, por ejemplo, que una paralela al eje *y* por el punto $x = 2$ intersecta a la primera gráfica en $y = \sqrt{2}$, a la segunda en $y = 2$ y a la tercera en $y = 4$. Por otra parte, si se traza una paralela al eje *x* por el punto $y = 2$ se intersecta a la parábola en el punto $x = \sqrt{2}$, a la recta en el punto $x = 2$ y a la otra gráfica en el punto $x = 4$.

Ejemplo D

Luisa llega a un acuerdo con su profesor de ciencias para rendir una prueba de recuperación; ella obtuvo un 3,5 en una prueba y quiere subirlo. El profesor acepta con la condición de que ambas notas, el 3,5 y la que obtenga en esta prueba de recuperación, se promedien geométricamente. Dos compañeros que obtuvieron 2,1 y 3,1 se incorporan también a este acuerdo.

I. ¿Qué nota se debe sacar cada estudiante para que el promedio geométrico entre sus notas sea 4?
II. Graficar en un mismo sistema de coordenadas las gráficas correspondientes a $\bar{x} = \frac{2{,}1 + x}{2}$ y $\dot{x} = \sqrt{2{,}1\,x}$, media aritmética y geométrica respectivamente, de 2,1 y x.

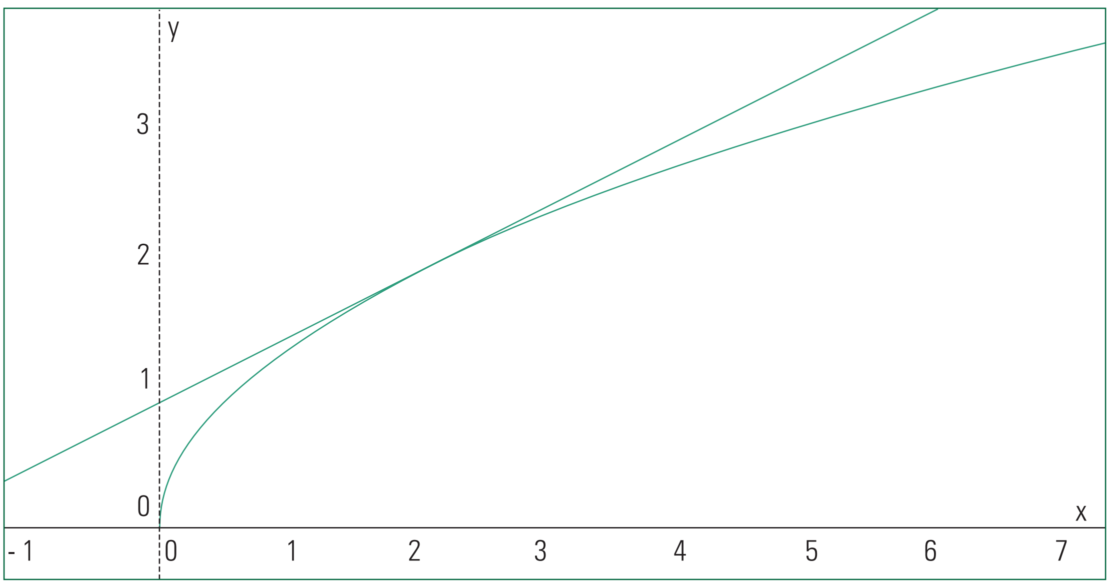
¿En cuántos puntos se intersectan ambas curvas? ¿Cuáles son las coordenadas de esos puntos?

Si el 2,1 se cambiara por 3, ¿cuál sería el punto de intersección?

III. A partir del gráfico, conjeturar alguna desigualdad entre los valores de la media aritmética y la geométrica entre dos números.

INDICACIONES AL DOCENTE

El propósito de este ejemplo es comparar las variaciones entre el modelo lineal y la raíz cuadrada.




Es importante destacar que no es posible, con una escala de calificación de 1 a 7 y con promedio geométrico, subir a 4 un 2,1, con sólo una prueba.

## Actividad 4

**Resuelven problemas y ejercicios sencillos que involucran operatoria algebraica de raíces cuadradas y cúbicas, reconociendo que $a^2 = b$ admite dos valores reales para *a* si *b* es positivo, mientras que $a^3 = b$ sólo admite un valor real para *a* para cualquier valor de *b*.**

### Ejemplo A

Determinar el área de la cara de un cubo si se conoce su volumen; establecer las relaciones entre la arista, el área de una cara y el volumen de un cubo.

INDICACIONES AL DOCENTE

Si se conoce la medida de una arista de un cubo, se supone que no habrá dificultad para calcular el área de una cara y el volumen.

Sin embargo, si la información es el volumen de un cubo, determinar el área de una cara y la medida de la arista presenta un mayor nivel de complejidad.

Partiendo de medidas numéricas se podrá llegar a establecer una tabla de relaciones como la siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| a | Arista | $\sqrt[3]{V}$ |
| $a^2$ | Area de una cara | $\sqrt[3]{V^2}$ |
| $a^3$ | Volumen del cubo | $V$ |

Este ejemplo abre un espacio para precisar acerca de las similitudes y diferencias entre las raíces cuadradas y cúbicas.

### Ejemplo B

Calcular el área de un cuadrado cuyo lado es la diagonal de otro cuadrado menor si:

I. el lado del cuadrado menor mide a cm.

II. el área del cuadrado menor es b $cm^2$.

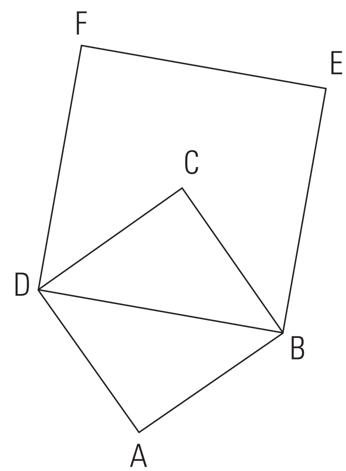
INDICACIONES AL DOCENTE

Es conveniente desarrollar algunos ejemplos numéricos.

De acuerdo al dibujo se podría proponer:

I. Calcular el área del cuadrado DBEF si AB = 5 cm.

II. Si el área de ABCD es 20 $cm^2$ calcular el lado y el área del cuadrado DBEF.



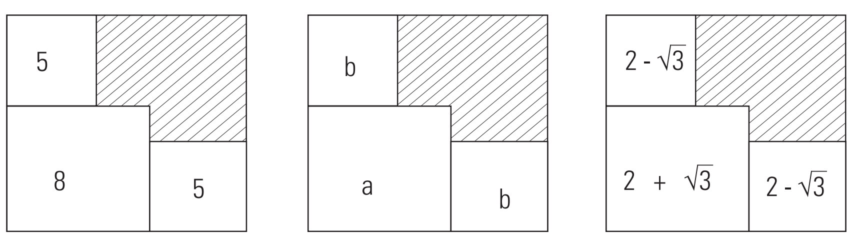

Es posible inventar un puzzle con cuatro triángulos rectángulos isósceles congruentes. Con dos de estos triángulos se puede generar un cuadrado de área $a$ y lado $\sqrt{a}$, como el cuadrado ABCD de la figura. Su diagonal mide $\sqrt{a} \cdot \sqrt{2}$.

Con los cuatro triángulos se genera otro cuadrado, como DBEF, de área $2a$ y de lado $2\sqrt{a}$.

De estas configuraciones se puede concluir que $\sqrt{2a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{2}$.

Ejemplo C

Calcular la medida del área achurada en figuras como las siguientes, que están constituidas por un cuadrado grande en el que se han dibujado otros cuadrados cuyas áreas están indicadas.



INDICACIONES AL DOCENTE

Es conveniente asociar la imagen de área y medida del lado de un cuadrado con la cuadrática y con la raíz cuadrada. Si $x$ es el lado de un cuadrado, su área es $x^2$; si $x$ es el área de un cuadrado, su lado mide $\sqrt{x}$.

En general los estudiantes tienden a no reconocer como número expresiones con raíces; de ahí la importancia de utilizarlas en algunos ejemplos.

Es importante tener presente que esta visualización sólo puede representar números positivos; quedan fuera expresiones de la forma $-\sqrt{a}$, con a > 0.

### Ejemplo D

Si para pintar un estanque que tiene una capacidad de 10.000 litros se ocupan 1,5 litros de pintura, ¿cuánta pintura será necesaria para pintar otro estanque, de la misma forma, que tiene una capacidad de 20.000 litros?

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere considerar estanques de forma cúbica para facilitar la comprensión de las relaciones.

La tabla del Ejemplo A puede apoyar la reflexión para resolver el problema.

| | | |
|---|---|---|
| a | Arista | $\sqrt[3]{V}$ |
| $a^2$ | Area de una cara | $\sqrt[3]{V^2}$ |
| $a^3$ | Volumen del cubo | $V$ |

O bien, responder la pregunta: ¿qué relación se establece entre las áreas de las caras? Si de V se pasa a 2V, en las áreas de $\sqrt[3]{V^2}$ se pasará a $\sqrt[3]{(2V)^2}$. En consecuencia no se necesita el doble de pintura como se puede inducir erróneamente, sino que son necesarios $\sqrt[3]{4} \cdot 1{,}5$ litros de pintura, lo que aproximadamente es 1,6 • 1,5 = 2,4 litros.

### Ejemplo E

Construyen geométricamente la longitud de las raíces cuadradas de algunos números, utilizando un referente de unidad arbitrario y aplicando sucesivamente el teorema de Pitágoras. Ubican los correspondientes puntos en la recta numérica; comparan algunas medidas entre sí como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$, o bien entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{12}$.

INDICACIONES AL DOCENTE

Así como la diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$, la diagonal del rectángulo de lados 1 y $\sqrt{2}$, mide $\sqrt{3}$ y así, sucesivamente, se puede construir la longitud de las raíces cuadradas y disponerlas, si se desea, en una forma de espiral.

La construcción y ubicación de las raíces cuadradas en la recta numérica permite inducir algunas propiedades tales como $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ que en su forma general se expresa como $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, con $a > 0$.

Ejemplo F

Comparar los números siguientes

$$\sqrt{2}\,;\ \sqrt{8}\,;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,;$$

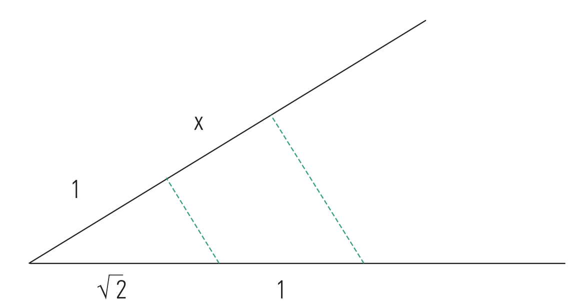
y ubicarlos relativamente en la recta numérica.

INDICACIONES AL DOCENTE

En este conjunto de números muchos estudiantes podrán afirmar que $\sqrt{2} < \sqrt{8}$; probablemente algunos podrán afirmar que $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, porque ese orden lo indican los numeradores, ya que son dos fracciones que tiene el mismo denominador.

Utilizar la calculadora es una forma de determinar aproximaciones racionales a estos valores y ubicar su posición relativa en la recta numérica.

Otro procedimiento, de tipo geométrico, es comparar longitudes de segmentos, aplicando el Teorema de Thales en una construcción como la siguiente:




En este caso $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

La forma más habitual de hacer estas comparaciones es por medio de la racionalización de denominadores.

Ejemplo G

Analizar la ecuación $\sqrt{x} = -5$; conocer y utilizar los convenios de notación.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los estudiantes utilicen correctamente la convención $\sqrt{a^2} = |a|$. De esta manera comprenderán por qué la ecuación planteada no tiene solución.

A veces, erróneamente, se escribe $\sqrt{4} = \pm 2$, siendo lo correcto $\sqrt{4} = 2$ y, por lo tanto, $-\sqrt{4} = -2$.

Es conveniente precisar que para $a \geq 0$ , las soluciones de la ecuación $x^2 = a$ son los números reales $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$ y que no hay solución real para valores negativos de $a$.

Puede ser un momento oportuno para hacer una breve presentación de los números complejos, planteando la construcción de $i$ como una invención de los matemáticos para poder resolver la ecuación $i^2 = -1$.

## Actividad 5

**Grafican funciones cuadráticas, determinan la relación entre el valor de algunos parámetros y las características del gráfico.**

Ejemplo A

Graficar, en un mismo sistema de coordenadas, las funciones:

$$y = x^2 \; ; \; y = -x^2$$
$$y = 4x^2 \; ; \; y = -4x^2$$

Establecer conclusiones relativas a la orientación de las parábolas y a la apertura de sus ramas.

INDICACIONES AL DOCENTE

Los estudiantes podrán constatar haciendo numerosos gráficos, de preferencia con un programa computacional adecuado, la relación entre la apertura de las ramas y el valor del coeficiente de $x$, por un lado, y la orientación de la parábola según el signo de este coeficiente, por otro.

Ejemplo B

Graficar, en un mismo sistema de coordenadas, las funciones:

$$y = x^2 + 1$$
$$y = x^2 - 1$$
$$y = x^2 + 5$$
$$y = x^2 - 5$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los estudiantes puedan determinar la expresión gráfica de una función que tiene su vértice, por ejemplo, en el punto (0,-4), y que se den cuenta que se trata de una familia de parábolas.

Interesa que los alumnos y alumnas relacionen la expresión algebraica con la gráfica en relación con el parámetro *c* de la función.

Ejemplo C

Graficar, en un mismo sistema de coordenadas, las funciones:

$$y = (x + 2)^2$$
$$y = (x - 2)^2$$
$$y = -(x + 2)^2$$
$$y = -(x - 2)^2$$

INDICACIONES AL DOCENTE

En este tercer ejemplo la parábola se desplaza horizontalmente sobre el eje de las $x$.

Además, es conveniente determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola con ambos ejes.

Ejemplo D

Graficar, en un mismo sistema de coordenadas, algunas funciones cuadráticas cuya expresión algebraica sea factorizable, tales como:

$$y = x(x + 2) \qquad y = (x + 3)(x - 2)$$
$$y = x(x - 2) \qquad y = (x + 3)(x + 2)$$
$$y = -x(x + 2)$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Determinar los puntos de intersección de la parábola con ambos ejes del sistema de coordenadas.

Considerando la simetría de la parábola respecto a la vertical que pasa por el vértice y conociendo los puntos de intersección de la parábola con el eje x, los estudiantes pueden determinar las coordenadas del vértice de la parábola.

## Actividad 6

**Resuelven problemas y estudian procedimientos de solución de ecuaciones cuadráticas; interpretan las soluciones de la ecuación en el gráfico de la función.**

Ejemplo A

Retomando el fenómeno de la caída libre, suponer que un objeto cae libremente desde determinada altura conocida. Determinar el momento en que el objeto llega al suelo.

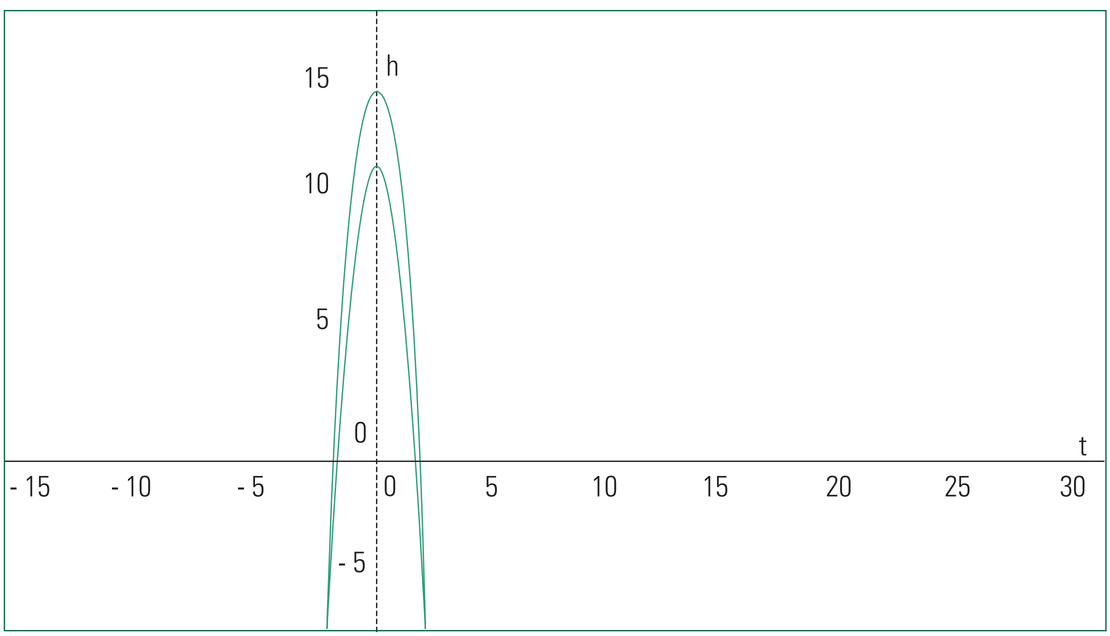
INDICACIONES AL DOCENTE

Si se deja caer un objeto desde H metros de altura, la altura *h* a la que se encuentra ese objeto, en función del tiempo *t*, está dada por

$$h = H - 5t^2$$

en donde, como en los ejemplos anteriores, también se ha aproximado *g* a 10 m/s$^2$ .

El momento en que el objeto llega al suelo es equivalente a plantear que h = 0. Esto permite plantear la ecuación $0 = H - 5t^2$




Los dos valores que se obtienen al resolver la ecuación corresponden a las dos ramas de la parábola; en este caso sólo interesa el valor positivo; puede ser un momento adecuado para abrir espacios de conversación en relación con el modelo y sus restricciones en su aplicación.

Ejemplo B

Suponer que se lanza un objeto verticalmente hacia arriba; éste llega a una determinada altura e inicia su descenso; determinar el momento en que el objeto llega al suelo.

INDICACIONES AL DOCENTE

En este caso el objeto está sometido a una fuerza inicial que lo lanza hacia arriba y otra constante que lo tira hacia abajo. La altura del objeto en un instante $t$ está dada por la función

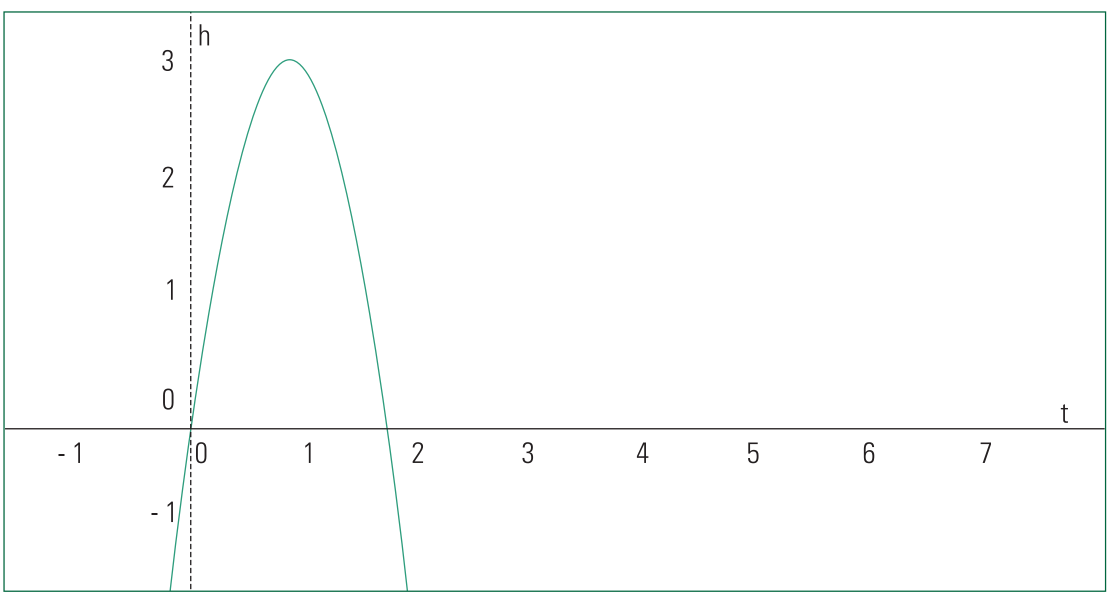
$$h = v_0 t - 5t^2$$

en que $v_0$ es la velocidad en el momento del lanzamiento hacia arriba y $t$ es el tiempo, con el supuesto de que el objeto se lanza desde una altura igual a cero y, como en los ejemplos anteriores, $g$ se ha aproximado a 10 m/s$^2$,

Suponiendo una velocidad inicial igual a 8 m/s, la expresión general anterior se particulariza en

$$h = 8t - 5t^2$$

cuya representación gráfica es:

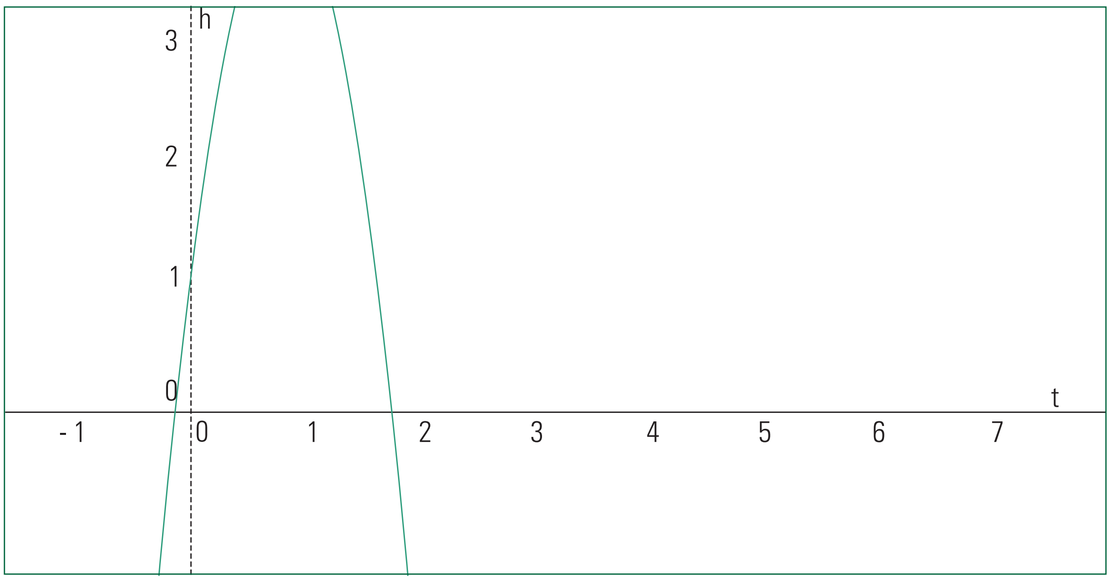



Esta parábola indica que hay dos momentos en que la altura es igual a cero. Es evidente que para $t$ = 0 se tiene que $h$ = 0; el otro valor de $h$ = 0 se tiene en el momento en que el objeto llega al suelo.

