

Prova de derivació

Assumpció Echevarría i Cuadrillero; Antoni Gomà i Nassarre
Programa d'Informàtica Educativa, 1988.

1. ESPECIFICACIONS GENERALS

- 1.1. Temàtica del programa
- 1.2. Assignatura i nivell escolar
- 1.3. Descripció tècnica

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

- 2.1. Dinàmica de funcionament
- 2.2. Opcions del programa

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

- 3.1. Objectiu del programa
- 3.2. Coneixements previs
- 3.3. Fonamentació teòrica
- 3.4. Metodologia d'ús

4. EXEMPLE D'UTILITZACIÓ

5. ANEX

1. ESPECIFICACIONS GENERALS

1.1. Temàtica del programa

El tema que tracta el programa és el del càlcul de funcions derivades, amb comprovació per part del programa de la correcció o no de la derivada entrada per l'usuari.

1.2. Assignatura i nivell escolar.

Dins l'assignatura de matemàtiques, pot ser útil sempre que es tracti de que els alumnes aprenguin la tècnica de la derivació, atès que el programa permet una adaptació a diversos nivells.

1.2. Descripció tècnica

L'arxiu que conté el programa es denomina DERIVA.EXE i és escrit en llenguatge GW BASIC i compilat posteriorment. Requereix la presència de l'arxiu BRUN20G.EXE que ha de ser accessible des del disquet o subdirectorí des d'on es cridi el programa, que caldrà executar amb la comanda DERIVA.

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

2.1. Dinàmica de funcionament del programa

L'usuari haurà d'escriure la derivada d'una o diverses funcions que, segons l'opció escollida, li hauran estat plantejades per l'ordinador o s'haurà escrit ell mateix. Les

normes d'escriptura d'aquestes funcions són comuns a diversos programes del grup EIX (veieu Normes d'introducció de funcions per teclat corresponents als programes EIX) però cal fer constar que, en cas de dubte, l'escriptura segons les normes del llenguatge BASIC sempre és admesa.

El mateix "avaluador" porta un control d'entrada de la funció. Si ho hem fet incorrectament ens sortirà un missatge explicatiu a la pantalla (i comptarà com a intent, alerta!). És possible que alguna funció (per molt llarga o per molts nivells de parèntesis encaixats) pugui "deixar penjat" l'avaluador o el derivador però amb un ús normal d'aquest programa no l'hem trobat.

Per cadascuna de les funcions se li donen dues oportunitats d'escriure la derivada i se'n comprova la correcció. El temps de resposta no sempre és "immediat" per l'ús de les subrutines comentades i per la forma de comprovar si la derivada és o no correcta, que s'explica més avall. Tanmateix no creiem que aquesta sigui una limitació "important" en un programa com el que presentem.

En cas de no aconseguir escriure la derivada correctament, la tecla F1 permet fer visual "una forma" d'escriure-la, amb tots els perills que això pot comportar.

Si s'escau, en acabar l'opció, l'usuari rep una puntuació que qualifica el seu treball.

A part de les normes per l'entrada de funcions, totes les altres instruccions de funcionament s'expliquen clarament a la pantalla. Entre aquestes convé esmentar que la tecla *F9* permet en qualsevol moment tornar al **Menú principal** (elecció de l'opció de treball) i la tecla *F10* permet abandonar el programa.

2.2. Opcions del programa

El programa presenta tres opcions de treball, a saber:

- 1) Escriptura funció i derivada per part de l'usuari.**
- 2) Funcions plantejades per l'ordinador. Dificultat creixent.**
- 3) Prova de derivació plantejada per l'ordinador.**

A continuació s'expliquen breument aquestes opcions.

- 1) El mateix enunciat és prou explícit i ve completat per les idees generals ja enunciatades.

Caldrà que l'usuari entri la funció que vol derivar i, seguidament, l'expressió que creu que correspon a la funció derivada. Si aquesta no és correcta, tindrà una segona oportunitat. En cas que tampoc sigui correcta podrà veure com l'ordinador té calculada la derivada.

En tot cas aquest tipus de treball continuarà fins que l'usuari ho indiqui

mitjançant *F9* o *F10*.

2) L'ordinador planteja fins a un total de 20 funcions ordenades segons dificultat creixent, dit això amb tota la relativitat que la idea de "dificultat" comporta.