Resolviendo la ecuación $0 = 8t - 5t^2$ se obtienen los dos valores para $t$.

Más aún, por la simetría de la parábola se obtiene que la altura máxima ocurre para $t = \frac{4}{5}$ s; también puede determinarse la altura alcanzada en cualquier tiempo $t$ siempre que $0 \leq t \leq \frac{8}{5}$.

Será interesante ampliar este análisis a una situación en que el objeto se lanza desde una determinada altura, por ejemplo, desde un metro. En ese caso la parábola se desplaza hacia la izquierda de modo que la intersección con el eje $y$ sea en el punto (0,1).




La expresión algebraica será de la forma $h = h_0 + vt - 5t^2$ que se particulariza en este caso a $h = 1 + 8t - 5t^2$ y el momento en que el objeto llega al suelo está dado por la solución de la ecuación $0 = 1 + 8t - 5t^2$. Podría ser éste un buen momento para introducir el uso de la fórmula en la resolución de las ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo C

Resuelven ecuaciones cuadráticas que corresponden a trinomios cuadrados perfectos o a trinomios factorizables, considerando que si el producto de dos factores es igual a cero, a lo menos uno de los factores es igual a cero; relacionan la ecuación con la gráfica de una función asociable a la ecuación.

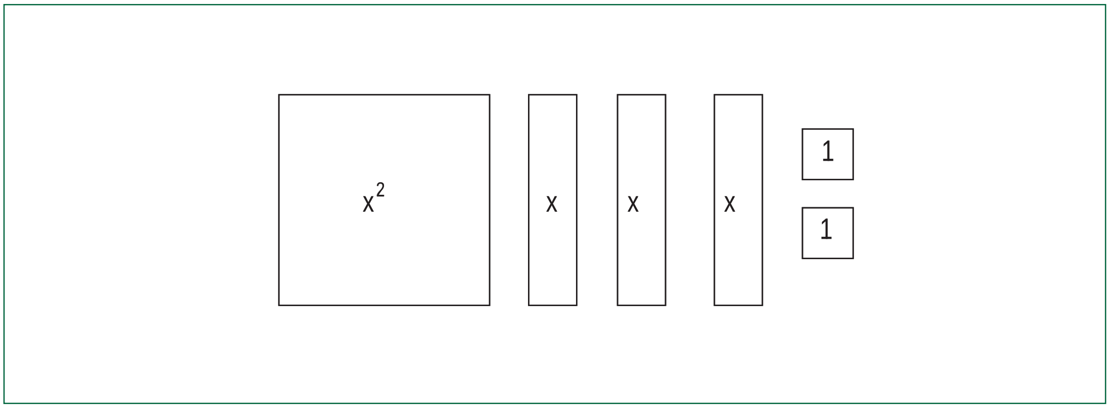
INDICACIONES AL DOCENTE

Es interesante proponer una función, por ejemplo, $y = x^2 - 2x - 15$; pedir a los alumnos y alumnas que la factoricen, la grafiquen y determinen las soluciones de la ecuación $0 = x^2 - 2x - 15$.

Además, pedirles que determinen una ecuación cuadrática y una función asociada si las soluciones de una ecuación son 4 y – 1 , por ejemplo.

La visualización geométrica del cálculo algebraico facilita la comprensión de la resolución de la ecuación de segundo grado por factorización, como el ensamble de un puzzle rectangular.

Si se considera resolver la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$, se puede proponer el desafío de armar un puzzle en forma de rectángulo con las siguientes piezas:

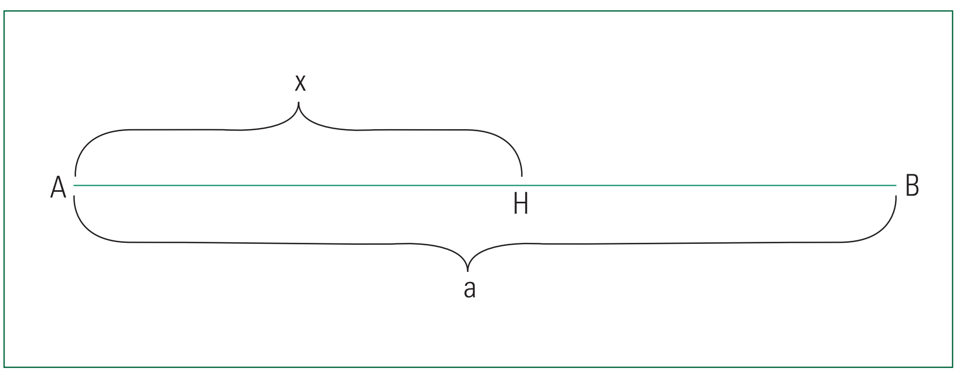



Se obtendrá un rectángulo de lados (x + 2) y (x + 1) de donde se deducen las soluciones de la ecuación.

Si se utilizara la fórmula para la resolución de cualquier ecuación cuadrática, es aconsejable que los alumnos y alumnas hagan un bosquejo de la parábola asociable a la ecuación.

Ejemplo D

En el segmento AB determinar la ubicación de un punto H tal que $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$



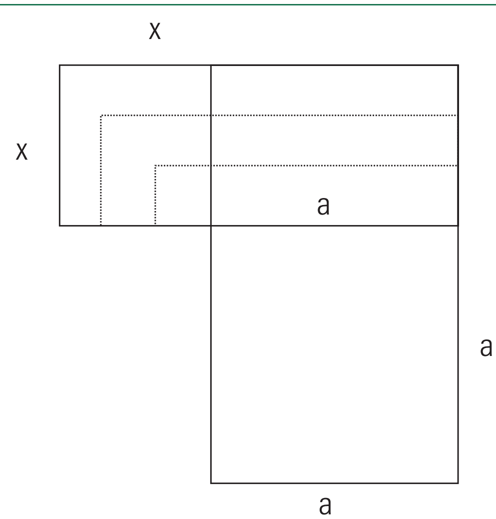

INDICACIONES AL DOCENTE

Si se considera necesario, se puede plantear un ejercicio numérico en que *a* toma un valor específico.

Será interesante ubicar el punto H y discutir los dos valores que se obtienen como solución de la ecuación.

Se puede incentivar a los alumnos a encontrar una interpretación geométrica de la proporción dada escribiéndola como $x^2 + ax = a^2$.

Se puede interpretar como la búsqueda de un rectángulo de ancho $a$ (dado) y alto $x$ (buscado), tal que su área sea igual a la del cuadrado construido sobre el lado $a$, tal como lo indica la siguiente ilustración.




Esto se puede mirar dinámicamente, variando $x$. Así se puede ver que, intuitivamente, hay una solución x (positiva) para el lado x, que permite equiparar las áreas pedidas.

## Actividad 7

**Utilizan el gráfico de la función cuadrática para resolver problemas que involucran valores máximos y mínimos de la función.**

Ejemplo A

El perímetro de un rectángulo es 50 cm, ¿cuáles son posibles medidas para sus lados?, ¿cuál de esos rectángulos, si existe, tiene la mayor área?

INDICACIONES AL DOCENTE

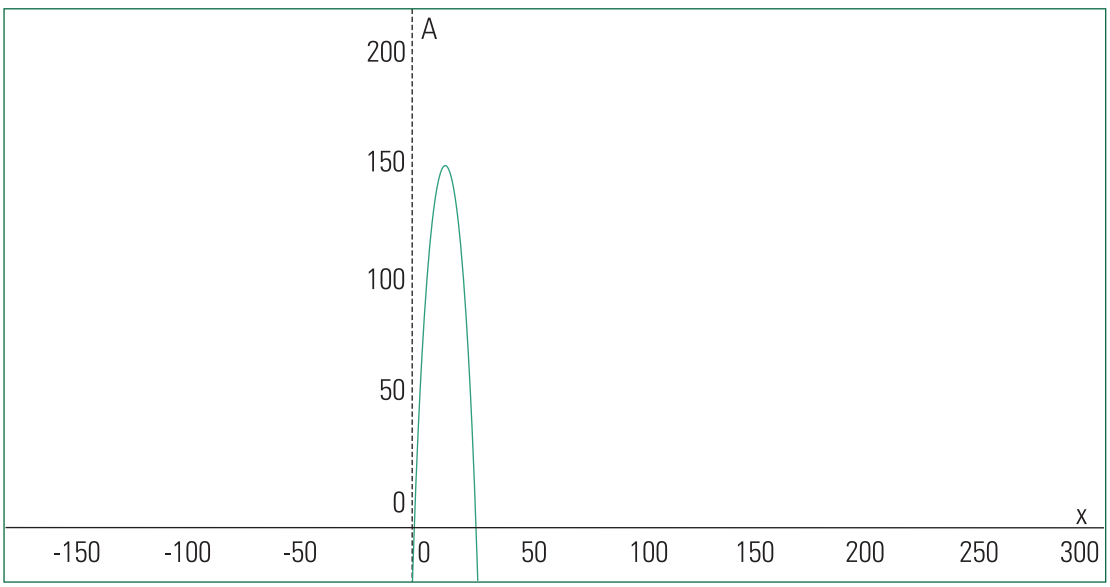
Se puede sugerir que los estudiantes organicen una tabla de valores para las medidas de los lados y que calculen el área correspondiente.

Se obtendrá una tabla como la siguiente:

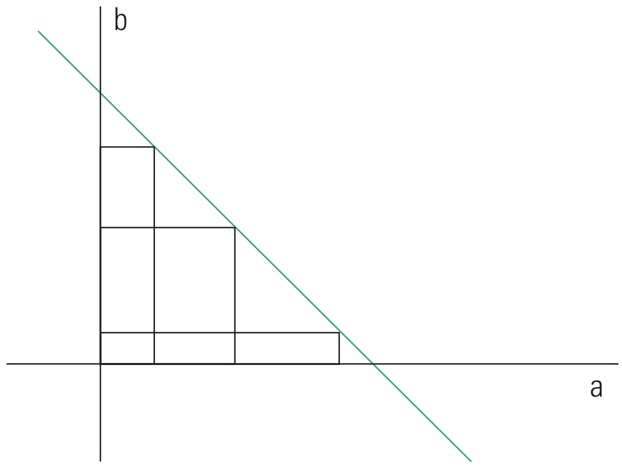
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| lado a | 1 | 2 | ... | ... | 11 | 12 | 13 |
| lado b | 24 | 23 | ... | ... | 14 | 13 | 12 |
| área | 24 | 46 | ... | ... | 154 | 156 | 156 |

Será necesario averiguar qué variaciones se producen en el área con números entre 12 y 13, y llegar así a la respuesta correcta.

Si $x$ es la medida de un lado del rectángulo, el área será $A = x\ (25 - x)$ o si se prefiere $A = -x^2 + 25x$. Al construir el gráfico se puede identificar el valor máximo de la ordenada con su correspondiente valor en la abscisa.



Se podría estimular a los estudiantes a proponer maneras “pre-parabólicas” de visualizar el problema y su solución. Para ello representar todos los posibles pares de lados (a,b) de los rectángulos de perímetro 50; se obtiene la recta de ecuación a + b = 25.




Cada uno de sus puntos se puede percibir como el vértice superior derecho del rectángulo de lados *a* y *b*, con el vértice inferior izquierdo en el origen. Así, se visualiza simultáneamente el continuo de los rectángulos de perímetro 50.

Observando el gráfico, es perceptiblemente claro cómo el área de los tales rectángulos decrece al irse a los extremos y cómo el valor máximo se obtendrá para el punto medio del segmento de recta entre ambos ejes.

Se puede comparar fácilmente el área de estos rectángulos entre sí para demostrar que el cuadrado realiza el área máxima. Es interesante que los alumnos y alumnas constaten que el área de estos rectángulos puede ser arbitrariamente pequeña.

Ejemplo B

Con un listón que mide 1,20 m se quiere construir un marco rectangular que encierre el área máxima.

I. ¿Cuál es esta área máxima? ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
II. ¿Cuáles son las medidas si el listón mide $l$ metro?
III. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo de mayor área?
IV. ¿Es posible encontrar un rectángulo de área mínima? Discutir esta situación.

INDICACIONES AL DOCENTE

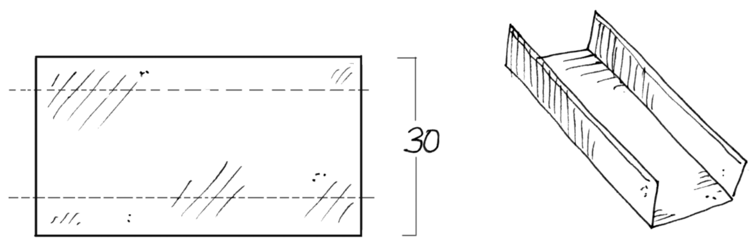
El ejemplo A aporta a la resolución de éste. Antes de abordar el problema general, es preferible resolver uno o dos casos particulares adicionales.

Conviene discutir acerca del intervalo de validez del modelo para este problema, dado que la parábola que modela esta situación $y = x\left(\frac{l}{2} - x\right)$ se extiende infinitamente hacia abajo.

Además, es importante que los estudiantes se den cuenta que todo cuadrado es un caso especial de rectángulo.

Ejemplo C

Para la fabricación de canaletas para las aguas lluvia se dispone de láminas de 30 cm de ancho. ¿Cuál es la medida para hacer los dobleces de modo que se obtenga una canaleta de máxima capacidad?

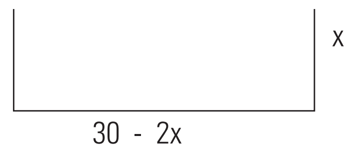



INDICACIONES AL DOCENTE

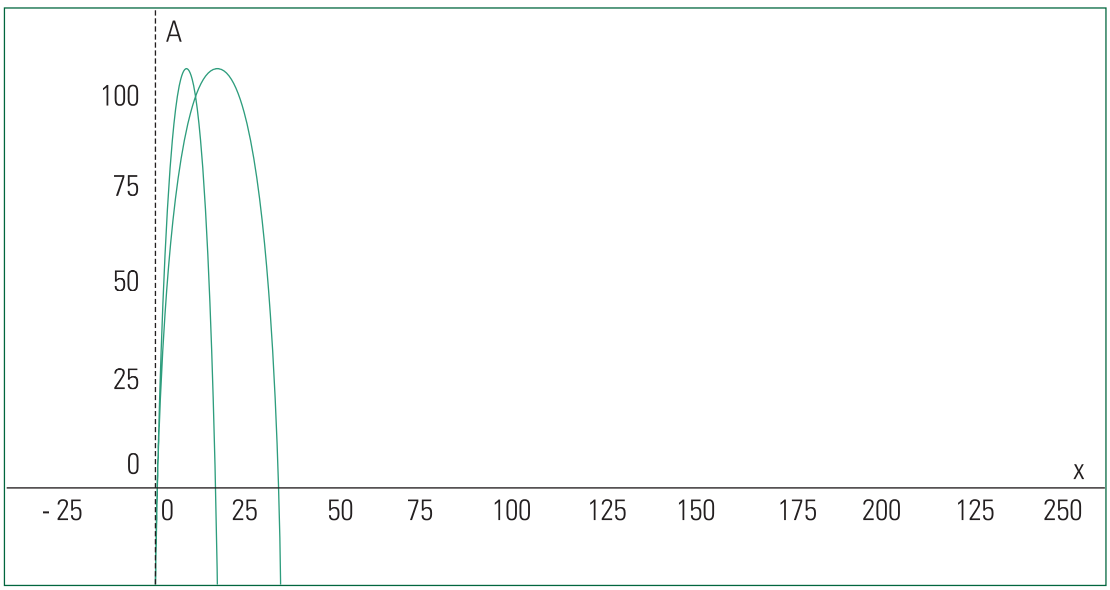
Se puede sugerir que los estudiantes completen una tabla de valores como la siguiente para buscar las medidas que den una sección de mayor área:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| base | 28 | 26 | … | 20 | … | 12 |
| lado | 1 | 2 | … | 5 | … | 9 |
| área | 28 | 52 | … | 100 | … | 108 |

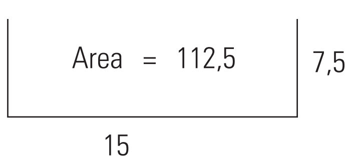
La tabla siguiente ilustra la resolución de este problema.

| I. sea x la base de la canaleta | II. sea x un lado de la canaleta |
|---|---|
|  |  |
| Area: $A' = \frac{-x^2 + 30x}{2}$ | Area: $A' = -2x^2 + 30x$ |

Ambos gráficos trazados en el mismo sistema de coordenadas.




Considerando cualquiera de los dos procedimientos, obviamente, el resultado es el mismo:



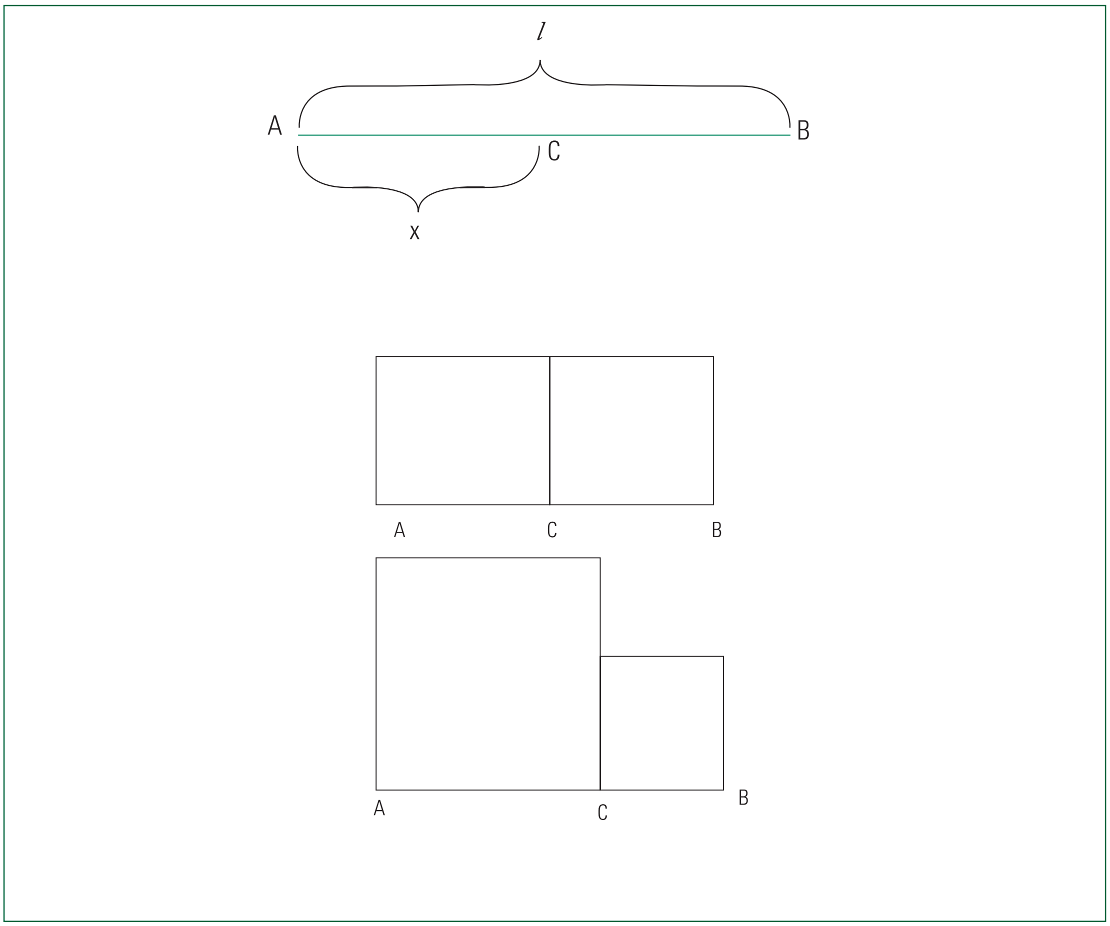
Ejemplo D

Dado el segmento AB de longitud $l$ y C un punto variable que pertenece al segmento, determinar los puntos C que hacen que $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$ tome el menor y el mayor valor posible.

INDICACIONES AL DOCENTE

Puede ser necesario partir con una situación numérica antes de generalizar.

Es necesario que los alumnos y alumnas representen el problema propuesto. Por una parte, pueden interpretarlo con énfasis en lo algebraico, a partir de un trazo y un punto C, nominando los trazos resultantes; por otra, pueden tener una interpretación más geométrica, como cuadrados que varían la longitud de sus lados, según la ubicación de C, como lo ilustran los dibujos siguientes.




A partir de cualquiera de estas interpretaciones se puede visualizar que si C se ubica en el punto medio, el valor de la expresión es mínimo.

Conviene graficar $y = x^2 + (l - x)^2$

También podría considerarse el segmento como si fuera una vara metálica que se dobla en ángulo recto en el punto C formando un triángulo rectángulo al unir, con la imaginación, los extremos de la vara. El desafío se transforma en determinar las condiciones del triángulo para que el cuadrado del largo de la hipotenusa sea mínimo (o máximo). Por el Teorema de Pitágoras se puede afirmar que es mínimo cuando el triángulo rectángulo es isósceles y su valor máximo es el largo de la vara, cuando el triángulo colapsa.

## Actividad 8

**Construyen parábolas como lugar geométrico, utilizando diversos recursos: informáticos, geométricos o de otra índole, e investigan acerca de tecnologías que utilicen propiedades de las parábolas en procesos de transmisión y recepción de ondas.**

Ejemplo A

Con un programa computacional, construir una parábola como el lugar geométrico de los puntos que tienen igual distancia a una recta y a un punto fijo que es el foco de la parábola.

INDICACIONES AL DOCENTE

Si se utiliza un programa computacional que grafique expresiones algebraicas, se pueden presentar las situaciones siguientes; si la expresión algebraica es una función, resultará una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje y; en caso contrario, la parábola podrá tener cualquier orientación.

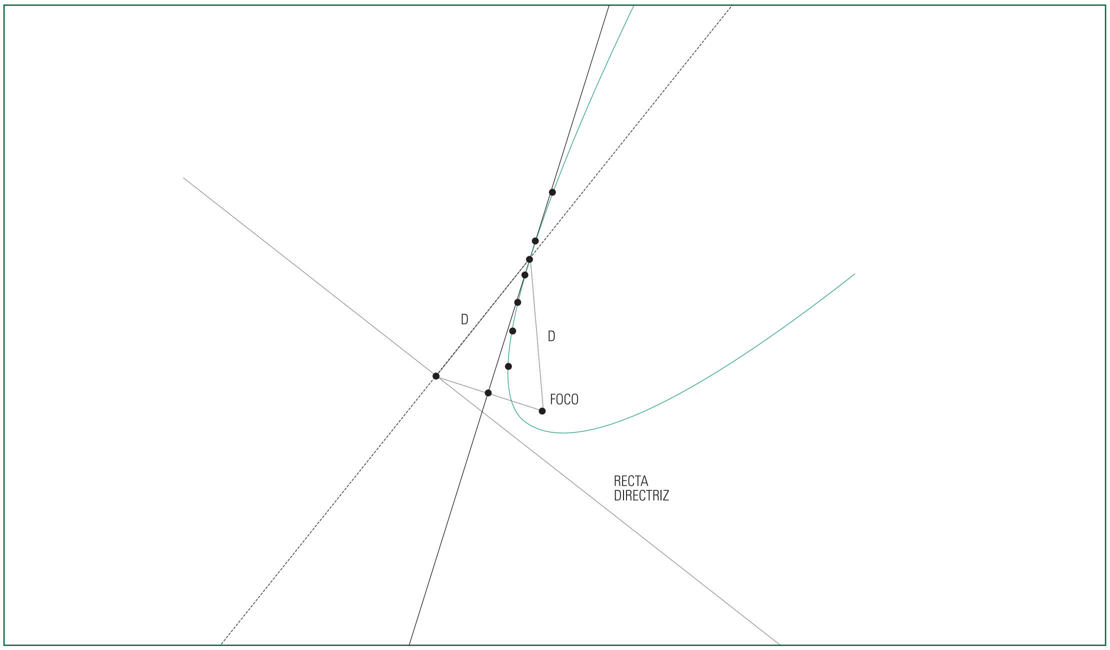
Si se utiliza un programa computacional de geometría, se podrá obtener una parábola en la orientación que se quiera, a partir de condiciones iniciales de tipo geométrico y no algebraico.

Ejmplo B

Dibujar una parábola utilizando instrumentos de geometría. En ocho o diez trasparencias trazar una recta y un punto en la misma ubicación relativa; en cada trasparencia construir varios puntos que equidisten de la recta y del punto; superponer esas trasparencias obteniendo así una imagen de puntos que pertenecen a una misma parábola.

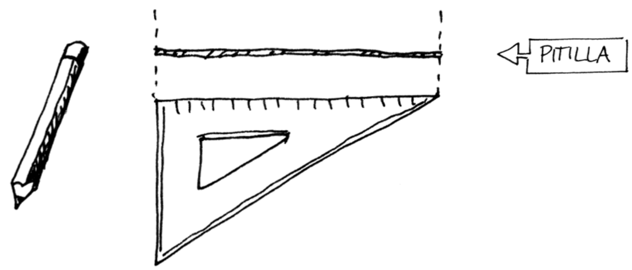
INDICACIONES AL DOCENTE

El desafío geométrico se centra en buscar maneras de dibujar puntos equidistantes de un punto y de una recta.

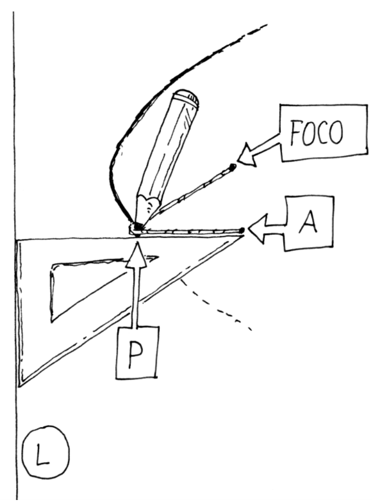


Ejemplo C

Dibujar una parábola utilizando una escuadra y una pitilla de algodón cuya longitud es igual a la medida de uno de los catetos de la escuadra, de preferencia al cateto mayor.




Trazar una recta L y marcar un punto, que será el foco de la parábola. Ubicar la escuadra con un cateto (el menor) sobre la recta. Fijar un extremo de la pitilla de algodón en el punto A (vértice del ángulo agudo de este cateto); el otro extremo de la pitilla se fija en el punto-foco.




Colocar un lápiz en el punto P, sobre el cateto, tensionando la pitilla que está fija en el foco y en el punto A.
Al deslizar la escuadra sobre la recta L, el lápiz describe una parábola sobre el papel.

INDICACIONES AL DOCENTE

Esta construcción puede ayudar a la comprensión del lugar geométrico a algunos alumnos y alumnas que tienen pensamiento más concreto. La equidistancia entre el foco y un punto de la parábola y entre este punto y la recta se evidencia por el trozo de pitilla.

Puede ser interesante abrir una discusión acerca de si parece concebible que la parábola se pueda obtener deformando una circunferencia. Esto se podría visualizar jugando con el haz de luz de una linterna. Así se ve, experimentalmente, cómo la circunferencia se deforma continuamente en una elipse, y cómo la parábola se puede "confundir" con una elipse con un foco cercano y uno muy lejano, y cómo, de hecho, la parábola es una elipse uno de cuyos focos se arrancó al infinito.

# Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada uno de ellos se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la Presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

## Actividad 1

**Comparan crecimientos modelados por diferentes funciones (lineal, cuadrática, raíz cuadrada, parte entera).**

Ejemplo A

¿Cuál de las siguientes expresiones representa un crecimiento más rápido?

$$y = x$$
$$y = 3x - 1$$
$$y = 2x^2$$
$$y = \sqrt{x}$$
$$y = [x]$$

Para un mismo intervalo de *x*, ¿cuál presenta el menor intervalo en *y*? Con un programa computacional ad hoc graficar estas funciones, ordenarlas de acuerdo a su crecimiento. Discriminar los intervalos para *x* en que estas diferencias de crecimiento varían.

*Observar si:*

I. *Utilizan valores para x.*
II. *Utilizan valores para intervalos en x.*
III. *Recurren al gráfico.*
IV. *Discriminan las situaciones en que las gráficas cambian su ubicación relativa.*

Ejemplo B

Comparar las funciones $f(x) = x^2$ con $g(x) = \sqrt{x}$ , para $x \geq 0$.
Comparar las funciones $f(x) = \frac{x^2}{2}$ con $g(x) = \sqrt{2x}$
Determinar puntos de intersección e intervalos de cambio de posiciones relativas de los gráficos.

*Observar si:*

I. *Comparan dando valores a x.*
II. *Comparan trazando el gráfico.*
III. *Expresan situaciones de intersección.*
IV. *Detectan los cambios de ubicación relativa de las gráficas.*

Ejemplo C

Analizar si las siguientes situaciones son o no posibles; explicar en cada caso.

I. Una parábola que intersecta al eje *x* en un punto.
II. Una parábola que intersecta al eje *x* en tres puntos.
III. Dos parábolas que intersectan en un solo punto al eje *x.*
IV. Una parábola que intersecta al eje *y* en un punto.

## Actividad 2

**Analizan y comparan la gráfica de una función al variar el valor de alguno de los parámetros.**

Ejemplo A

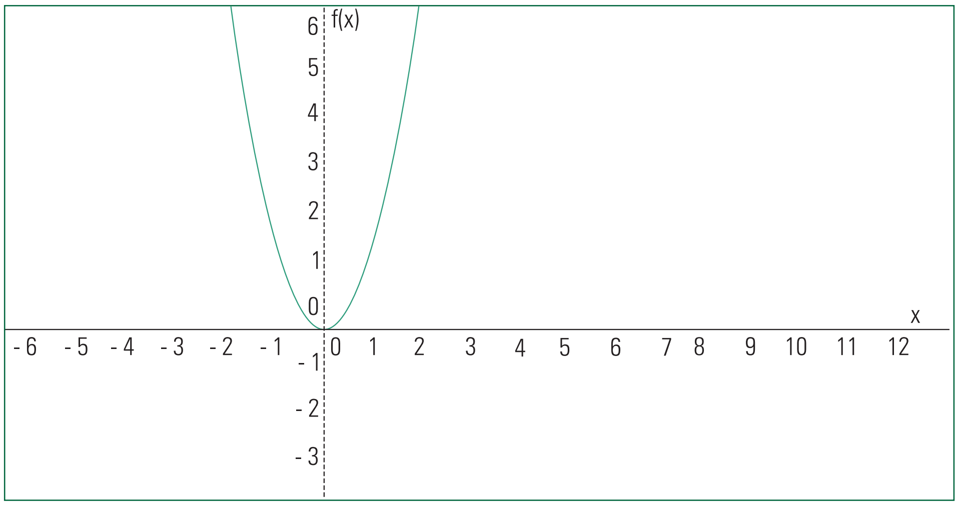
Graficar $f(x) = kx^2$ para distintos valores de *k* : enteros, racionales e irracionales, positivos y negativos. ¿Cómo influyen los valores de *k* en el gráfico?

*Observar si:*

I. *Visualizan el rol del signo del parámetro k.*
II. *Visualizan el rol, en términos de apertura de la parábola, de la magnitud del parámetro k.*

Ejemplo B

Considerar el gráfico siguiente que corresponde a $f(x) = 2x^2$.




Trace a mano alzada los gráficos de las siguientes funciones:

$$f(x) = \pi x^2$$
$$f(x) = \frac{1}{2} x^2$$
$$f(x) = \sqrt{2}\, x^2$$
$$f(x) = (2x)^2$$

*Observar si:*

I. *Ajustan la apertura entre las ramas de la parábola con la relación de orden entre los coeficientes.*

II. *Tienen o no dificultad con $\pi$ o con $\sqrt{2}$*

Ejemplo C

Graficar $f(x) = k\sqrt{x}$ para distintos valores de $k$ con $x \geq 0$.
¿Cómo influyen en el gráfico los distintos valores de $k$?

*Observar si:*

I. *Explican los cambios en la gráfica por las variaciones en k.*

II. *Si consideran valores negativos para k.*

## Actividad 3

**Resuelven problemas que involucran la resolución de ecuaciones de segundo grado.**

Ejemplo A

Suponer que los lados de un triángulo rectángulo son $x$, $x + 7$ y $x + 8$. Determinar el área del triángulo.

*Observar si:*

I. *Realizan la correspondencia entre los valores dados y los catetos e hipotenusa.*
II. *Recurren al dibujo.*
III. *Determinan la ecuación pertinente.*
IV. *Si resuelven la ecuación por factorización o utilizando la fórmula.*
V. *Si calculan el área.*

Ejemplo B

Determinar las dimensiones de un jardín rectangular si su área es 80 $m^2$ y para cercarlo se necesitan 36 m de malla.

*Observar si:*

I. *Recurren al dibujo o a la esquematización del problema.*
II. *Utilizan dos incógnitas para plantear el problema.*
III. *Si resuelven el sistema por sustitución.*
IV. *Si observan que la solución es única.*

## Actividad 4

**Estiman y comparan expresiones con raíces; efectúan operatoria.**

Ejemplo A

Para cada una de las secuencias siguientes, calcular los valores numéricos de cada término. Si las secuencias continuaran, conjeturar sobre del valor de los términos que siguen, señalar el intervalo al que pertenecerían los valores de la secuencia.

I. $0 \; ; \; \sqrt{0} \; ; \; \sqrt{\sqrt{0}} \; ; \; \sqrt{\sqrt{\sqrt{0}}} \; ;$

II. $1 \; ; \; \sqrt{1} \; ; \; \sqrt{\sqrt{1}} \; ; \; \sqrt{\sqrt{\sqrt{1}}} \; ;$

III. $2 \; ; \; \sqrt{2} \; ; \; \sqrt{\sqrt{2}} \; ; \; \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} \; ;$

IV. $\frac{1}{2} \; ; \; \sqrt{\frac{1}{2}} \; ; \; \sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}} \; ; \; \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}}} \; ;$

V. $1000 \; ; \; \sqrt{1000} \; ; \; \sqrt{\sqrt{1000}} \; ; \; \sqrt{\sqrt{\sqrt{1000}}} \; ;$

*Observar si:*

I. *Distinguen las secuencias constantes, que no requieren mayor cálculo, de aquéllas que no son constantes.*
II. *Utilizan calculadora sólo en las sucesiones no constantes.*
III. *Hasta qué elemento de la secuencia necesitan llegar par distinguir los diferentes crecimientos.*
IV. *Conjeturan a qué número convergen.*

Ejemplo B

Estimar con uno o dos decimales los valores para las siguientes expresiones:

$\sqrt{2} \; ; \; \sqrt{20} \; ; \; \sqrt{200} \; ; \; \sqrt{2000} \; ;$

$\sqrt{6} \; ; \; \sqrt{12} \; ; \; \sqrt{24}$

*Observar si:*

I. *Hacen estimaciones correctas.*
II. *Recurren a la calculadora para establecer las estimaciones.*

# Unidad 2

## Inecuaciones lineales

**Contenidos**

a. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita.

b. Intervalos en los números reales.

c. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones.

d. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.

## Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

Conocen y aplican procedimientos para resolver inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita; analizan la existencia y pertinencia de las soluciones y utilizan la notación apropiada.

Plantean y resuelven problemas que involucran inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita; analizan la existencia y pertinencia de las soluciones.

Distinguen ecuaciones e inecuaciones en términos del tipo de fenómeno que cada una puede modelar y entre inecuaciones y desigualdades.

### Orientaciones didácticas

Las expresiones “a lo menos”, “cuando mucho”, “como mínimo”, “como máximo”, “sobrepasa”, “no alcanza” y otras, están presentes en nuestro lenguaje diario y en general se refieren a situaciones en las cuales se establecen comparaciones entre dos magnitudes. Por ejemplo, que la máxima velocidad permitida en carretera es de 100 km/h, quiere decir que el rango de velocidades permitidas *v* se encuentra entre 0 y 100 km/h, y expresado en términos matemáticos, se escribe $0 < v \leq 100$. O bien, “el doctor indicó que debe bajar por lo menos 6 kg”, quiere decir que el peso ideal ($p_i$) es menor o igual que el peso actual ($p_a$) menos 6 kg, y expresado matemáticamente se escribe $p_i \leq p_a - 6$. Se ve, entonces, que las inecuaciones permiten modelar o representar algunas situaciones de comparación.

En la presente unidad se estudian las inecuaciones lineales con una incógnita, enfatizándose no sólo la operatoria, sino también la representación y análisis de los procesos de resolución involucrados y de las soluciones obtenidas, incluyéndose el caso de sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita. Los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas, que sirven de soporte para la programación lineal, se abordan en los Programas de Estudio de Formación Diferenciada.

La resolución de inecuaciones está estrechamente ligada a la resolución de ecuaciones, ya estudiada en años anteriores. Es importante apoyar a los estudiantes para que establezcan la relación entre ambos tipos de problemas, visualizando las similitudes y diferencias en los procesos de resolución. Muy particularmente, interesa que perciban la diferencia entre el tipo de soluciones que es posible obtener en cada caso.

En esta dirección, la incorporación de la notación de intervalos permite una mayor precisión y puede lograr mejores descripciones de situaciones y soluciones a problemas. La graficación de intervalos en la recta numérica es un buen soporte que facilita no sólo su visualización, sino también favorece la comprensión de la solución, especialmente en el caso de los sistemas de inecuaciones. Como siempre, es importante tener presente el referente al cual se circunscribe un problema específico. En el ámbito de los números naturales, la expresión $5 \leq x < 8$ representa al intervalo de números naturales 5,6,7. Sin embargo, en el ámbito de los números reales, ello representa a *todos* los números reales comprendidos entre 5 (inclusive) y 8 (excluido); esto es el intervalo [5, 8] en su notación habitual. Puede ser útil utilizar nociones básicas de la teoría de conjuntos, como pertenencia de un número a un intervalo determinado, y unión e intersección de intervalos.

# Actividades para el aprendizaje y ejemplos

## Actividad 1

**Leen, organizan, analizan y comunican información cuantitativa utilizando intervalos. Recurren a las formas gráfica y algebraica para indicar un intervalo específico o una expresión general de éstos. Traducen de un registro a otro.**

Ejemplo A

La refrigeración industrial de los alimentos permite controlar la velocidad de ciertas actividades químicas y enzimáticas, y el ritmo de crecimiento y metabolismo de ciertos microorganismos tóxicos.
El cuadro siguiente muestra la relación entre la temperatura medida en grados Celsius y el crecimiento microbiano.

| Grados C | Proceso |
|---|---|
| 35 | |
| 25 | |
| 15 | de crecimiento rápido |
| 10 | |
| 5 | |
| 0 | |
| -10 | sin crecimiento |
| -15 | |
| -25 | muerte lenta |

Fuente: A. Coenders, “Química culinaria”, Editorial Acribia, España, 1996.

I. Expresar esta información utilizando desigualdades.
II. Expresar esta información utilizando intervalos.
III. Proponer hipótesis de lo que sucede en los extremos de los intervalos.
IV. Proponer hipótesis de lo que sucede en el intervalo de 0° a 5° Celsius.

INDICACIONES AL DOCENTE

Considerando los intereses de los alumnos y las alumnas, se puede recoger información de diversos ámbitos que incorpore la lectura de intervalos y su traducción a diferentes registros, para su discusión.

Otras situaciones en que se encuentra o se reconoce intervalos:
En situaciones de enfermedad, si la temperatura de un paciente supera los 37º; se suele decir tiene un poco más de ... ; la fiebre varía entre ...
En reuniones sociales o de trabajo: vendrán entre tantas y cuantas personas.
En las compras, no puedo (o no quiero) gastar más de tanto dinero.
En la elaboración de documentos o informes: que no tenga más de tantas páginas.
Para indicar la rapidez de escritura: escribe entre tantas y cuantas palabras por minuto. Y otras muchas que indican velocidad máxima, altura mínima, variación de la temperatura ambiental, etc.

Ejemplo B

Anotar en el pizarrón algunos números como 0; -3,5; $\sqrt{2}$; 1,4; 30; pedir a los estudiantes que propongan un intervalo que:

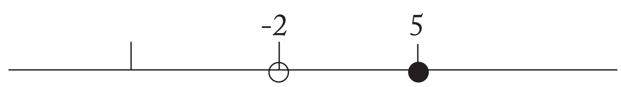
I. Contenga a todos estos números.
II. Contenga sólo $\sqrt{2}$.
III. No contenga ninguno de estos números.

En cada caso, analizar el número de respuestas posibles y correctas, graficar algunos intervalos en la recta numérica.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario que los estudiantes lean y expresen intervalos en cualquier registro.

Utilizar la convención de pequeñas circunferencias ennegrecidas o en blanco para indicar, en la representación en la recta numérica, si el extremo está o no incluido en el intervalo. Para ello, recurrir a un ejemplo como [-2,5] en el que además se puede pedir que reconozcan números que pertenecen al intervalo y otros que no estén en él.




Si el intervalo es cerrado se acostumbra a ennegrecer sus extremos en la recta numérica; si es abierto, sus extermos se dejan en blanco.

Ejemplo C

Graficar las rectas $y = 2x - 7$ e $y = -3x + 1$

En cada gráfico marcar los valores para $y$ que corresponden al intervalo de valores para $x$ dado por $-2 \leq x < 1$. Expresarlo utilizando desigualdades y notación de intervalos.

Comparar ambas respuestas. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma el valor de $y$ en ambos casos? ¿A qué valor de $x$ se asocia el valor mínimo de $y$ en cada caso?

Comparar la distancia entre los valores máximo y mínimo de $y$ que se asocien a los intervalos para $x$, $I_1 = [\ 2,5\ ]$ e $I_2 = [\ -2,1\ ]$ en cada una de las rectas.

Proponer un intervalo de valores para $y$ ; determinar el intervalo correspondiente para $x$.

INDICACIONES AL DOCENTE

Este ejemplo puede desarrollarse utilizando un par de gráficos de otra área de estudio.

También se puede desarrollar una actividad similar estudiando una relación que involucre valor absoluto, por ejemplo, $y = |\ 7x\ |$, determinando los valores de $y$ si $-3 \leq x \leq 1$.

Ejemplo D

El cuadro siguiente presenta criterios para clasificar empresas, propuestos por SERCOTEC, SII y CORFO.

| | Instituciones y criterios propuestos | | |
|---|---|---|---|
| | SERCOTEC | SII | CORFO |
| **Criterios** / **Categorías** | **Número de personas ocupadas (x)** | **Volumen de venta UF (y)** | **Nivel de inversión UF** |
| Microempresa | $1 \leq x \leq 4$ | $y \leq 2.400$ | No superior a 2.000 |
| Pequeña | $5 \leq x \leq 49$ | $2.401 \leq y \leq 25.000$ | No superior a 15.000 |
| Mediana | $50 \leq x \leq 199$ | $25.001 \leq y \leq 100.000$ | No superior a 45.000 |
| Grande | $200 \leq x$ | $100.001 \leq y$ | superior a 45.000 |

Fuente: CORFO.

Interpretar esta información de modo que permita, por ejemplo, redactar una nota que caracterice a la pequeña y mediana empresa suponiendo, por ejemplo, que esta nota será incluida en una campaña publicitaria relativa a facilidades tributarias para este tipo de empresas.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los estudiantes conozcan instituciones y servicios del Estado y tengan información sobre algunas de sus funciones.

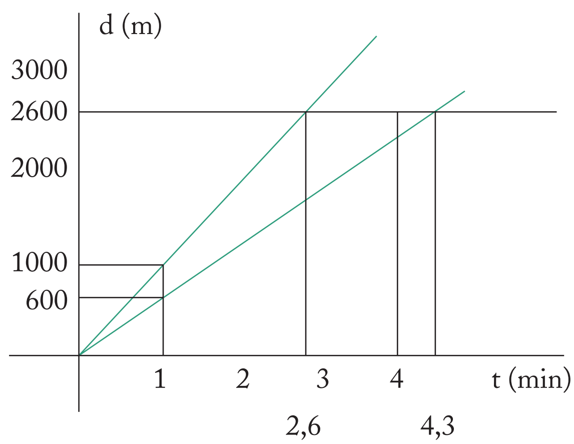
Será interesante comparar las diferentes formas en que se ordena y redacta la información que se sintetiza en el cuadro.