Aquestes funcions són triades responenent a uns esquemes predeterminats i fent que les funcions elementals que hi apareixen siguin triades aleatòriament però, això sí, de manera que la gamma possible sigui progressivament més àmplia. És per això que alguns dels "esquemes" apareixen repetits: la introducció de noves funcions n'augmenta la dificultat.

Vegi's a la secció 4 un exemple de les 20 funcions que han aparegut en l'execució del programa. Es transcriu l'esquema general a què correspon, la funció tal com la presenta el programa (amb normes semblants a les que pot emprar l'usuari per escriure la derivada) i la seva versió BASIC, que pot ajudar a sortir de dubtes.

3) Aquesta opció és semblant a l'anterior pel fet que és l'ordinador qui planteja les funcions a derivar, que són triades entre els esquemes predeterminats explicats en l'opció anterior, però amb les següents observacions:

- a) És l'usuari qui indica el nombre de funcions que vol que li siguin plantejades. Tot i que també podrà tallar el treball amb *F9* en qualsevol moment (en el ben entès que si ho fa quan la màquina espera una entrada de funció haurà de fer-ho seguit de *Retorn*) si arriba a completar el nombre de funcions que havia indicat, en acabar li serà mostrada la puntuació obtinguda a "l'examen".
- b) Les funcions són triades aleatòriament entre els esquemes existents i no hi ha cap idea de recerca d'una dificultat progressiva.
- c) Les funcions elementals que poden aparèixer han de ser triades prèviament per l'usuari (o millor, és clar, pel professor), amb una pantalla com aquesta, en la que el cursor indica a quina funció ens referim en aquell moment.

DERIVADES

Per cadascuna de les funcions següents polseu S si voleu que aparegui en els exemples o N si no us interessa.

Funció $\sin(x)$	sinus
Funció $\cos(x)$	cosinus
Funció $\operatorname{tg}(x)$	tangent, que també podeu escriure TAN
Funció $\operatorname{sqr}(x)$	arrel quadrada, que també podeu escriure AR2
Funció $\operatorname{ARn}(x)$	arrel d'índex n
Funció e^x	funció exponencial, que també podeu escriure EXP
Funció n^x	funció exponencial de base n
Funció $\ln(x)$	logaritme neperià, que també podeu escriure LOG
Funció $\arcsin(x)$	arc sinus, que també podeu escriure ASN

Funció $\arctg(x)$	arc tangent, que també podeu escriure ATN o ARCTAN
Funció $\sinh(x)$	sinus hiperbòlic
Funció $\cosh(x)$	cosinus hiperbòlic
Funció $\tanh(x)$	tangent hiperbòlica
Funció \wedge funció	

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

3.1.Objectiu del programa

L'objectiu del programa és facilitar a l'alumne una eina de treball individual per a la pràctica de la tècnica de derivació.

No és pas objectiu del programa l'ensenyar a derivar ni tampoc, directament, escriure correctament la derivada quan l'usuari falli. Aquesta ha de ser tasca del professor en les seves classes i no volem pas prendre-li.

3.2. Coneixements previs

Hom suposa que l'usuari ha de conèixer les regles fonamentals de derivació: derivada d'una constant, d'una suma, d'una diferència, d'un producte, d'un quocient i la regla de la cadena i, a part d'això, les derivades de les funcions polinòmiques. Hem de considerar que és habitual i ben recomanable que així es faci, donant-ne sobre tot la idea intuïtiva, si s'escau sense demostració, el primer any que s'ensenyia als alumnes la tècnica de derivació.

A part d'això la gamma de funcions elementals de les que es suposa que l'alumne coneix la derivada pot ser progressivament ampliada.

3.3. Fonamentació teòrica

En aquest aspecte, atès que el procediment que es treballa (càlcul de funcions derivades) no presenta cap controvèrsia, explicarem únicament com es comprova el programa si una derivada "sembla que és correcta" o bé "és incorrecta", que aquests són els missatges que rep l'usuari després d'escriure "la seva" derivada.