Ejemplo E

Un túnel de una determinada carretera mide 2.600 metros. Si los límites de velocidad son 36 km/h y 60 km/h, calcular el tiempo máximo y el mínimo que demora un auto en cruzar el túnel.

INDICACIONES AL DOCENTE

En este ejemplo es interesante la representación gráfica de la situación. Para hacerlo es conveniente hacer un cambio de unidades y trabajar con m/min.



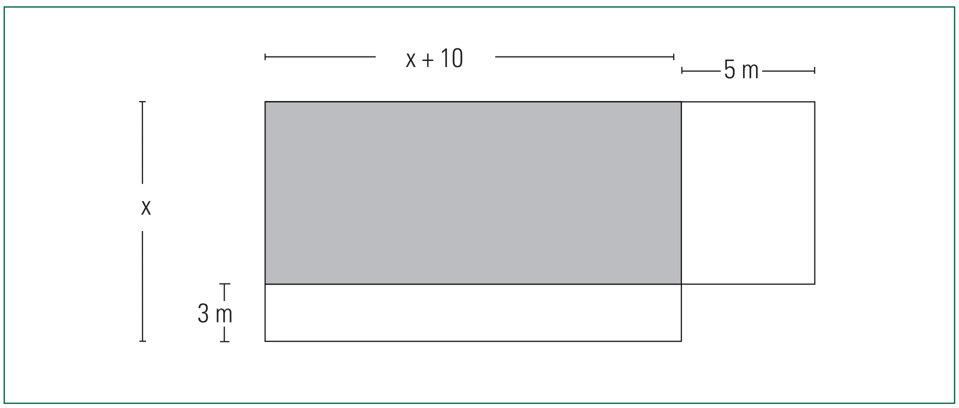

Es importante destacar que el tiempo, medido en minutos, que un vehículo está dentro del túnel varía en el intervalo [ 2,6 ; 4,3 ].

## Actividad 2

**Resuelven problemas y describen situaciones utilizando inecuaciones.**

Ejemplo A

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.
¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?




INDICACIONES AL DOCENTE

Inicialmente se puede considerar el caso particular en que el terreno mide 20 m de ancho por 30 m de largo y plantear a continuación esta situación más general.

Adicionalmente se puede enriquecer este problema planteando preguntas como las siguientes:

I. ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno hubiera sido el doble del largo?
II. Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?
III. Y, ¿Si el terreno hubiese quedado cuadrado después de las modificaciones?

Ejemplo B

Un comerciante compra una partida de 150 blusas por un total de $525 000. Vende al detalle 80 de estas blusas a $5.800 cada una.
¿A qué precio le conviene vender las blusas restantes en la temporada de liquidación si quiere obtener, como mínimo, un 35% de ganancia?

INDICACIONES AL DOCENTE

Este es un problema que tiene numerosas soluciones considerando que el mínimo de ganancia es 35% y no se señala un máximo. Las soluciones que provienen de los resultados del cálculo son infinitas; estas soluciones se restringen por las condiciones planteadas en el problema.

Proponer a los estudiantes, a partir de los datos, expresiones con desigualdades, como las siguientes:

$80 \cdot 5.800 + 70\,x - 525.000 \geq 35\ \%$ de $525.000$, o bien,

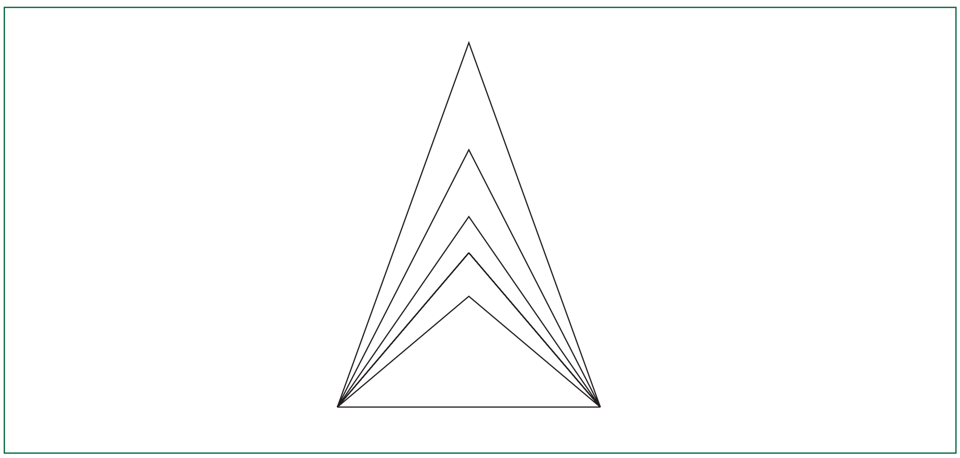
$80 \cdot 5.800 + 70\,x \geq 1{,}35 \cdot 525.000$

Pedirles que las traduzcan de acuerdo a los datos y contexto del problema.

### Ejemplo C

En la familia de triángulos isósceles cuyo lado desigual mide 15 cm, ¿cuáles tienen un perímetro inferior a 120 cm?

Si el lado desigual midiera *a* cm ¿qué condición cumplen aquellos que tienen un perímetro menor o igual que *b* cm?



INDICACIONES AL DOCENTE

Si se considera necesario se pueden resolver otros ejemplos numéricos antes de la situación general.

Adicionalmente, se puede calcular el rango de medida de las alturas de esta familia de triángulos isósceles.

### Ejemplo D

Se desea delimitar un terreno cuadrado que tiene un perímetro inferior a 65 m y un área mayor que 225 $m^2$ ¿qué medidas pueden tener sus lados? ¿Cuántas soluciones existen?

INDICACIONES AL DOCENTE

En la resolución de problemas de este tipo, los alumnos y alumnas suelen tener dificultades en expresar en inecuaciones el enunciado del problema y en interpretar los resultados de los cálculos realizados; estos dos momentos demandan más reflexión que la realización, a veces mecánica de un cálculo. Es importante apoyar el desarrollo de estas habilidades –de traducir a formas matemáticas y de interpretar el resultado de los cálculos– en la resolución de problemas.

Ejemplo E

Para calcular la relación, entre la masa corporal y la estatura (IMC) de una persona se utiliza la fórmula:

$$IMC = \frac{\text{Masa}}{(\text{Estatura})^2} \ {}^{Kg}\!/_{m^2}$$

Diversos estudios realizados, han concluido que el grupo de mejor salud y más esperanza de vida corresponde a un IMC comprendido entre 20 y 25.
Utilizando la fórmula para el IMC, calcular el rango de los pesos entre los cuales se pueden encontrar personas que miden entre 1,50 m a 1,80 m.
Una persona que tiene un IMC en el límite inferior, mide 1,74 m. Para ser considerada saludable, ¿cuál debiera ser su peso?

INDICACIONES AL DOCENTE

Los alumnos y alumnas podrán calcular este índice para cursos de Educación Básica, por ejemplo, de 5º ó 6º Año Básico, y relacionarlo con el problema de obesidad infantil y la importancia de la calidad de la alimentación.

Por tratarse de adolescentes, realizar comparaciones en relación con este índice, al interior del curso, podría resultar amenazante para aquellos alumnos y alumnas que estén fuera del rango considerado bueno.

## Actividad 3

**Resuelven inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita; expresan las soluciones en forma gráfica y en notación de desigualdades; analizan las soluciones y su pertinencia.**

Ejemplo A

Resolver inecuaciones como las siguientes. Expresar la solución en forma gráfica y algebraica. Comparar las soluciones de los ejercicios e), f) y g).

a) $x + 2 < -0{,}5$

b) $1 - 4x \leq x$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > 5 - \frac{x}{6}$

d) $3\,(5 - x) > 3$

e) $x - 1 \leq \frac{1}{2}$

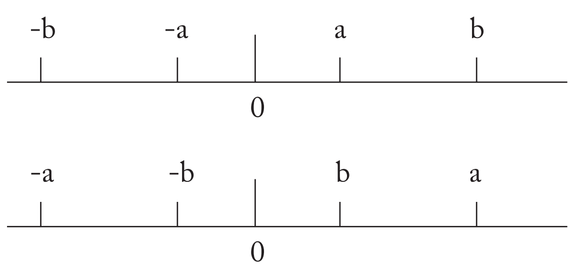
f) $1 - x \leq \frac{1}{2}$

g) $x - 1 = \frac{1}{2}$

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugieren dos formas alternativas para trabajar la multiplicación de una inecuación por un número negativo.

I. Utilizar la recta numérica, poniendo en juego la reflexión respecto al origen, para comprender cómo el cambio de signo afecta la orientación de la desigualdad.

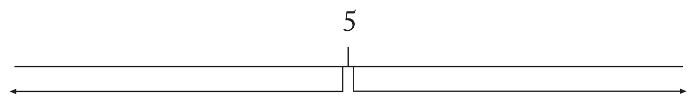



$a < b \iff -a > -b$

II. Si en la resolución de una inecuación se llega a una expresión de la forma $-x < a$, se puede sumar $x - a$ en ambos miembros de la inecuación y se obtiene $-a < x$.

Además, la expresión gráfica de la solución de una inecuación permite apreciar la diferencia con el tipo de solución de una ecuación. En el ejemplo que se ilustra a continuación, x = 5 es un punto de la recta; éste la separa en las semirectas $x < 5$ y $x > 5$.

$$x - 2 = 8 - x$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$




| | |
|---|---|
| $x - 2 < 8 - x$ | $x - 2 > 8 - x$ |
| $2x < 10$ | $2x > 10$ |
| $x < 5$ | $x > 5$ |

Ejemplo B

Resolver sistemas de inecuaciones, graficar las soluciones y expresarlas algebraicamente.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 1 > 5 \\ 5x - 2 > -4 \end{array}\right|$

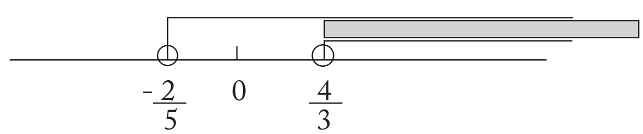
b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 1 > 7 \\ 5x - 2 < 8 \end{array}\right|$

c) $-2 \leq 7 + 3x < 8$

INDICACIONES AL DOCENTE

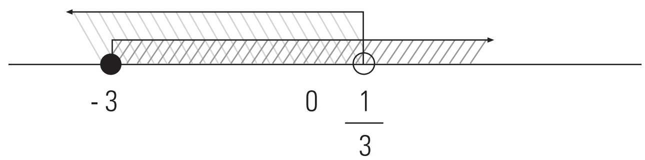
La solución de estos sistemas se puede representar gráficamente como la intersección de dos intervalos, en la recta numérica.

En el caso del sistema a), la solución está constituida por los números reales mayores que $\frac{4}{3}$.




En el caso b) no hay ningún número que satisfaga ambas inecuaciones simultáneamente. Si éstas se plantearan como inecuaciones no estrictas, la solución sería el número 2.

En el caso c), la solución es [-3, 1/3]
Gráficamente se tiene:




Para explicitar las soluciones de sistemas de inecuaciones lineales con una variable, es posible utilizar la expresión gráfica en la recta numérica, la notación habitual de intervalos o desigualdades, o bien la intersección de intervalos.

Ejemplo C

Resolver inecuaciones sencillas que involucren valor absoluto. Comparar las soluciones que se expresan por unión de intervalos con aquéllas referidas a intersección de intervalos.

a) $|x| \geq 45$ b) $|x| \leq 60$ c) $|x + 5| < 2$

d) $|2x - 7| > 5$ e) $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$ f) $|1 - x| \leq \frac{1}{2}$

Ejemplo D

Comparar las soluciones de la ecuación y la inecuación siguiente:

$|x| = 5$ $|x| \leq 5$

INDICACIONES AL DOCENTE (PARA EJEMPLOS C Y D)

Conviene enfatizar la interpretación del valor absoluto como distancia al origen. Las inecuaciones de arriba se pueden entonces interpretar como preguntas del tipo: ¿dónde se ubican los números que se encuentran a menos (o a más) de tantas unidades del origen?

También se podría contextualizar con ejemplos de móviles que se acercan al origen hasta llegar a una cierta distancia mínima o bien que se alejan de él.

En estos ejercicios las soluciones se pueden expresar en su forma gráfica utilizando la recta numérica, recurriendo a la notación habitual de desigualdades, o bien por medio de la unión o de la intersección de intervalos.

Ejemplo E

¿Cuáles números satisfacen la condición de ser mayores que su cuadrado?

INDICACIONES AL DOCENTE

En este caso se busca el intervalo de valores para x que satisfagan la inecuación siguiente $x > x^2$. Es importante comentar los procedimientos de solución que se derivan si se anota $x - x^2 > 0$, o bien, $0 > x^2 - x$ que se traducen, respectivamente en $x ( 1 – x ) > 0$ o en $0 > x ( x - 1 )$. La resolución de cualquiera de estas inecuaciones requiere analizar las condiciones para que el producto de dos números sea positivo o negativo. Este análisis lleva a plantear un sistema de inecuaciones.
En la unidad anterior se analizó este ejemplo desde la representación gráfica.

## Actividad 4

**Estudian desigualdades literales, conjeturan sobre su rango de validez y realizan demostraciones sencillas.**

Ejemplo A

Considerar un rectángulo de área igual a 1. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar el semiperímetro? o bien, ¿entre qué valores varía el semiperímetro?

INDICACIONES AL DOCENTE

Esta es una ocasión para motivar a los estudiantes a hacer “geometría dinámica”. En la geometría dinámica, se varía o deforma continuamente unas figuras en otras. En este caso se hace crecer un lado del rectángulo y se achica el otro, permaneciendo su área constante igual a 1.

Una manera de abordar este ejemplo es construyendo una tabla de valores como la siguiente en que *a* es la medida de uno de los lados del rectángulo.

| **a** | $\frac{1}{a}$ | $a + \frac{1}{a}$ |
|---|---|---|
| 1,0 | | |
| 2,0 | | |
| 2,5 | | |

Para completar la tabla, es conveniente utilizar una calculadora o, mejor aún, una planilla de cálculo. Su uso da rapidez y agilidad al ejercicio y se dispone de tiempo para la reflexión y de numerosos resultados para establecer conjeturas.

Considerando los resultados que se obtienen para valores de *a* próximos a 1, se genera “la evidencia” que todos los resultados son mayores que 2 y que si $a = 1$ el resultado es 2.

Otra manera sería hacer el gráfico de los puntos $(a, 1/a)$; se obtiene la rama positiva de la hipérbola $ab = 1$, cada uno de cuyos puntos es el vértice superior derecho de un rectángulo con vértice opuesto en el origen.

Todos estos rectángulos tienen área 1 y se puede ver que el de menor perímetro es el central, aquel que tiene su vértice superior derecho donde la diagonal $b = a$ corta la hipérbola.

Además, es bastante claro cómo el perímetro tiende a infinito al irse hacia los extremos. Es oportuno plantear que esta ¨evidencia¨ empírica debiera confirmarse con una demostración.

Para desarrollar la demostración se puede partir desde la conjetura, transformarla algebraicamente en expresiones equivalentes y determinar si la expresión que finalmente se obtiene es o no verdadera.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$a^2 + 1 \geq 2a$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

Es importante aclarar que en cada paso se ha hecho una transformación de una expresión en otra equivalente. Si así no fuera, la lectura desde la conclusión final no implicaría la conjetura inicialmente planteada.

Ejemplo B

Considerando expresiones algebraicas del tipo $\frac{n+1}{n}$, determinar a qué intervalo pertenecen los valores de esta expresión:

I. para valores naturales de n,

II. para enteros negativos.

INDICACIONES AL DOCENTE

Este tipo de situación es similar a las planteadas en relación con lenguaje algebraico en el Programa de Segundo Año Medio.

Si se considera oportuno se podrán proponer algunos ejemplos numéricos antes del caso general. Estos se pueden desarrollar con ayuda de calculadora o con una planilla de cálculo.

Invitar a los alumnos y alumnas a plantear conjeturas completando una tabla de valores como la siguiente:

| $n$ | $n + 1$ | $\frac{n+1}{n}$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

Desde otra perspectiva se puede hacer notar que $\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n}$ , de donde se puede deducir que:

I. Si $n$ es un número natural y distinto de 0, se obtiene $1 < \frac{n}{n} + \frac{1}{n} \leq 2$.

II. Si $n$ es entero negativo, se obtiene $0 \leq \frac{n}{n} + \frac{1}{n} < 1$.

También se puede incorporar el análisis de la expresión inversa $\frac{n}{n+1}$ y determinar a qué intervalo pertenece.

Ejemplo C

Constatar para diversos valores de a y de b, la equivalencia

$a < b \iff -a > -b$

INDICACIONES AL DOCENTE

En estos ejemplos que involucran generalizaciones es recomendable considerar ejemplos numéricos. La tabla de valores es una buena herramienta que permite visualizar relaciones entre los números.

| **a** | **b** | **– a** | **– b** |
|---|---|---|---|
| 5 | 100 | – 5 | – 100 |
| – 10 | 55 | 10 | – 55 |
| | | | |

También la recta numérica es un buen apoyo para visualizar el cambio de signo y el de la orientación de la desigualdad.

Ejemplo D

Comparar $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$ , si se sabe que $0 < a < b$

INDICACIONES AL DOCENTE

En este caso, en forma análoga a los ejemplos anteriores, una tabla de valores se constituye en una herramienta para visualizar las relaciones entre los números. También, el uso de calculadora o de planilla de cálculo tienen gran utilidad para generar una gran cantidad de resultados numéricos.

Ejemplo E

Determinar cuál es el valor más pequeño para $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ , si a y b son dos números del mismo signo y distintos de cero.

INDICACIONES AL DOCENTE

En forma similar a los ejemplos anteriores, completan una tabla de valores puede ser útil; es conveniente el uso de calculadora o de una planilla de cálculo.

| **a** | **b** | $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| – 1 | – 1 | 2 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{13}{6}$ |
| | | |

Invitar a los alumnos y alumnas a proponer conjeturas, a expresarse.
Notar que si *a* y *b* tienen el mismo signo, $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son ambas positivas. Además $\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}$; comparar con el ejemplo A.

Ejemplo F

Demostrar que:

I. $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$ , para cualquier valor real de a

II. $(1+a)(1+b) \geq 4$ , si $a > 0$, $b > 0$ y $ab = 1$

INDICACIONES AL DOCENTE

En forma análoga a los ejemplos anteriores para una mejor comprensión de una demostración es conveniente que los alumnos y alumnas constaten la validez de una expresión para diversos valores numéricos y posteriormente intenten una demostración general.

Es interesante observar que ambos resultados pueden obtenerse inmediatamente del estudio de $a+\frac{1}{a}$ planteado anteriormente, porque

$$\frac{a^2}{1+a^4}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+a^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a^2}+a^2 \geq 2$$

y porque $(1+a)(1+b) = 1 + a + a^{-1} + 1$, puesto que $b = a^{-1}$

En todos estos ejemplos los estudiantes han tenido la oportunidad de utilizar la operatoria algebraica aprendida en los años anteriores para transformar las expresiones.

# Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada uno de ellos se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la Presentación de este programa:
- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

## Actividad 1

**Traducen enunciados sencillos a expresiones con inecuaciones; resuelven inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita.**

### Ejemplo A

¿Qué números enteros cumplen simultáneamente con las dos condiciones siguientes?:

I. El doble del número más 3 es menor que 11.
II. El triple del número más dos es mayor que 5.

*Observar si:*

*I. Traducen las expresiones verbales a inecuaciones.*
*II. Reconocen ambas expresiones como un sistema.*
*III. Resuelven el sistema de inecuaciones.*
*IV. Analizan y comprueban las soluciones.*
*V. La manera de presentar las soluciones permite una comunicación clara y precisa.*

### Ejemplo B

¿Qué números enteros no se alcanzan a triplicar al añadirle 6 unidades a su mitad?

*Observar si:*

*I. Traducen las expresiones verbales a inecuaciones; si se equivocan con la orientación de la desigualdad, al interpretar y traducir 'no se alcanza a triplicar', la corrigen como producto de reflexiones durante o al término del problema.*
*II. Resuelven la inecuación.*
*III. Analizan y comprueban las soluciones.*

Ejemplo C

Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{(x+3)}{2} < 5 \\ 2 - \dfrac{2x}{7} \leq 0 \end{array}\right|$$

Expresar la solución en forma gráfica y utilizando intervalos.
Si se quiere que la solución del sistema sea $x = 7$, ¿qué cambios habría que realizar en los signos de las desigualdades en las inecuaciones propuestas?

*Observar si:*

*I. Resuelven las inecuaciones propuestas.*
*II. Obtienen la solución con intersección de los intervalos.*
*III. Analizan y comprueban las soluciones.*
*IV. Cambian $<$ por $\leq$ en la primera desigualdad, para que la solución sea $x = 7$.*

## Actividad 2

**Resuelven problemas que involucran la resolución de inecuaciones o de sistemas de inecuaciones con una incógnita.**

Ejemplo A

Las dimensiones de una mesa rectangular se han medido con una imprecisión menor que 1cm. Los valores para las longitudes a y b son: $130 \leq a \leq 131$ y $65 \leq b \leq 66$.
¿Entre qué números está comprendido el perímetro? ¿Entre qué números está comprendida el área?

*Observar si:*

*I. Comprenden el sentido del problema.*

*II. Hacen los cálculos correspondientes.*

*III. Expresan sus resultados en forma de desigualdades, utilizando intervalos o gráficamente.*

Ejemplo B

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años. ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?
¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tiene la misma edad? ¿Cuáles son esas edades?

*Observar si:*

*I. Identifican las edades de ambos y expresan cómo se relacionan.*

*II. Traducen a una inecuación las condiciones del aforismo.*

*III. Resuelven la inecuación.*

*IV. Proponen una respuesta, la analizan en relación con el problema.*

*V. Proponen una nueva inecuación para el caso que las edades sean iguales.*

*VI. Resuelven la inecuación, plantean y analizan la respuesta.*

Ejemplo C

¿Cuáles son las medidas de los rectángulos que tienen la altura igual al triple de la base y el área menor que 17 $cm^2$ ? Entre estos rectángulos, ¿cuáles tienen sus lados con medidas enteras?

*Observar si:*

*I. Hacen un dibujo para comprender el problema.*

*II. Plantean la ecuación que relaciona la base con la altura y la inecuación que relaciona el área con 17.*

*III. Resuelven la inecuación; reconocen la necesidad de aproximar una raíz cuadrada.*

*IV. Llegan a constatar que la medida de la base está entre 2,3 cm y 2,4 cm.*

*V. Comprueban los resultados que obtienen.*

*VI. Identifican las medidas enteras que son solución al problema.*

## Actividad 3

**Analizan afirmaciones relativas a las soluciones de inecuaciones y de sistemas de inecuaciones; asignan un valor de verdad; lo explican y discuten en grupo.**

Ejemplo

Consideran las siguientes afirmaciones:

1. Existen inecuaciones de primer grado con una incógnita que admiten sólo una solución.
2. Existen inecuaciones de primer grado con una incógnita que no tienen solución.
3. Existen inecuaciones de primer grado con una incógnita tales que todos los números reales son su solución.
4. Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita no puede tener una solución única en los números reales.
5. Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita no puede tener todos los números reales como solución.
6. Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita siempre tiene, a lo menos, un número como solución.
7. Existen sistemas de inecuaciones lineales sin solución.

*Observar si:*

*I. Tienen claro que la solución de una inecuación es un intervalo que contiene una infinidad de números.*

*II. Tienen claro que la solución de un sistema de inecuaciones es la intersección de intervalos; que ésa puede ser vacía, contener un elemento, o bien, contener infinitos elementos.*

*III. Consideran como inecuaciones aquellas que incorporan valor absoluto y que en ese caso se trata de un sistema de inecuaciones.*

# Unidad 3

## Más sobre triángulos rectángulos

### Contenidos

a. Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.

b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.

d. Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentarios sobre el Teorema de Fermat.

### Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

Reconocen que las razones trigonométricas son cuocientes invariantes entre las medidas de los lados, en familias de triángulos rectángulos semejantes.

Conjeturan sobre propiedades geométricas en triángulos rectángulos semejantes, las demuestran utilizando diversos recursos argumentativos.

Resuelven problemas que involucran propiedades de los triángulos rectángulos; analizan las soluciones que se obtienen y su pertinencia.

Reconocen el sentido y la necesidad de la demostración en matemática y, en particular, conocen la historia del Teorema de Fermat-Wiles y los tríos pitagóricos.

### Orientaciones didácticas

El desarrollo de esta unidad presenta dos importantes pilares; uno relativo a las funciones trigonométricas elementales a partir de razones entre las longitudes de los lados, definidas en el triángulo rectángulo y sus aplicaciones a la resolución de problemas; el otro referido a los teoremas de Euclides y de Pitágoras en los que importan tanto las propiedades que se generalizan para todos los triángulos rectángulos como el proceso de llegar a proponer una demostración.

Interesa que los estudiantes tengan una primera aproximación a la trigonometría por medio de las razones trigonométricas, una extensión a las funciones seno y coseno en el círculo unitario, su uso en la resolución de problemas y la demostración de algunas propiedades básicas.

En relación con los Teoremas de Euclides y de Pitágoras, este último es una relación conocida desde la Educación Básica; en esta oportunidad se retoma, principalmente desde sus demostraciones; algunas muy próximas a la intuición y otras más formales, pero todas con rigor y válidas en la matemática escolar.

Estos teoremas ponen de relieve el interesante tema de los números irracionales; en el desarrollo de esta unidad se propone la construcción de longitudes relativas de algunas raíces, como aplicación de estos teoremas.

La resolución de problemas cruza el desarrollo de esta unidad; hay una invitación a resolver problemas en contextos diversos: geométricos, de mediciones de alturas y distancias, incluyendo lo espacial, sin llegar a especificidades de la trigonometría esférica.

# Actividades para el aprendizaje y ejemplos

## Actividad 1

**En triángulos rectángulos semejantes definen seno, coseno y tangente de sus ángulos agudos.**

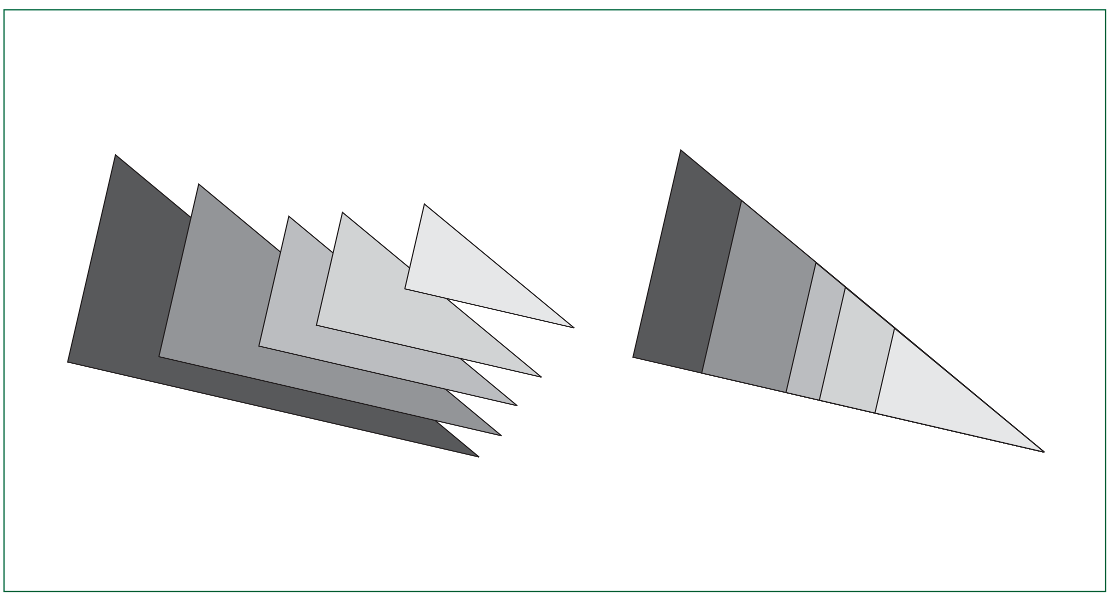
Ejemplo A

Analizan la semejanza en triángulos rectángulos y especifican los teoremas estudiados en Segundo Año Medio; establecen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, para los ángulos de triángulos rectángulos.

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos se den cuenta de que la igualdad de medida de un ángulo de un triángulo rectángulo especifica familias de triángulos que son semejantes entre sí.

Al superponerlos, de modo que uno de los ángulos coincida, se genera paralelismo entre los terceros lados como lo indica el dibujo.



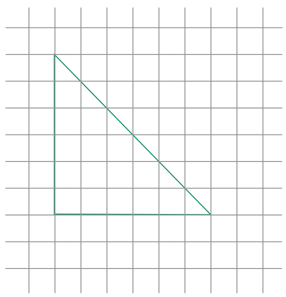
Se puede organizar el curso de modo que cada participante de un grupo de trabajo se ocupe de los cálculos de uno de los triángulos, comparen los resultados que obtienen y hagan las aproximaciones pertinentes.

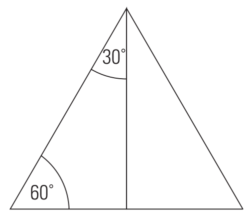
Ejemplo B

Calcular el valor de las funciones seno, coseno y tangente para ángulos de 45º , de 30º y de 60º.

INDICACIONES AL DOCENTE

Caracterizar un triángulo isósceles rectángulo y determinar los valores de estas funciones para el ángulo de 45º.

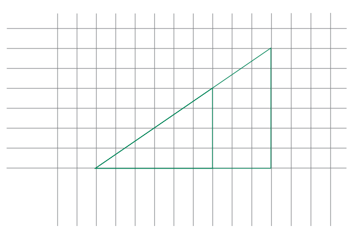





Generar triángulos rectángulos trazando la altura en un triángulo equilátero; constatar que seno 60º es igual coseno de 30º y que en general *sen* $\alpha$ = *cos* $(90 - \alpha)$ y viceversa.

Ejemplo C

Utilizar el cuadriculado del cuaderno de matemática para dibujar triángulos rectángulos semejantes en los que sea fácil determinar la razón entre los lados.
En el dibujo se ilustran dos triángulos rectángulos semejantes, cuyos lados están en la razón 3 : 2. Determinar con un transportador la medida de uno de los ángulos interiores.



INDICACIONES AL DOCENTE

Estos ejemplos se pueden ampliar si se utiliza papel milimetrado.

Interesa que los estudiantes se den cuenta de que una misma razón entre las medidas de los lados determina la misma medida para el ángulo agudo.

## Actividad 2

**En el círculo unitario establecen las funciones seno y coseno; construyen artesanalmente y con algún programa computacional o calculadora gráfica los gráficos de ambas funciones. Demuestran algunas igualdades trigonométricas básicas.**

### Ejemplo A

En el círculo unitario, reconocen los segmentos cuyas longitudes toman los valores de las funciones seno y coseno, para ángulos menores de 90°.

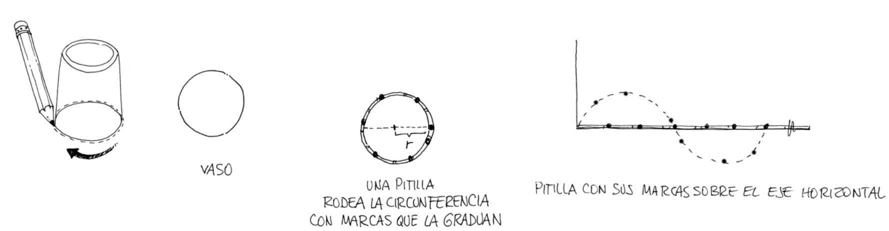
INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que en el desarrollo de este ejemplo los estudiantes comprendan que las longitudes de estos segmentos están en relación con la longitud arbitraria que se considera igual a la unidad; además, que el triángulo que se genera en cada caso es semejante con todos los otros triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo de esta medida.

Para extender a ángulos mayores de 90° es aconsejable conocer antes el gráfico de estas funciones.

### Ejemplo B

Grafican artesanalmente la función seno.
Colocar un vaso boca abajo en una hoja de papel y dibujar en ella la circunferencia definida por el vaso.
Enrollar en torno al borde del vaso una pitilla graduada, tomando como unidad de longitud el radio de la circunferencia dibujada; considerar fracciones de esa unidad de medida.
Trazar un diámetro en la circunferencia y marcar en ella, a partir de uno de los extremos del diámetro, las unidades de longitud que gradúan la pitilla.
Dibujar un sistema de coordenadas de modo que el eje $x$ esté en la misma recta que el diámetro. Disponer la pitilla graduada sobre el eje $x$ del sistema de coordenadas. Transportar las alturas relativas al diámetro de las marcas a su ubicación correspondiente al gráfico. Se obtiene así un gráfico de función *seno* $\alpha$ en que $\alpha$ esta medido en radianes.



INDICACIONES AL DOCENTE

Antes de graficar con la calculadora, puede ser conveniente proponer a los alumnos y alumnas un método artesanal de construcción del gráfico del seno.

Esta construcción da una oportunidad de recordar lo que es el número $\pi$.

### Ejemplo C

Utilizan una calculadora científica para conocer los valores de las funciones seno y coseno para ángulos menores de 180°.

INDICACIONES AL DOCENTE

Invitar a los alumnos y alumnas a observar el cambio en la pantalla de una calculadora científica si se presiona un número y la tecla send. Graficar esta relación considerando medidas para los ángulos que se incrementan de 10 en 10.

Al utilizar la calculadora se puede llegar en el gráfico hasta ángulos de 180° o más. Esto permite volver sobre el círculo unitario y explicar los segmentos que corresponden a las funciones seno y coseno para ángulos del segundo cuadrante u otros, analizando el signo de las funciones en estudio.

Es recomendable aclarar que estos valores para la función seno y para las otras funciones trigonométricas son, generalmente, números irracionales; la calculadora ofrece aproximaciones de ellos.

Será necesario explicar el funcionamiento de la calculadora en relación con las unidades de medida de los ángulos: rad, deg y grad.

### Ejemplo D

Demostrar que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

INDICACIONES AL DOCENTE

Esta igualdad se pueden demostrar partiendo de las definiciones de las razones en el triángulo rectángulo o bien, a partir del círculo unitario. Es necesario establecer la relación con el Teorema de Pitágoras.

## Actividad 3

**Establecen medidas de lados y ángulos de triángulos rectángulos a partir de los valores de funciones trigonométricas.**

Ejemplo A

Construir un triángulo rectángulo si se conoce el seno (o el coseno, o bien, la tangente) de uno de sus ángulos agudos.
¿Cuántas soluciones hay?

INDICACIONES AL DOCENTE

Suponer algún valor para las funciones trigonométricas; si el seno de $\alpha$ es 0.43, (o si el coseno de $\beta$ es 0.2) determinar medidas para los lados del triángulo rectángulo.

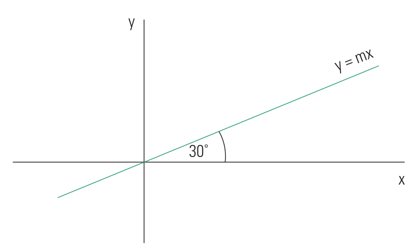
Se pueden calcular estas medidas fijando arbitrariamente la medida de uno de los catetos, y la medida de los otros lados se calculan.

Este tipo de problemas es muy interesante porque ofrece infinitas soluciones.

En todos los casos en que se utilice calculadora es necesario insistir sobre la necesidad y la importancia de la aproximación.

Ejemplo B

En el gráfico que sigue, la recta $y = mx$ forma con la parte positiva del eje de las $x$, un ángulo de 30º. Determinar la ecuación de la recta.




INDICACIONES AL DOCENTE

Es muy importante que los estudiantes establezcan relaciones entre los conceptos y conocimientos matemáticos. En Primer Año Medio se familiarizaron con la constante de proporcionalidad; en Segundo Medio generalizaron a la pendiente de una recta; ahora la pueden entender como la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las $x$.

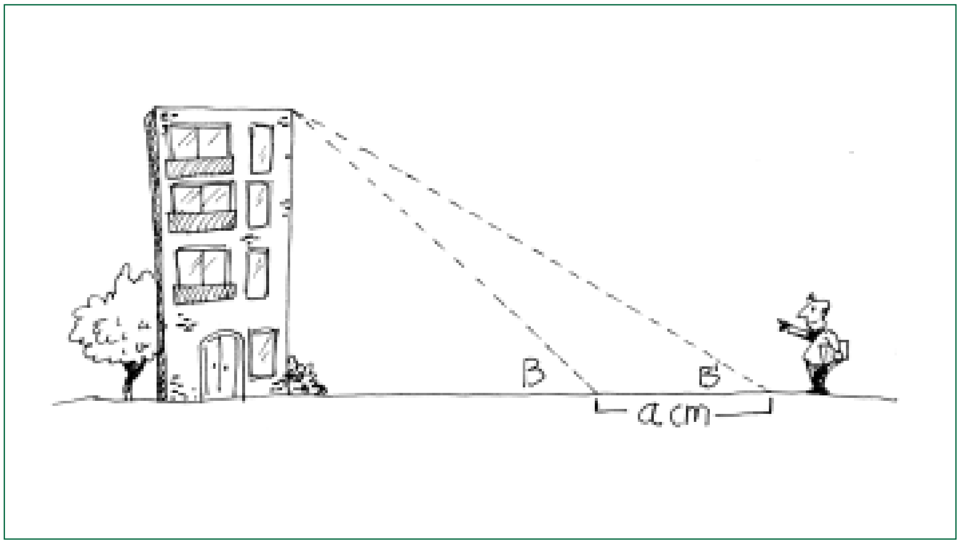
Generalizar a la determinación de una ecuación de la forma $y = mx + n$ si se conoce el punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas y la medida del ángulo que forma con el sentido positivo del eje $x$.

## Actividad 4

**Resuelven problemas sencillos, de diversos ámbitos, utilizando directamente las funciones trigonométricas.**

Ejemplo A

Determinar la altura de una torre ( o de un árbol o edificio), suponiendo que no es posible medir la distancia entre la base de la torre y el observador y que sí es posible que éste mida el ángulo de elevación desde dos puntos diferentes que son colineales a la base de la torre, y que conoce la distancia entre ambos puntos.

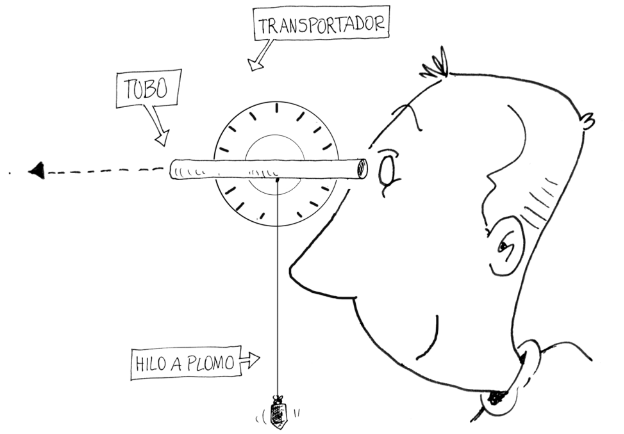



INDICACIONES AL DOCENTE

Incentivar que los alumnos y alumnas propongan diversos métodos para medir la altura de una torre.

Es también conveniente dejar que los estudiantes constaten, comparando sus resultados, que si la diferencia entre β y β' es pequeña, al redondear el valor de las tangentes se puede incurrir fácilmente en un error excesivo, de un 10% o más, en la estimación obtenida para la altura de la torre.

Si es necesario medir el ángulo de elevación, se puede construir un goniómetro artesanal, elaborado con un transportador, un hilo a plomo y un tubo de más o menos 15 a 20 cm de largo, como lo ilustra el siguiente dibujo.



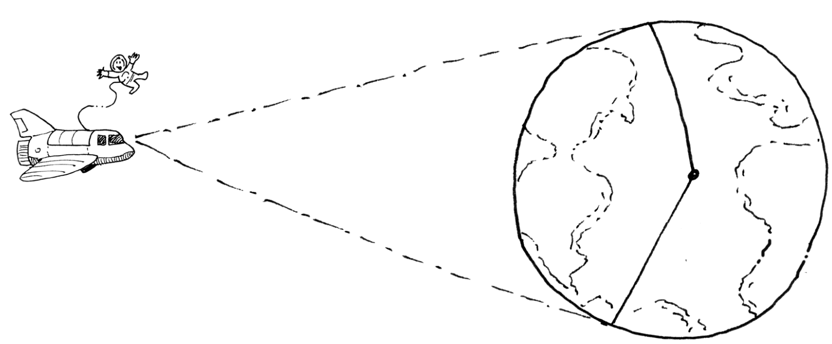

El transportador y el tubo deben estar unidos formando un todo solidario en relación con el movimiento, de modo que, al inclinar el tubo para mirar el extremo superior de un edificio, el hilo a plomo marcará en la gradación del transportador el ángulo de elevación.

Ejemplo B

Calcular la distancia entre la Tierra y una nave espacial si desde ésta se ve la Tierra bajo un ángulo de 20,5º, sabiendo que el radio de la Tierra es 6.366 km aproximadamente.

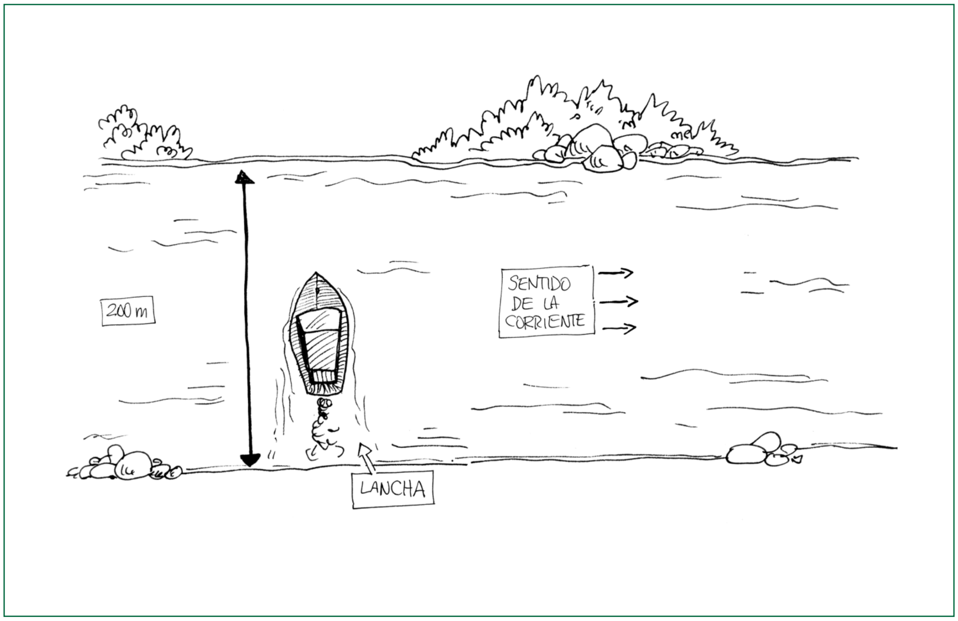
INDICACIONES AL DOCENTE

Un esquema que refleje las relaciones propuestas en el problema es de gran ayuda para definir una manera de abordarlo y resolverlo.



Ejemplo C

Una persona desea cruzar en lancha un río cuyo ancho es 200 m. Si la corriente del río es 30 km/h y la lancha se desplaza perpendicularmente a la corriente a una velocidad de 80 km/h, ¿cuál es la distancia que recorre la lancha en este viaje?




INDICACIONES AL DOCENTE

En la resolución de estos problemas es interesante coordinar acciones con el profesor o profesora de Física, tanto para precisar conceptos como para que los estudiantes perciban la importancia de la matemática en el desarrollo de las ciencias.

Ejemplo D

Calcular el área de un octógono regular en función del lado *a*. ¿Se puede calcular el área de cualquier polígono regular en función del lado?

INDICACIONES AL DOCENTE

Será interesante resolver este ejemplo suponiendo una medida numérica para el lado del octógono y después generalizar a un octógono de lado *a*.

## Actividad 5

**Demuestran los teoremas de Euclides. Aplican este teorema en la construcción de raíces cuadradas.**

Ejemplo A

Dibujar triángulos rectángulos, trazar la altura desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa, demostrar la semejanza entre los tres triángulos rectángulos e identificar las proporciones que definen los dos teoremas de Euclides.

INDICACIONES AL DOCENTE

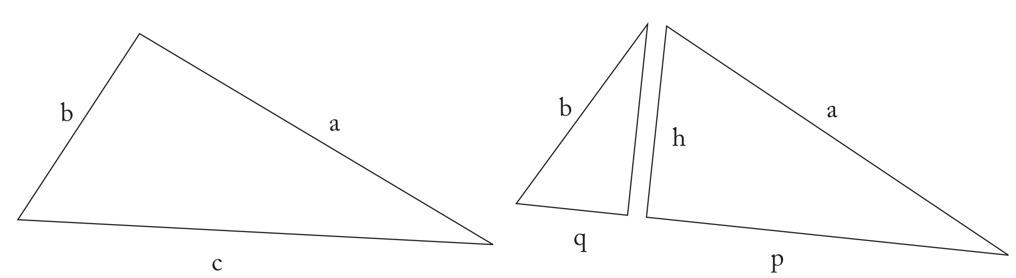
Establecer la semejanza identificando, en los tres triángulos rectángulos, los ángulos agudos congruentes. Escribir las proporciones que se derivan de esta semejanza.

De estas proporciones seleccionar aquellas que constituyen los dos teoremas de Euclides:

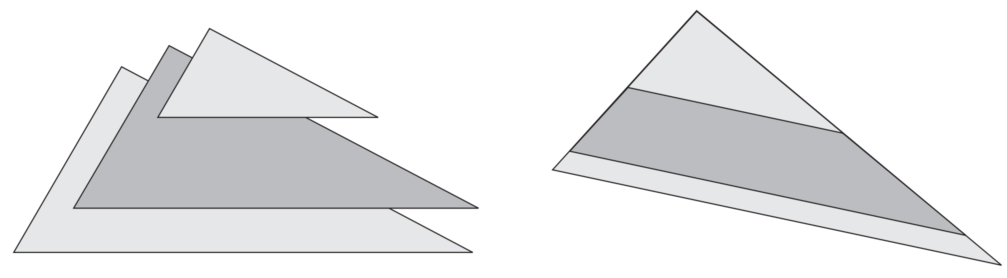
I. En un triángulo rectángulo, la altura es media proporcional entre los segmentos que define en la hipotenusa.

II. Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el correspondiente segmento que genera la altura en la hipotenusa.

Si se considera necesario, se pueden recortar dos triángulos rectángulos congruentes. En uno de ellos trazar la altura desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa y recortar los triángulos que se forman.



I. Constatar empíricamente la semejanza entre los tres triángulos superponiéndolos.



II. Contrastar esta constatación con la demostración de la semejanza.

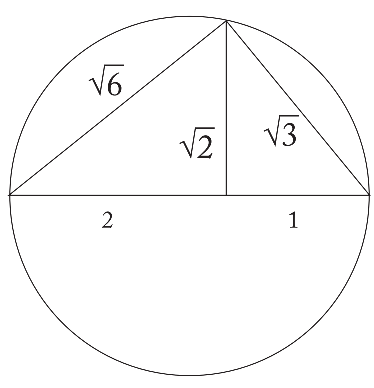
III. Plantear proporciones entre los lados de los tres triángulos a partir de la semejanza establecida.

### Ejemplo B

Construyen segmentos cuya medida relativa corresponde a diferentes raíces cuadradas, utilizando los teoremas de Euclides.

INDICACIONES AL DOCENTE

Se propone una ilustración de construcción de longitudes relativas de raíces cuadradas.



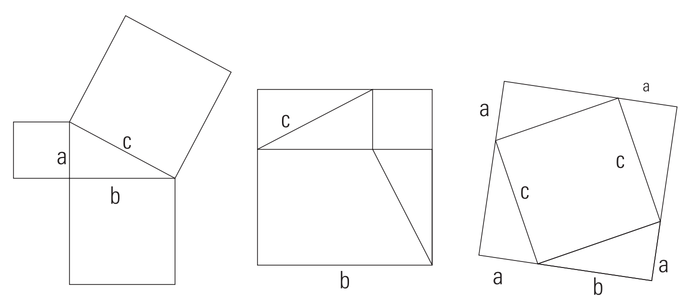

Esta construcción se podría utilizar para construir $\sqrt[4]{6}$. Si 1 y $\sqrt{6}$ son los segmentos de la hipotenusa y $1+\sqrt{6}$ es el diámetro de la circunferencia, entonces la altura *h* del triángulo satisface $h^2 = \sqrt{6}$.

## Actividad 6

**Comparan diversas maneras de demostrar el Teorema de Pitágoras; generan tríos pitagóricos y conocen algunos antecedentes sobre la antigua conjetura de Fermat.**

Ejemplo A

Observar la siguiente secuencia de dibujos en que los triángulos rectángulos de catetos *a, b* e hipotenusa *c* son congruentes. El primer dibujo corresponde a la forma habitual de representar el Teorema de Pitágoras. Determinar la medida del lado de los otros dos cuadrados y organizar una secuencia que permita mostrar la validez del Teorema de Pitágoras.

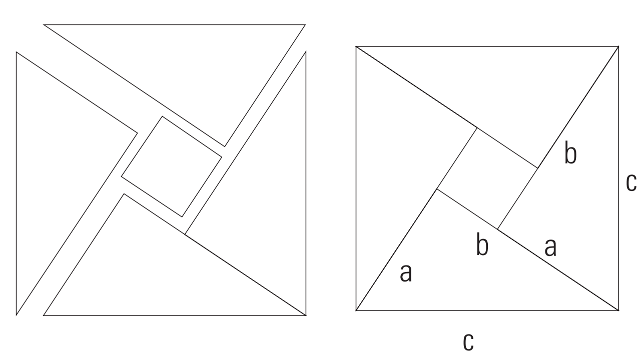



INDICACIONES AL DOCENTE

En este ejemplo, la igualdad de áreas entre la segunda y tercera figura, permiten concluir el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo B

En la siguiente ilustración, para demostrar el Teorema de Pitágoras, calcular el área del cuadrado total en función de *c* y en función de *a* y *b* (Sugerencia: calcular el área del cuadrado interior).



INDICACIONES AL DOCENTE

Este dibujo se puede recortar y hacer con él un puzzle; que los estudiantes constaten que el área de dos de estos triángulos es igual a $ab$ y que el área del cuadrado es igual a $c^2$, o bien a $a^2 + b^2$.

### Ejemplo C

Demostrar el Teorema de Pitágoras recurriendo a los teoremas de Euclides.

INDICACIONES AL DOCENTE

El punto de partida, en este caso, es la expresión del Teorema de Euclides referida a los catetos:

$$a^2 = cp$$
$$b^2 = cq$$
$$a^2 + b^2 = c\,(\,p + q\,) = c^2$$

Es importante que los estudiantes se familiaricen con las distintas formas de plantear una demostración para este importante Teorema de Pitágoras.

Si se considera pertinente, los estudiantes pueden recoger información entre personas que trabajan en el ámbito de la construcción en la que este teorema se utiliza.

### Ejemplo D

Buscar tríos de números enteros que satisfagan el Teorema de Pitágoras.
Constatar que si $a$, $b$ y $c$ son tres números tales que

$$c = m^2 + n^2$$
$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2mn$$

en que $m$ y $n$ son enteros positivos, entonces $a^2 + b^2 = c^2$

INDICACIONES AL DOCENTE

Los tríos pitagóricos más conocidos son 3, 4 y 5; 6, 8 y 10; 5, 12 y 13.

Considerar los múltiplos de tríos, averiguar si siguen siendo pitagóricos, intentar demostraciones al respecto.

Ejemplo E

Recoger información sobre la conjetura de Fermat que dice: ‘no existen soluciones enteras para $x$, $y$, $z$ de $x^n + y^n = z^n$ si $n$ es un número entero mayor que 2’.

INDICACIONES AL DOCENTE

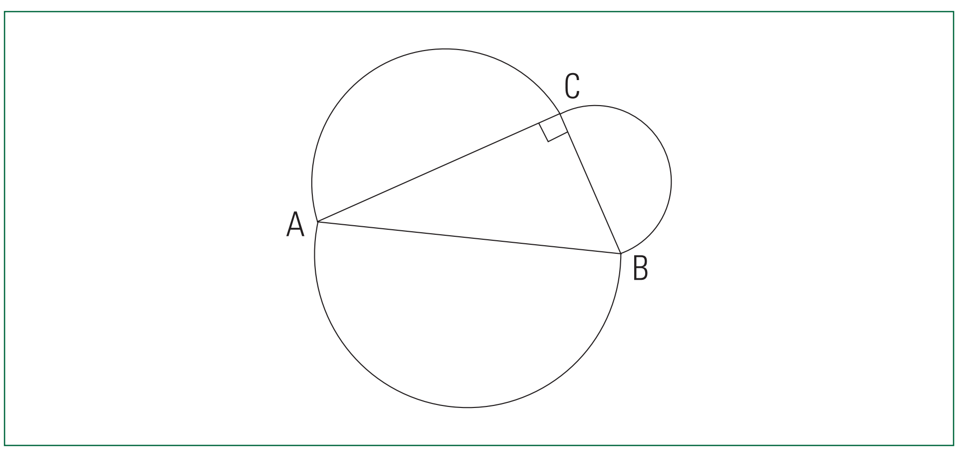
Es importante que los alumnos y alumnas intenten encontrar contraejemplos (para $n = 3$ por ejemplo) y que perciban que podrían continuar con casos particulares, valorando así la demostración.

Es interesante que los estudiantes tengan una imagen de matemática como un área del conocimiento que se construye a través del tiempo, que perciban cómo el intentar resolver este problema significó casi tres siglos de desarrollo en matemática (Fermat falleció en 1665 y recién en 1995 esta proposición dejó de ser conjetura para transformarse en un teorema) y, finalmente, que sepan que esta conjetura que es sencilla en su formulación, tiene una demostración compleja, que exige para su comprensión un conocimiento especializado en matemática.

En internet en www-goups.dcs.st-and.ac.uk/ se puede obtener información sobre el último Teorema de Fermat y sobre historia de la matemática.

Ejemplo F

Demostrar que en un triángulo rectángulo, el área de la semicircunferencia construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las semicircunferencias construidas sobre los catetos.




INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los estudiantes lleguen a diferenciar qué es lo que les interesa demostrar y cuáles son los argumentos que plantean para llegar a esa conclusión.

Quizás algún alumno o alumna pregunte si vale el teorema para las áreas de otras figuras que se puedan construir, a escala, sobre los catetos y la hipotenusa, además de cuadrados y semicircunferencias. Y en realidad, sí.

# Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada uno de ellos se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la Presentación de este programa:

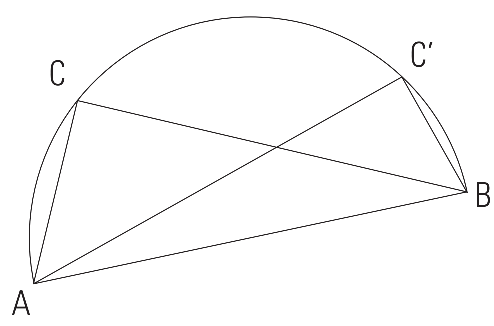
- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

## Actividad 1

**Deducen propiedades relativas a los valores de las razones trigonométricas, seno, coseno y tangente.**

Ejemplo A

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para ángulos comprendidos entre 0º y 180º. Explicar la opción en cada caso.
Si se considera pertinente, se puede apoyar con una figura como la siguiente:




1. El seno de un ángulo es siempre menor que 1.
2. En la medida que un ángulo aumenta, el seno de ese ángulo crece.
3. La tangente de un ángulo puede tomar valores mayores que 1.
4. La tangente de un ángulo puede ser tan grande como se quiera.
5. Si el seno de un ángulo aumenta, el coseno de ese mismo ángulo disminuye.
6. En la medida que un ángulo disminuye, su coseno aumenta.
7. El coseno de un ángulo es siempre positivo.

*Observar si:*

*I. Recurren al círculo unitario.*

*II. Recurren a un triángulo rectángulo cualquiera.*

*III. Conocen la diferencia de rango entre seno, coseno con tangente.*

## Actividad 2

**Definen familias de triángulos rectángulos semejantes conociendo el valor del seno, coseno o tangente de uno de los ángulos agudos.**

Ejemplo A

Determinar las medidas de uno de los triángulos de la familia de triángulos rectángulos que se define, en las situaciones siguientes:

I. Si el seno de un ángulo agudo es 0,5.

II. Si la tangente de un ángulo agudo es igual a 3.

III. Si el coseno de un ángulo agudo es $\frac{3}{4}$.

*Observar si:*

*I. Tienen claro qué son familias de triángulos.*

*II. Si fijan la medida de uno de los lados.*

Ejemplo B

Determinar las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, en las situaciones siguientes:

1. Si su hipotenusa mide 4,5 cm y el seno de uno de sus ángulos agudos es 0,3.
2. Si el seno de un ángulo agudo es $\frac{1}{3}$ y el cateto opuesto a ese ángulo mide 31,2 cm.

*Observar si:*

*I. Dibujan el triángulo.*

*II. Consignan sólo las medidas.*

*III. Hacen cálculos adecuados aplicando la relaciones apropiadamente.*

## Actividad 3

**Resuelven problemas utilizando razones trigonométricas o aplicando los teoremas de Euclides y Pitágoras.**

Ejemplo A

En el momento en que un satélite de comunicaciones sobrevuela una ciudad, es avistado desde un observatorio situado a 250 km de dicha ciudad con un ángulo de elevación de 65º. ¿A qué altura de la ciudad se encuentra el satélite?

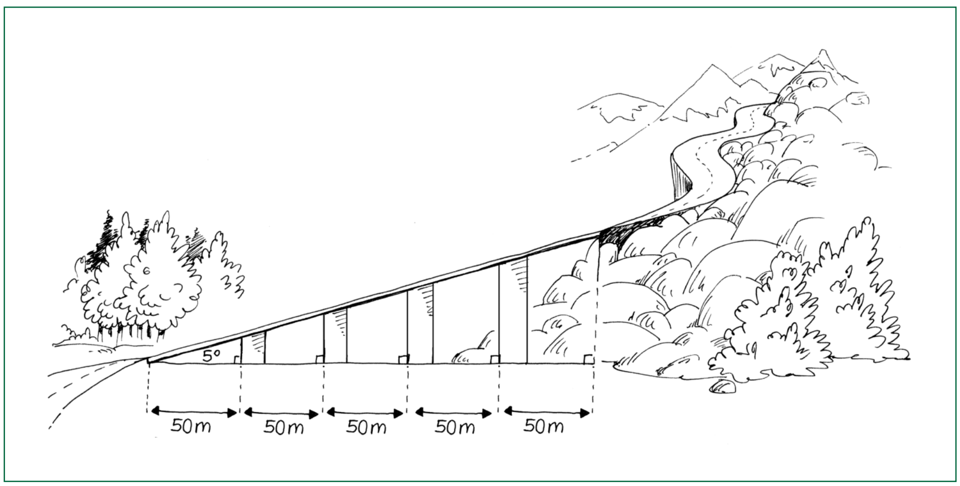
*Observar si:*

*I. Logran hacer un esquema del problema.*

*II. Si ubican correctamente un ángulo recto.*

Ejemplo B

En la construcción de una carretera, para franquear un accidente geográfico se hará un puente que se sostiene en cuatro pilares, como lo indica el dibujo. ¿Cuál es la longitud del puente?




*Observar si:*

*I. Reconocen qué cálculos tienen que hacer.*

*II. Utilizan calculadora.*

Ejemplo C

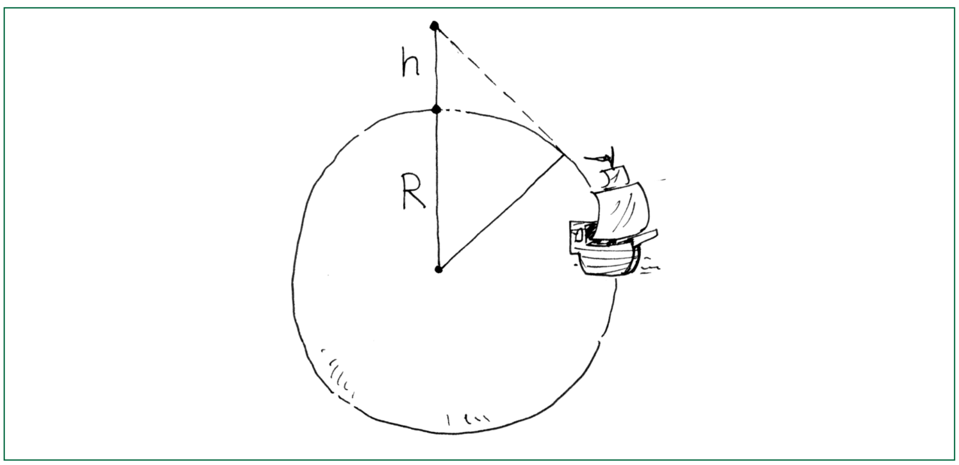
Una moneda de $100 tiene un diámetro de 2,6 cm. Para efectos de un diseño de paneles de exposición, interesa calcular la medida del ángulo que forman las tangentes a una moneda desde un punto situado a 5 cm. del centro.

*Observar si:*

*I. Logran hacer una representación gráfica de la situación.*
*II. Pueden resolver el problema de manera puramente gráfica.*
*III. Resuelven el problema usando razones trigonométricas.*
*IV. Proceden "a mano" o usan calculadora.*

Ejemplo D

Desde una altura *h* sobre el nivel del mar y a orilla de la costa, se ve desaparecer un barco en el horizonte. Estimar la distancia a la que se encuentra el barco.




*Observar si:*

*I. Utilizan el dibujo para reconocer los datos.*
*II. Utilizan calculadora.*
*III. Pueden llegar estimativamente a una buena respuesta.*

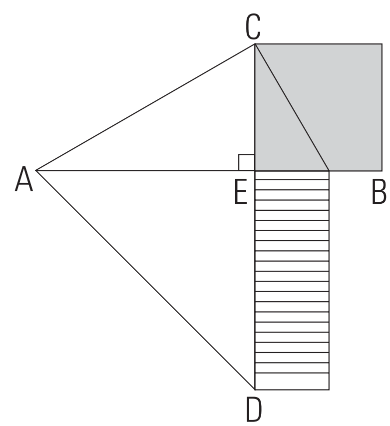
En relación con este problema, se podría hacer otra pregunta: ¿A qué altura hay que construir la atalaya de un fuerte para alcanzar a ver a tiempo al enemigo que vendrá a asaltar el fuerte a caballo?
Se trata de obtener una relación sencilla y eficaz entre la distancia al horizonte y la altura *h*.

## Actividad 4

**Aplican los teoremas de Pitágoras y de Euclides en construcciones geométricas o para proponer demostraciones de algunas propiedades.**

Ejemplo A

En el dibujo que sigue, ABC es un triángulo rectángulo. Comparar el área del cuadrado y del rectángulo sabiendo que el triángulo ADE es isósceles.




Fundamentar el resultado de la comparación.

*Observar si:*

*I. Relacionan los lados del rectángulo con los segmentos de la hipotenusa del triángulo rectángulo.*

*II. Fundamentan la solución en el Teorema de Euclides.*

*III. Buscan soluciones alternativas.*

# Unidad 4

## Otro paso en el estudio de las probabilidades

### Contenidos

a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.

b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.

c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.

### Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

Reconocen variables aleatorias y las interpretan de acuerdo a los contextos en que se presentan.

Conocen empíricamente la Ley de los Grandes Números y relacionan la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso.

Resuelven problemas que involucran el cálculo de probabilidad condicionada en situaciones sencillas.

Distinguen entre sucesos equiprobables y no equiprobables.

## Orientaciones didácticas

La palabra probabilidad pertenece al vocabulario corriente de las personas. Los términos aleatorio, azar, incierto, predecible o impredecible, seguro e inseguro se utilizan usualmente y en ámbitos tan diversos como la economía, la meteorología, el deporte, el transporte, las ciencias básicas y sociales, la medicina y naturalmente cuando se trata de juegos de azar. Por ello, es conveniente distinguir que a veces se utiliza para indicar una creencia subjetiva, en otros casos una estimación empírica o bien, un conocimiento teórico.

Uno de los conceptos más fundamentales en Teoría de Probabilidades es el de variable aleatoria. En el contexto del presente programa de estudios, entenderemos como variable aleatoria a cantidades o magnitudes susceptibles de variar azarosamente. Más precisamente, cuando se asocia un único número $x$ con cada resultado posible de un experimento aleatorio, el número $x$ recibe el nombre de variable aleatoria. Por ejemplo, supongamos que el experimento consiste en escoger una manzana al azar de un árbol y pesarla. El peso será una variable (de interés) asociada a cada manzana, y como la manzana fue escogida aleatoriamente, su peso será una variable aleatoria. Es claro que una vez escogida una manzana específica, el peso que ella tenga, digamos 150 gramos, no es aleatorio. Cabe señalar que el mismo experimento aleatorio permite definir diferentes variables aleatorias. En el ejemplo, en lugar del peso de la manzana, podría determinarse su volumen.

Algunas variables aleatorias que aparecen en la vida diaria y que sería interesante analizar con los alumnos y alumnas son: número de accidentes carreteros ocurridos en un fin de semana escogido al azar, número de hermanos que tiene un estudiante cualquiera, número de años que vivirá una persona nacida en 1981, número de artículos defectuosos producidos en una fábrica cualquiera, etc.

En el Programa de Segundo Año Medio, se estudió, esencialmente, el caso de la probabilidad teórica, que se basa en la idea de que a ciertos eventos es posible calcular su probabilidad *a priori*, dadas ciertas condiciones de simetría del experimento. Así, si un experimento tiene $n$ resultados posibles, todos con igual probabilidad, podemos asignar la probabilidad de$1/n$ a cada resultado posible. Sin embargo, en algunas experiencias, como las que se sugieren en el Ejemplo A de la Actividad 1 de la presente unidad, las probabilidades de los posibles resultados del experimento no se pueden determinar *a priori* y deben ser estimadas realizando la experiencia.

Para poder definir la noción de *probabilidad experimental* será necesario definir la *frecuencia relativa del resultado A de un experimento,* como el cuociente entre el número de veces que efectivamente ocurre $A$ sobre el número de veces que se realiza el experimento. Se podrá decir entonces que la *probabilidad experimental del suceso A* se aproximará al valor de esta frecuencia relativa, cuando el experimento se realiza una gran cantidad de veces. Ello permitirá una buena aproximación para una comprensión intuitiva de la Ley de los Grandes Números.

Otro de los aspectos que se estudia en la presente unidad es la independencia de sucesos y la probabilidad condicionada. En esta dirección, es importante que las alumnas y alumnos comprendan que la probabilidad de un suceso puede cambiar si se dispone de nueva información, y este hecho se modela por la noción de probabilidad condicionada. Esto permite formalizar la idea de que la probabilidad depende de la información. Por ejemplo, si en el lanzamiento de un dado se desea saber la probabilidad de que salga 2, se sabe, por lo estudiado en Segundo Año Medio, que esta probabilidad es 1/6. Sin embargo, si se sabe que ha salido un número menor que 4, entonces, con esta nueva información, la probabilidad de obtener un 2 será 1/3.

En este programa, se propone el análisis de juegos y fenómenos aleatorios sin enfatizar el uso de vocabulario específico ni de simbolización formal. Es posible desarrollar los ejemplos planteados realizando directamente, en cada situación, los respectivos cálculos de probabilidades. Debiera ser claro que si dos sucesos *A* y *B* son independientes, entonces la probabilidad de que ocurra el suceso *A* sabiendo que ha ocurrido *B* debiera ser igual a la probabilidad que ocurra el suceso *A*, es decir,

*P(ocurra A sabiendo que ha ocurrido B) = P(ocurra A).*

A continuación, puede constatarse que, si *A* y *B* son dos sucesos dependientes, entonces la probabilidad que ocurra el suceso *A* sabiendo que el suceso *B* ha ocurrido, se calcula del siguiente modo:

*P(ocurra A sabiendo que ha ocurrido B) = P(ocurra A y B)/P(B),* siempre que *P(B)* sea diferente de 0.

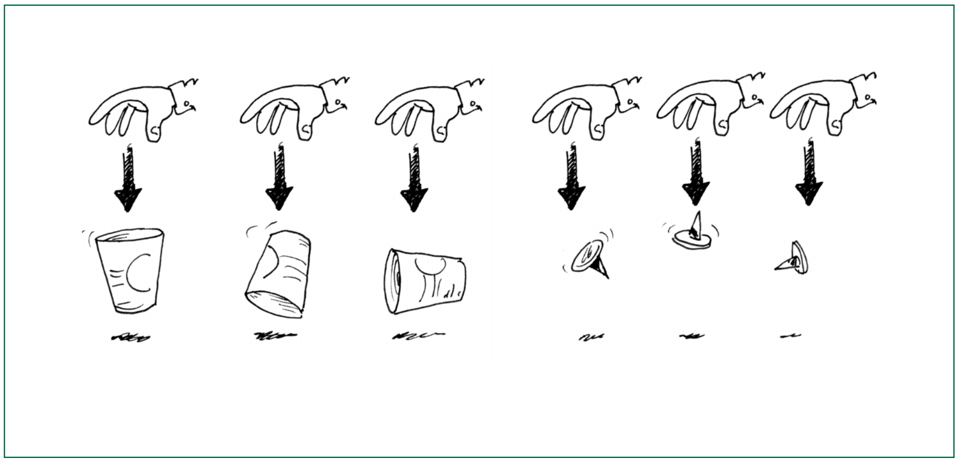
# Actividades para el aprendizaje y ejemplos

## Actividad 1

**Experimentan con fenómenos no equiprobables; registran los resultados y comparan con situaciones de equiprobabilidad.**

### Ejemplo A

Experimentar algunos lanzamientos con vasos de cartón o con chinches u otro objeto que no presente simetría.



I. Predecir, suponiendo un total de 30 lanzamientos, cuál será el número por cada una de las posibles formas de aterrizaje del objeto.
II. Hacer la experiencia, registrar los resultados y contrastar con la predicción.
III. Comparar los resultados obtenidos entre quienes realizaron la experiencia con el mismo tipo de objeto. Considerar la suma del total de experiencias realizadas; comparar los resultados obtenidos.
IV. Constatar cómo esta frecuencia tiende a estabilizarse en la medida en que aumenta el número de experimentos realizados.

INDICACIONES AL DOCENTE

Para desarrollar este ejemplo se puede organizar el curso en parejas de trabajo; es importante cuidar que los lanzamientos no predispongan a una forma de aterrizaje, sino que permitan cualquiera de las posibles.

Podría ser una actividad para que se desarrolle fuera de la hora de clases y trabajar durante ésta con los resultados que se obtengan.

Contrastar los resultados de esta experiencia con los generados en una con sucesos equiprobables (lanzamiento de una moneda).

Ejemplo B

Se lanza un dado 18.000 veces; se obtienen los resultados consignados en la siguiente tabla, agrupados de acuerdo al número de tiradas.

| **Nº de tiradas** | **Resultados posibles** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| 20 | 5 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 |
| 60 | 7 | 6 | 6 | 11 | 9 | 21 |
| 300 | 47 | 39 | 44 | 56 | 42 | 72 |
| 600 | 89 | 84 | 82 | 111 | 104 | 130 |
| 1200 | 174 | 166 | 185 | 203 | 207 | 265 |
| 2400 | 362 | 345 | 387 | 396 | 407 | 503 |
| 6000 | 946 | 885 | 1002 | 993 | 941 | 1233 |
| 18000 | 2911 | 2851 | 2833 | 2766 | 2806 | 3833 |

Calcular las frecuencias relativas para los datos de dos filas y de dos columnas. ¿Qué deducción se puede plantear a partir del análisis de estos resultados?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es igualmente interesante analizar una tabla de resultados como hacer la experiencia con algún dado 'cargado'. Alterar la simetría de un dado, limando una de sus aristas o uno de los vértices, permite proponer a los alumnos y alumnas, experiencias con sucesos no equiprobables.

En el cálculo de la frecuencia relativa considerar la columna del 6; hacer referencia a la Ley de los Grandes Números.

Ejemplo C

El cuadro que sigue registra las veces que resultó 'cara' en un total de 10.000 lanzamientos de una moneda. En cada celda se registra el número de veces que resultó 'cara' por cada 100 lanzamientos.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 47 | 45 | 53 | 45 | 49 | 48 | 58 | 43 | 48 | 54 | |
| 41 | 47 | 52 | 47 | 50 | 51 | 60 | 52 | 46 | 46 | |
| 51 | 46 | 46 | 41 | 45 | 51 | 54 | 58 | 40 | 53 | |
| 48 | 52 | 52 | 51 | 52 | 49 | 55 | 51 | 53 | 55 | |
| 59 | 47 | 44 | 49 | 52 | 44 | 50 | 51 | 49 | 46 | |
| 51 | 48 | 51 | 59 | 48 | 52 | 48 | 50 | 49 | 54 | |
| 52 | 59 | 48 | 50 | 47 | 50 | 47 | 52 | 48 | 41 | |
| 55 | 57 | 51 | 55 | 47 | 46 | 57 | 50 | 54 | 48 | |
| 39 | 45 | 46 | 53 | 47 | 53 | 52 | 53 | 53 | 51 | |
| 41 | 48 | 54 | 50 | 51 | 41 | 55 | 49 | 45 | 53 | |

Responder las siguientes preguntas y plantear reflexiones acerca de las respuestas.

I. ¿Cuántas celdas registran 50 caras, del total de 100?
II. ¿Cuál es el número más alejado de 50?
III. ¿Cuántas veces se repite ese o esos números?
IV. Efectuar las sumas de las líneas y de las columnas y analizar esos resultados que corresponden, cada uno, a 1.000 lanzamientos.
V. ¿Cuál es el total de caras en los 10.000 lanzamientos?

INDICACIONES AL DOCENTE

No conviene desdeñar el estudio del comportamiento estadístico de experimentos con resultados equiprobables, justamente para tratar de discernir, en la práctica, resultados empíricos que son simples fluctuaciones estadísticas de resultados equiprobables, con resultados empíricos que provienen de un experimento con resultados no equiprobables.

El problema es inferir si una moneda que arroja 55 caras al ser lanzada 100 veces estará cargada o no. Difícilmente se puede contestar esta pregunta si no se puede estimar la probabilidad que una moneda no cargada arroje entre 45 y 55 caras al ser lanzada 100 veces.

Interesa que los estudiantes relacionen la frecuencia relativa de los resultados de una experiencia aleatoria repetida un gran número de veces, con la probabilidad, considerando tanto situaciones con sucesos equiprobables como con sucesos no equiprobables. En ambos casos hay una tendencia a la estabilización de la frecuencia relativa; en el primer caso esta frecuencia es predecible por la simetría que presenta la experiencia.

## Actividad 2

**Utilizan información estadística para calcular y comparar probabilidades.**

Ejemplo A

Hace casi seis meses que Ana María controla el tiempo que espera el bus, cada mañana, para trasladarse a su trabajo. Organizó los datos en la tabla de frecuencia siguiente en la que $t$ es el tiempo medido en minutos.

| Tiempo | $0 \leq t < 2$ | $2 \leq t < 4$ | $4 \leq t < 6$ | $6 \leq t < 8$ | $8 \leq t < 10$ | $10 \leq t < 12$ | $12 \leq t < 14$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 7 | 12 | 29 | 25 | 22 | 18 | 14 |

¿Cuál es el tiempo máximo (o mínimo) que espera Ana María el bus?
Estime la probabilidad que Ana María espere entre 6 y 8 minutos.

INDICACIONES AL DOCENTE

El registro de información y la elaboración de una tabla de frecuencia permite calcular la frecuencia relativa de los tiempos de espera y estimar así la probabilidad correspondiente.

El experimento aleatorio consiste en elegir al azar una mañana de Ana María durante esos seis meses y preguntarse cuánto tiempo esperó su bus esa mañana.

Apoyándonos en lo que ocurrió en esos pasados 6 meses podemos estimar que la probabilidad de que su tiempo de espera esté entre 6 y 8 minutos será la frecuencia relativa correspondiente durante esos seis meses.

Es importante destacar las diferencias entre las características de este tipo de fenómeno con los analizados en la actividad anterior. Sin embargo, en ambos tipos de experiencia es la frecuencia relativa la que permite estimar la probabilidad de un suceso.

Tomado al pie de la letra y un poco apresuradamente, esto podría significar que si lanzamos 10 veces una moneda y obtenemos 6 caras, eso establece que la probabilidad que la moneda salga cara es 0,6.

Sin embargo, sabemos que una moneda simétrica, que muestra cara con probabilidad 0,5, puede perfectamente arrojar 6 caras en diez lanzamientos.

Si estamos interesados en la probabilidad de que una moneda muestre cara al ser lanzada y sólo sabemos que salió 6 veces cara en 10 lanzamientos, podemos *estimar* –en ausencia de otra información– que la probabilidad que la moneda salga cara en un lanzamiento es 0,5. Pero también podríamos estimar que la tal probabilidad sea 0,6.

Ejemplo B

El cuadro siguiente consigna información sobre la población indígena y la población total en algunos países de América Latina, alrededor del año 1990.

| País | Población total | Población indígena |
|---|---|---|
| Argentina | 32.546.517 | 350.000 |
| Chile | 13.099.513 | 1.000.000 |
| Ecuador | 10.264.137 | 3.800.000 |
| Guatemala | 9.197.345 | 5.300.000 |
| México | 83.226.037 | 12.000.000 |
| Perú | 21.588.181 | 9.300.000 |

Fuente: "Mujeres Latinoamericanas en cifras". Instituto de la mujer, Ministerio de Asuntos Sociales de España y Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO. 1995.

¿En cuál de estos países es mayor la probabilidad que sea indígena una persona elegida al azar?
¿Cuál es la probabilidad en el caso de Chile?

INDICACIONES AL DOCENTE

En este caso el experimento aleatorio es elegir al azar un habitante del país en cuestión.

El desarrollo de este ejemplo permite establecer relaciones entre la noción de probabilidades y la frecuencia relativa que se genera por acumulación intencionada de información sobre algún tema.

Conviene comentar con los estudiantes el sentido de la expresión 'elegir al azar' y relacionar con la secuencia de números que aparecen en la pantalla de una calculadora científica que tenga la tecla 'random'.

Ejemplo C

Para decidir sobre distribución presupuestaria, se consideró la información que consigna el cuadro que sigue.

| **Chile** Año | **Población** | | |
|---|---|---|---|
| | Total | Infantil 0 - 14 años | Adulta mayor 65 años y más |
| 1970 | 8.884.768 | 3.481.142 | 446.711 |
| 1982 | 11.329.736 | 3.653.113 | 659.517 |
| 1992 | 13.348.401 | 3.929.468 | 877.044 |

Fuente: Estadísticas de Chile en el siglo XX, Instituto Nacional de Estadísticas (INE), Santiago, 1999

¿En qué año es menor la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mayor de 65 años?
¿En qué año es menor la probabilidad de que una persona elegida al azar sea menor de 14 años?

INDICACIONES AL DOCENTE

En este ejemplo la experiencia aleatoria es elegir una persona al azar y se estima la probabilidad de que ella satisfaga una determinada condición recurriendo a la frecuencia relativa.

Recoger información, organizarla e interpretarla es de vital importancia para la toma de decisiones en diversos y múltiples ámbitos. Muchas decisiones no se sustentan en información censal sino muestral, tema que será estudiado en Cuarto Año Medio.

## Actividad 3

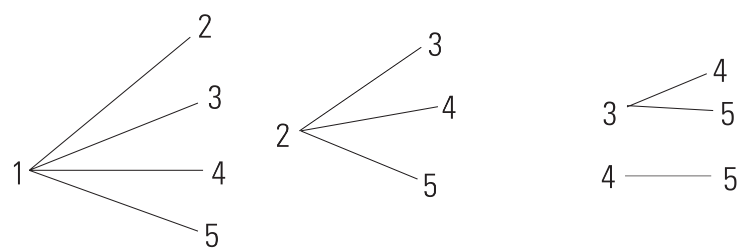
**Resuelven problemas relativos al cálculo de probabilidades que incorporan combinatoria básica; discriminan los casos que involucran 'orden' de aquellos que no lo consideran y aquellos en los que se permite o no 'la repetición'.**

Ejemplo A

Para juntar fondos el curso organiza una rifa. Para participar se compran unas papeletas que tienen dos números diferentes, del 1 al 5. Gana quien tenga la papeleta con los dos números sorteados.
¿Cuál es la probabilidad de ganar, teniendo una papeleta?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es fácil la representación de este ejemplo en un diagrama como el siguiente: una adaptación del árbol de conteo para que quede sólo una vez cada par de números. Como el orden no tiene importancia, se ha dejado un sola de las duplas: está 1, 3 pero no está la dupla 3, 1, por ejemplo.




También se puede considerar un cuadro de doble entrada en el que se marcan sólo uno de los pares de duplas.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | 1 ; 2 | 1 ; 3 | 1 ; 4 | 1 ; 5 |
| **2** | | | 2 ; 3 | 2 ; 4 | 2 ; 5 |
| **3** | | | | 3 ; 4 | 3 ; 5 |
| **4** | | | | | 4 ; 5 |
| **5** | | | | | |

Son diez las duplas igualmente posibles y distintas; la probabilidad de ganar con una papeleta es $\frac{1}{10}$ .

Ejemplo B

Calculan la probabilidad de ganar un juego de azar en el que haya que elegir una cierta cantidad de números de un total.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante tener en cuenta que en estos juegos no importa el orden en que salen los números sorteados los que, además, no se repiten.

Ejemplo C

La Municipalidad de Aguas Cristalinas está autorizada para diseñar patentes usando las letras W, X, y Z y todos los dígitos. Si las patentes tienen dos letras y dos números y se puede repetir la letra o el número, ¿cuántas patentes distintas se pueden diseñar? ¿Cuál es la probabilidad de tener una patente con dos números iguales?

INDICACIONES AL DOCENTE

El diagrama de árbol es una buena ayuda para el conteo de todos los casos posibles. Es conveniente que los estudiantes lleguen a expresar generalizaciones a partir del análisis de ejemplos con menos números, recurriendo a la evidencia que aporta el diagrama de árbol.

## Actividad 4

**Realizan experimentos y resuelven problemas que involucran adición de probabilidades.**

Ejemplo A

Lanzar una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 'cara' **o** 'cinco'?

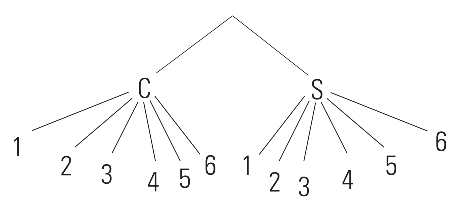
INDICACIONES AL DOCENTE

Un cuadro de doble entrada, como el siguiente, puede utilizarse para recoger la información en el caso que se realice la experiencia, o bien para el conteo de los casos posibles y los favorables.

| **Resultados moneda** | **Resultados del dado** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **Cara** | | | | | | |
| **Sello** | | | | | | |

Es importante que los alumnos y alumnas analicen el caso en que se obtiene 'cara' y 'cinco' en un lanzamiento que es también un caso favorable.

En este ejemplo, el árbol de posibilidades es también una buena representación para visualizar los casos posibles y los favorables.



Ejemplo B

Lanzar simultáneamente dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en por lo menos una de ellas?

INDICACIONES AL DOCENTE

En este ejemplo, algunos alumnos y alumnas pueden plantear que la solución está dada por los resultados, 'cara-sello y sello-cara' desestimando el resultado 'cara-cara'. Asimismo, otros podrán calcular por exclusión: es cuando no sale 'sello-sello'.

Es importante considerar representaciones para visualizar los resultados posibles.

Un cuadro de doble entrada puede ser una buena representación.

| | **Cara** | **Sello** |
|---|---|---|
| **Cara** | C-C | C-S |
| **Sello** | S-C | S-S |

Con esta herramienta se evita la confusión presente en el cálculo de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ en el que se considera que la probabilidad de que salga cara al lanzar una moneda es $\frac{1}{2}$ y, como en este caso son dos monedas, la probabilidad sería, erróneamente, la suma.

Ejemplo C

Se organiza un sorteo en el que participan los números del 1 al 500. Gana quien tenga un número múltiplo de 4 o uno múltiplo de 6. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

INDICACIONES AL DOCENTE

Este ejemplo aporta al análisis de las situaciones en las que se presenta intersección: un mismo número satisface ambas condiciones.

Interesa que los alumnos y alumnas se den cuenta que el 12 y los múltiplos de 12 son a la vez múltiplos de 4 y de 6; es necesario contarlos una sola vez. Se podrían armar juegos competitivos de unos múltiplos contra otros.

## Actividad 5

**Realizan experimentos y resuelven problemas que involucran la multiplicación de probabilidades; discriminan sucesos dependientes.**

Ejemplo A

Lanzar una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener ‘sello’ y ‘tres’ ?

INDICACIONES AL DOCENTE

Un cuadro como el siguiente ayuda a recoger la información cuando se hace la experiencia.

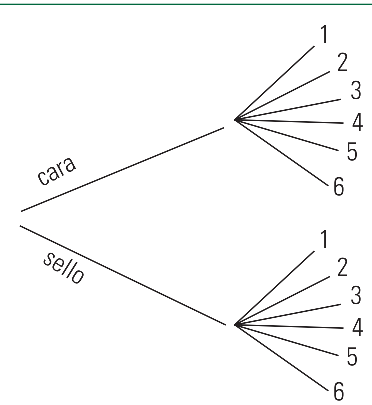
| Resultados moneda | Resultados del dado | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **Cara** | | | | | | |
| **Sello** | | | | | | |

Para el cálculo de la probabilidad puede ser adecuado una tabla como la siguiente:

| Dados / Monedas | 1 - 2 - 4 - 5 - 6 | 3 | Total de casos |
|---|---|---|---|
| **Cara** | 5 | 1 | 6 |
| **Sello** | 5 | 1 | 6 |
| **Total de casos** | 10 | 2 | 12 |

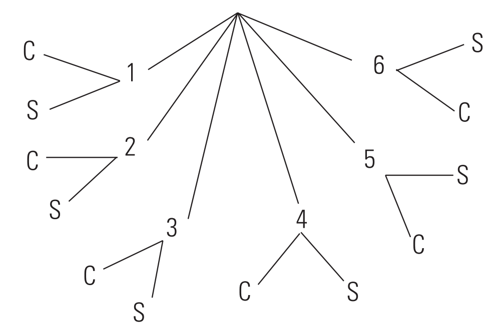
De acuerdo a esta tabla, la probabilidad de obtener ‘sello y 3’ es igual a $\frac{1}{12}$ .

También se puede utilizar un diagrama de árbol como el que sigue:



Es importante que los alumnos y alumnas visualicen que la probabilidad de obtener ‘sello y 3’ está dada por el producto $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ .

Si se considera primero el dado y después la moneda, se obtiene otro árbol:

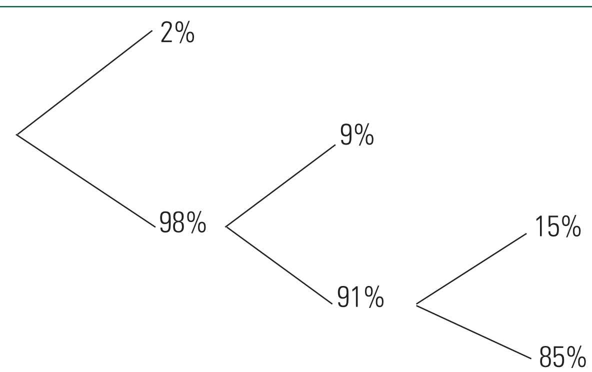



Ejemplo B

Según la información disponible, un cierto tipo de enfermo sometido a un trasplante tiene un 2% de probabilidad de sufrir una grave complicación por la anestesia; la probabilidad de que se produzcan complicaciones durante la operación es de un 9%; después de la operación, la probabilidad de complicación es de un 15%.
Determinar la probabilidad que un paciente sometido a trasplante, de acuerdo a esta información, no sufra ninguna complicación.

INDICACIONES AL DOCENTE

El diagrama de árbol que incluye las probabilidades es una herramienta que ayuda a encontrar la solución al problema propuesto, tal como se ilustra en el dibujo que sigue; la línea ennegrecida indica la secuencia de eventos que lleva a la solución al problema.




En este ejemplo, 0,76 aproximadamente, es la probabilidad de no tener complicaciones.

Ejemplo C

Calcular la probabilidad de sacar una carta menor que 3 y roja, de una baraja de naipe inglés.

INDICACIONES AL DOCENTE

El cuadro que sigue permite hacer el análisis de la situación:

| | **Número de carta** | | **Total de casos** |
|---|---|---|---|
| **Color** | **$x < 3$** | **$x \geq 3$** | |
| **Rojo** | 4 | 22 | 26 |
| **Negro** | 4 | 22 | 26 |
| **Total de casos** | 8 | 44 | 52 |

Son 4 las cartas rojas y menores que 3 a la vez, sobre un total de 52.

En consecuencia, la probabilidad de sacar una carta que cumpla con las condiciones pedidas es $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Analizando los eventos en forma separada:

I. La probabilidad de sacar una carta menor que 3 es $\frac{8}{52}$.

II. La probabilidad de sacar una carta roja es $\frac{1}{2}$.

La probabilidad que satisfaga ambas condiciones también se puede obtener calculando el producto de la probabilidad de cada suceso obtenida en forma separada. En este caso $\frac{8}{52} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

En forma similar al ejemplo anterior se puede apoyar el análisis con un diagrama de árbol.

Ejemplo D

Calcular la probabilidad de que salga par y menor que 4 al lanzar un dado.

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los estudiantes comprendan la diferencia entre este ejemplo y los anteriores. En este caso no coincide el cálculo con el producto de las probabilidades de ambos sucesos obtenida en forma separada. Esto es así porque son dos sucesos dependientes.

| | Intervalo del resultado | | |
|---|---|---|---|
| **Paridad del resultado** | **x < 4** | **x ≥ 4** | **Total de casos** |
| **Par** | 1 | 2 | 3 |
| **Impar** | 2 | 1 | 3 |
| **Total de casos** | 3 | 3 | 6 |

Probabilidad que salga par es $\frac{1}{2}$.
Probabilidad que salga menor que 4 es $\frac{1}{2}$.
Probabilidad que salga par y menor que 4 es $\frac{1}{6}$ , resultado que deriva del análisis de la tabla y que es diferente del producto $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ calculados en los dos ejercicios anteriores.

Ejemplo E

En una clínica médica se ha organizado un archivo de los pacientes por sexo y por tipo de hepatitis. Son 45 varones de los cuales 25 tienen hepatitis tipo A y 20, tipo B. Son 35 mujeres con hepatitis tipo A y 20 con hepatitis tipo B.
Si se selecciona una de las fichas del archivo al azar, determinar la probabilidad de sacar:

I. Una correspondiente al sexo femenino.
II. Una correspondiente a un caso de hepatitis tipo B.
III. Una correspondiente al sexo masculino y con hepatitis tipo A.
IV. La respuesta anterior, ¿es igual al producto de las probabilidades de ambos sucesos calculados independientemente?

INDICACIONES AL DOCENTE

La comparación entre la probabilidad de la ocurrencia de dos sucesos simultáneos con el producto de la probabilidad de cada uno de ellos calculados separadamente se transforma en un test para determinar la independencia o dependencia de ambos sucesos.

## Actividad 6

**Calculan probabilidades condicionadas en situaciones sencillas.**

Ejemplo A

Comparar las dos situaciones que siguen:

a. Primera situación
   - a.1 Calcular la probabilidad que salga as al lanzar el dado y cara al lanzar la moneda.
   - a.2 Calcular la probabilidad que salga as al lanzar el dado, sabiendo que ya salió cara al lanzar la moneda.

b. Segunda situación
   - b.1 ¿Cuál es la probabilidad que salga par y menor que 4 al lanzar un dado?
   - b.2 Sabiendo que ya salió par, ¿cuál es ahora la probabilidad que sea menor que 4?

INDICACIONES AL DOCENTE

En la primera situación los sucesos son independientes en tanto que la segunda es un caso de probabilidad condicionada en la que los sucesos son dependientes.

Las siguientes tablas que ordenan el número de casos pueden contribuir al análisis de ambas situaciones.

Primera situación

| Dados / Monedas | 2 - 3 - 4- 5- 6 | As | Total de casos |
|---|---|---|---|
| **Cara** | 5 | 1 | 6 |
| **Sello** | 5 | 1 | 6 |
| **Total de casos** | 10 | 2 | 12 |

Probabilidad que salga cara es $\frac{1}{2}$.

Probabilidad que salga as es $\frac{1}{6}$.

Probabilidad que salga cara y as es $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ lo que es coherente con la información de la tabla.

Probabilidad que salga as, sabiendo que ya salió cara sigue siendo $\frac{1}{6}$; no varía por la información 'ya salió cara'.

Segunda situación

Considerar la indicación dada para el ejemplo D de la actividad 5. En consecuencia, la probabilidad que salga par sabiendo que salió un número menor que 4 es $\frac{1}{3}$.

Ejemplo B

Se lanzan dos dados, uno blanco y uno rojo.

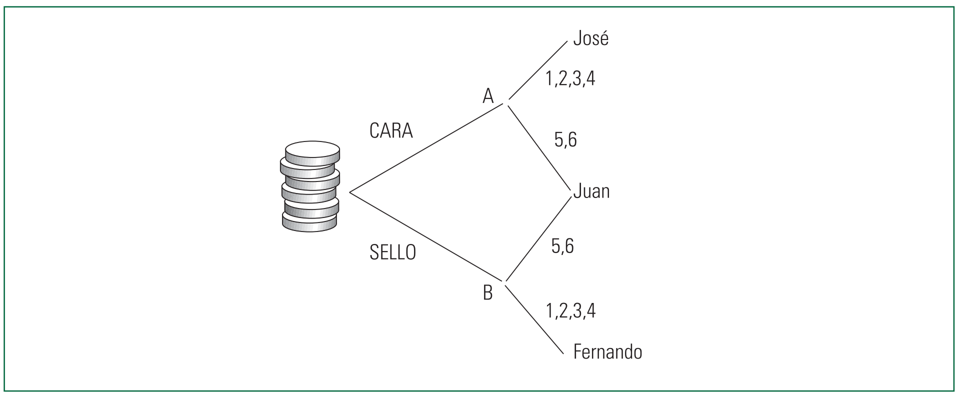
I. Calcular la probabilidad que la suma de los puntos sea igual a 10.
II. Calcular la probabilidad que la suma de los puntos sea igual a 10, si se sabe que en el dado rojo salió 6.
III. Calcular la probabilidad que la suma de los puntos sea igual a 10, si se sabe que en el dado rojo salió 3.

INDICACIONES AL DOCENTE

Lo importante en este ejemplo es destacar cómo influye en el cálculo de probabilidades el conocimiento de más información pertinente.

Ejemplo C

Entre tres amigos inventan un juego que se puede graficar de la siguiente manera.




Disponen de un determinado número de fichas; lanzan una moneda: si sale cara la ficha pasa a A, si sale sello a B. En seguida lanzan un dado: si sale 5 ó 6 las fichas van donde Juan; si las fichas están en A y sale 1, 2, 3 ó 4 las fichas van donde José; si estaban en B van donde Fernando.

I. ¿Es equitativo este juego?
II. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Juan?
III. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan gane una ficha si salió cara?
IV. ¿Cuál es la probabilidad de que Fernando gane una ficha si salió cara?

INDICACIONES AL DOCENTE

Variar las condiciones del juego para enriquecer el análisis.

# Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada uno de ellos se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar lo realizado por los estudiantes.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la Presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

## Actividad 1

**Resuelven problemas que involucran el cálculo de probabilidades incorporando combinatoria básica.**

### Ejemplo A

Para la reunión de la Organización Internacional del Trabajo (OIT), se invitará a participar a un par de dirigentes nacionales de los trabajadores. De acuerdo a los datos del cuadro siguiente, ¿en cuál de estos países hay mayor probabilidad que en la delegación participe una mujer, suponiendo una selección al azar?
¿Cuál es la probabilidad que asistan dos mujeres de un mismo país?

| País | Año | Total de dirigentes | Dirigentes mujeres | Organización |
|---|---|---|---|---|
| Argentina | 1994 | 24 | 0 | Confederación General del Trabajo |
| Bolivia | 1994 | 37 | 1 | Central Obrera Boliviana |
| Chile | 1992 | 59 | 5 | Central Unitaria de Trabajadores |
| México | 1991 | 47 | 2 | Confederación de Trabajadores de México |
| Uruguay | 1993 | 17 | 3 | Plenario Intersindical de Trabajadores -Convención Nacional de Trabajadores |

Fuente: “Mujeres Latinoamericanas en cifras”. Instituto de la mujer, Ministerio de Asuntos Sociales de España y Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO. 1995.

*Observar si:*

*I. Calculan la probabilidad en todos los casos;*

*II. Hacen una selección y disminuyen los cálculos.*

Ejemplo B

Calcular cuántos números de tres cifras se pueden construir considerando los dígitos del 3 al 7, ambos incluidos. Considerar la posibilidad de repetir cifra y de no repetirla. Calcular la probabilidad de elegir desde una caja en que estén todos esos números, aquéllos que tienen todos sus dígitos iguales.

*Observar si:*

*I. Discriminan la repetición de cifra, de la no repetición;*

*II. Calculan la probabilidad.*

## Actividad 2

**Resuelven problemas que involucran operatoria con probabilidades.**

Ejemplo A

Un jugador de básquetbol tiene un registro de 72% de aciertos en los tiros libres. Si en un partido tiene que lanzar dos veces al aro, ¿cuál es la probabilidad que acierte en ambos lanzamientos?

*Observar si:*

*I. Se apoyan en un dibujo o esquema.*

*II. Multiplican las probabilidades de acierto.*

Ejemplo B

La información del Instituto Nacional de Estadística (INE) señala que en el año 1990, la población en Chile era de 13.099.513 habitantes; en ese mismo año la fuerza de trabajo era de 4.805.762 personas.

¿Cuál es la probabilidad en ese año de que al seleccionar una persona al azar, ésta pertenezca a la fuerza de trabajo?

Si la tasa de participación de la mujer en la fuerza de trabajo era de 30,5%, y el total de mujeres era de 6.627.601, ¿cuál es la probabilidad, en ese año de que al seleccionar una persona al azar, ella sea mujer y pertenezca a la fuerza de trabajo?

## Actividad 3

**Resuelven problemas que involucran probabilidad condicionada.**

Ejemplo A

En una baraja de cartas, determinar la probabilidad de sacar un siete sabiendo que es una carta roja.
En esta situación ¿los sucesos considerados son dependientes o independientes?

*Observar:*

*I. A qué recurren para analizar los datos.*
*II. Si responden a partir de los datos de la tabla.*
*III. Si responden multiplicando las probabilidades de cada suceso.*
*IV. Si reconocen la independencia de los sucesos.*

# Bibliografía

Camous, Henri, (1995). *Problemas y juegos con la matemática.* Editorial Gedisa, España.

Freund, G. y Simon, G., (1997). *Estadística elemental.* Prentice Hall Hispanoamericana, México.

Guzmán, Miguel de, (1995). *Para pensar mejor.* Ediciones Pirámide, España.

Díaz Godino, J. y otros, (1996). *Azar y probabilidad.* Editorial Síntesis, España.

*Olimpíada matemática argentina*, Red Olímpica, Edipubli. S.A. Argentina, (1995).

Perero, Mariano, (1994). *Historia e historias de matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Rey, J. y Babini, J., (1997). *Historia de la matemática.* Editorial Gedisa, España.

Rodríguez, José y otros, (1995). *Razonamiento matemático.* International Thompson Editores, México.

Smullyan Raymond, Satan, (1995). *Cantor y el infinito.* Editorial Gedisa, España.

**Software graficador**

shareware *bajado de internet EQUATION GRAPHER.: http://www.mfsoft.com/equationgrapher/*

'Graphmatica' bajado de internet:
http://download.cnet.com/

**Direcciones internet**

(Es posible que algunas direcciones hayan dejado de existir o se modifiquen después de la publicación de este programa).

Enlaces:
(http://www.enlaces.cl)
Mensa España. Colección de juegos de ingenio de Ciudad Futura:
http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa

Departamento de Ingeniería Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile:
http://www.dim.uchile.cl/

Problemas de matemáticas:
http://www.nalejandria.com/forms/matemas.htm

Sociedad de Matemática de Chile:
http://www.mat.puc.cl/~socmat

Real Sociedad Matemática Española:
http://rsme.uned.es

ICMI-Chile. Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, USACH:
http://fermat.usach.cl/~somachi/index.html

Problemas relativos a superficie:
http://roble.pntic.mec.es/~jcamara/websup1.htm

Matemáticas: Historia, documentación, actividades y problemas, y proyectos
http://nti.educa.rcanaria.es/usr/matematicas

El Paraíso de las Matemáticas:
*http://members.xoom.com/pmatematicas*

Instituto Nacional de Estadística:
http://www.ine.cl/

Historia de la matemática y biografías:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/

# Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios Primer a Cuarto Año Medio

# Matemática

## Objetivos Fundamentales

### 1º
*Primer Año Medio*

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la proporcionalidad, del lenguaje algebraico inicial y de la congruencia de figuras planas.
2. Analizar aspectos cuantitativos y relaciones geométricas presentes en la vida cotidiana y en el mundo de las ciencias; describir y analizar situaciones, con precisión.
3. Utilizar diferentes tipos de números en diversas formas de expresión (entera, decimal, fraccionaria, porcentual) para cuantificar situaciones y resolver problemas.
4. Resolver problemas seleccionando secuencias adecuadas de operaciones y métodos de cálculo, incluyendo una sistematización del método ensayo-error; analizar la pertinencia de los datos y soluciones.
5. Percibir la matemática como una disciplina en evolución y desarrollo permanente.
6. Representar información cuantitativa a través de gráficos y esquemas; analizar invariantes relativas a desplazamientos y cambios de ubicación utilizando el dibujo geométrico.

### 2º
*Segundo Año Medio*

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la ecuación de la recta, sistemas de ecuaciones lineales, semejanza de figuras planas y nociones de probabilidad; iniciándose en el reconocimiento y aplicación de modelos matemáticos.
2. Analizar experimentos aleatorios e investigar sobre las probabilidades en juegos de azar sencillos, estableciendo las diferencias entre los fenómenos aleatorios y los deterministas.
3. Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.
4. Percibir la relación de la matemática con otros ámbitos del saber.
5. Analizar invariantes relativas a cambios de ubicación y ampliación o reducción a escala, utilizando el dibujo geométrico.

### 3º
*Tercer Año Medio*

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de los sistemas de inecuaciones, de la función cuadrática, de nociones de trigonometría en el triángulo rectángulo y de variable aleatoria, mejorando en rigor y precisión la capacidad de análisis, de formulación, verificación o refutación de conjeturas.
2. Analizar información cuantitativa presente en los medios de comunicación y establecer relaciones entre estadística y probabilidades.
3. Aplicar y ajustar modelos matemáticos para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.
4. Resolver desafíos con grado de dificultad creciente, valorando sus propias capacidades.
5. Percibir la matemática como una disciplina que recoge y busca respuestas a desafíos propios o que provienen de otros ámbitos.

### 4º
*Cuarto Año Medio*

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de rectas y planos en el espacio, de volúmenes generados por rotaciones o traslaciones de figuras planas; visualizar y representar objetos del espacio tridimensional.
2. Analizar informaciones de tipo estadístico presente en los medios de comunicación; percibir las dicotomías, determinista-aleatorio, finito-infinito, discreto-continuo.
3. Aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos al análisis de situaciones y a la resolución de problemas.
4. Reconocer y analizar las propias aproximaciones a la resolución de problemas matemáticos y perseverar en la sistematización y búsqueda de formas de resolución.
5. Percibir la matemática como una disciplina que ha evolucionado y que continúa desarrollándose, respondiendo a veces a la necesidad de resolver problemas prácticos, pero también planteándose problemas propios, a menudo por el sólo placer intelectual o estético.

# Contenidos Mínimos Obligatorios

## 1º
*Primer Año Medio*

**I. Números y Proporcionalidad**

**1.** Números

a. Distinción entre números racionales e irracionales. Aproximación y estimación de números irracionales. Estimaciones de cálculos, redondeos. Construcción de decimales no periódicos. Distinción entre una aproximación y un número exacto.

b. Análisis de la significación de las cifras en la resolución de problemas. Conocimiento sobre las limitaciones de las calculadoras en relación con truncar y aproximar decimales.

c. Resolución de desafíos y problemas numéricos, tales como cuadrados mágicos o cálculos orientados a la identificación de regularidades numéricas.

d. Comentario histórico sobre la invención del cero, de los números negativos y de los decimales.

e. Potencias de base positiva y exponente entero. Multiplicación de potencias.

**2.** Proporcionalidad

a. Noción de variable. Análisis y descripción de fenómenos y situaciones que ilustren la idea de variabilidad. Tablas y gráficos.

b. Proporcionalidad directa e inversa. Constante de proporcionalidad. Gráfico cartesiano asociado a la proporcionalidad directa e inversa (primer cuadrante).

c. Porcentaje. Lectura e interpretación de información científica y publicitaria que involucre porcentaje. Análisis de indicadores económicos y sociales. Planteo y resolución de problemas que perfilen el aspecto multi-

## 2º
*Segundo Año Medio*

**I. Algebra y Funciones**

**1.** Lenguaje algebraico

a. Expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador). Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples.

b. Relación entre la operatoria con fracciones y la operatoria con expresiones fraccionarias.

c. Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números.

d. Potencias con exponente entero. Multiplicación y división de potencias. Uso de paréntesis.

**2.** Funciones

a. Representación, análisis y resolución de problemas contextualizados en situaciones como la asignación de precios por tramos de consumo, por ejemplo, de agua, luz, gas, etc. Variables dependientes e independientes. Función parte entera. Gráfico de la función.

b. Evolución del pensamiento geométrico durante los siglos XVI y XVII; aporte de René Descartes al desarrollo de la relación entre álgebra y geometría.

c. Ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y del intercepto con el eje de las ordenadas. Condición de paralelismo y de perpendicularidad.

d. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Gráfico de las rectas. Planteo y resolución de problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones. Análisis y pertinencia de las soluciones.

## 3º
*Tercer Año Medio*

**I. Algebra y Funciones**

**1.** Algebra

a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cuociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.

b. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita. Intervalos en los números reales. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.

**2.** Funciones

a. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:

$y = x^2$

$y = x^2 \pm a,\ a > 0$

$y = (x \pm a)^{2,\ a > 0}$

$y = ax^2 + bx + c$

Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x. Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.

## 4º
*Cuarto Año Medio*

**I. Algebra y Funciones**

a. Función potencia: $y = a\,x^n$, $a > 0$, para $n = 2, 3$ y $4$, y su gráfico correspondiente. Análisis del gráfico de la función potencia y su comportamiento para distintos valores de a.

b. Funciones logarítmica y exponencial, sus gráficos correspondientes. Modelación de fenómenos naturales y/o sociales a través de esas funciones. Análisis de las expresiones algebraicas y gráficas de las funciones logarítmica y exponencial. Historia de los logaritmos; de las tablas a las calculadoras.

c. Análisis y comparación de tasas de crecimiento. Crecimiento aritmético y geométrico. Plantear y resolver problemas sencillos que involucren el cálculo de interés compuesto.

e. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.

plicativo del porcentaje. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Relación entre porcentaje, números decimales y fracciones.

d. Planteo y resolución de problemas que involucren proporciones directa e inversa. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Construcción de tablas y gráficos asociados a problemas de proporcionalidad directa e inversa. Resolución de ecuaciones con proporciones.

e. Relación entre las tablas, los gráficos y la expresión algebraica de la proporcionalidad directa e inversa. Relación entre la proporcionalidad directa y cuocientes constantes, y entre la proporcionalidad inversa y productos constantes.

**II. Algebra y Funciones**

a. Sentido, notación y uso de las letras en el lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas no fraccionarias y su operatoria. Múltiplos, factores, divisibilidad. Transformación de expresiones algebraicas por eliminación de paréntesis, por reducción de términos semejantes y por factorización. Cálculo de productos, factorizaciones y productos notables.

b. Análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la incidencia de la variación de los elementos lineales y viceversa.

c. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis.

d. Comentario histórico sobre la evolución del lenguaje algebraico.

e. Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad. Interpretación geométrica de los productos notables.

f. Ecuación de primer grado. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de los datos, las soluciones y su pertinencia.

---

Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.

e. Función valor absoluto; gráfico de esta función. Interpretación del valor absoluto como expresión de distancia en la recta real.

f. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

**II. Geometría**

a. Semejanza de figuras planas. Criterios de semejanza. Dibujo a escala en diversos contextos.

b. Teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada. Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales. Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones.

c. Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales. Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos. Presencia de la geometría en expresiones artísticas; por ejemplo, la razón áurea.

d. Angulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia. Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos.

e. Uso de algún programa computacional geométrico que permita medir ángulos, y ampliar y reducir figuras.

---

b. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x, deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = |x|$. Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentario sobre el Teorema de Fermat.

c. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

**II. Geometría**

a. Demostración de los Teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.

b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.

**III. Estadística y Probabilidad**

a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.

b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.

c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.

---

**II. Geometría**

a. Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.

b. Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Angulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.

**III. Estadística y Probabilidad**

a. Graficación e interpretación de datos estadísticos provenientes de diversos contextos. Crítica del uso de ciertos descriptores utilizados en distintas informaciones.

b. Selección de diversas formas de organizar, presentar y sintetizar un conjunto de datos. Ventajas y desventajas. Comentario histórico sobre los orígenes de la estadística.

c. Uso de planilla de cálculo para análisis estadístico y para construcción de tablas y gráficos.

d. Muestra al azar, considerando situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, ecología, salud pública, control de calidad, juegos de azar, etc. Inferencias a partir de distintos tipos de muestra.

**III. Geometría**

**1.** Congruencia

a. Congruencia de dos figuras planas. Criterios de congruencia de triángulos.

b. Resolución de problemas relativos a congruencia de trazos, ángulos y triángulos. Resolución de problemas relativos a polígonos, descomposición en figuras elementales congruentes o puzzles con figuras geométricas.

c. Demostración de propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, relacionadas con congruencia. Aporte de Euclides al desarrollo de la Geometría.

**2.** Transformaciones

a. Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. Construcción de figuras por traslación, por simetría y por rotación en 60, 90, 120 y 180 grados.

Traslación y simetrías de figuras en sistemas de coordenadas.

b. Análisis de la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos. Aplicaciones de las transformaciones geométricas en las artes, por ejemplo, M.C. Escher.

c. Clasificación de triángulos y cuadriláteros considerando sus ejes y centros de simetría.

d. Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas.

**III. Estadística y Probabilidad**

a. Juegos de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos. Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad.

b. La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.

c. Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el triángulo de Pascal. Interpretaciones combinatorias.

*"...haz capaz a tu escuela de todo lo grande
que pasa o ha pasado por el mundo."*

Gabriela Mistral

EDUCACION
Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

www.mineduc.cl

Matemática Tercer Año Medio