No es tracta de comparar la cadena de caràcters que ha escrit l'alumne amb una possible cadena deduïda del "derivador". El lector (i més si ha corregit exàmens de derivades) sap que aquesta no pot ser la manera, perquè no hi ha, ni de bon tros una forma única d'escriure una derivada i, doncs, per aquí no pot anar la comprovació. És per això que s'han triat per cada possible esquema de funció a plantejar a l'alumne uns valors de x que, amb quasi total probabilitat, siguin tals que algun(s) d'ells sigui del domini de la funció i de la derivada. Llavors hom substitueix aquests valors en la funció derivada calculada pel "derivador" i en la funció que ha d'entrar l'usuari com a estimació de la derivada. Si tots els valors obtinguts coincideixen (amb un marge d'error de .001) direm que "sembla que la derivada és correcta" (i ho podem assegurar amb un risc d'error ben petit). Si , en canvi, algun valor ens

resulta diferent "la derivada escrita no és correcta".

3.4. Metodologia d'ús

La proposició d'unes funcions a fi i efecte que els alumnes puguin practicar la tècnica de derivació ha de ser, sens dubte, una tasca que faci el professor a la classe, adaptant-se en cada moment a les regles de derivació i a les derivades de les funcions elementals que els alumnes coneixin.

Altrament, és ben cert que pot ser interessant disposar d'un auxiliar per al treball individual de l'alumne, una espècie de "màquina de proposar derivades" que indiqui immediatament si la derivada que ha escrit l'usuari del programa és o no correcta i valor, després d'una sessió de treball, el seu nivell d'habitabilitat en la tècnica de derivar.

Això és el que fa aquest programa pel que, atès que cal un treball individualitzat per part de l'alumne, serà del tot recomanable disposar d'aula d'informàtica.

En el moment de l'elaboració del programa vàrem plantejar-nos uns condicionants que permetessin l'adaptació a determinades situacions però sense deixar que el programa reduís molt la seva utilitat. S'expliquen a continuació.

Tot i que es parteix de la idea de que, ja des del primer contacte amb la tècnica de derivar, convé que els alumnes es familiaritzin amb les regles de derivació "aritmètiques" (suma, producte, quocient) i amb la regla de la cadena (ni que sigui explicada a nivell intuïtiu i pràctic), la gamma de funcions elementals de les que els alumnes coneixen la funció derivada és molt variable segons els nivells i/o els professors.

És per això que hi ha una possibilitat d'adaptació del programa en aquest aspecte. Això es fa, evidentment, si és l'usuari el qui entra la funció a derivar i es pot fer també l'**Opció 2** perquè la mateixa gamma de funcions elementals entre les que l'ordinador escull és cada vegada més àmplia i com que, per altra banda, el treball pot ser tallat en qualsevol moment amb *F9*, això permet l'ús d'aquesta opció a diversos nivells.

Comentem finalment, com ja s'ha dit que, en el treball amb l'**Opció 3** es fa inicialment la pregunta de quines funcions es voldran fer servir (tenint present que aquesta pregunta va adreçada més aviat al professor que al directe usuari, és a dir l'alumne), cosa per la que apareixen en pantalla les funcions possibles (i de passada s'ens recorden els codis que podem fer servir) i cal polsar, per cadascuna d'elles, *S* o *N*.

Com ja s'ha indicat, no és objectiu directe de la subrutina "derivador" la d'escriure la derivada d'una funció sinó més aviat el que vol és possibilitar el càlcul de la derivada d'una funció en un punt i, de fet, no hi ha hagut massa "preocupació" per fer que la derivada es calculi "com ho fa tothom". Tot i això s'ha inclòs al programa una

subrutina auxiliar que permet a l'usuari conèixer una expressió de la funció derivada (que apareix descodificant allò que ha calculat el "derivador", escrita en general amb les normes del BASIC). Aquesta possibilitat es dona únicament a mode d'orientació i haurà de ser el professor qui indiqui als alumnes la conveniència o no d'emprar-la.

4. EXEMPLE DE FUNCIONS PLANTEJADES A L'USUARI EN L'OPCIÓ DE "DIFICULTAT CREIXENT"

Es dona, en cada cas, l'esquema a què corresponen, la forma en què les presenta el programa d'acord amb les normes d'escriptura i, finalment la forma com haurien de ser escrites en BASIC.

El professor usuari podrà jutjar, així, fins a quin nombre de derivades pot recomanar que facin els seus alumnes en aquesta opció i també, eventualment, quines "s'han de saltar".

Funció 1: Funció polinòmica
 $F(x) = 3x^5 - 2x^3 + 2x - 6$
 $F(x) = 3*x^5 - 2*x^3 + 2*x - 6$

Funció 2: $F(x) = f(n+x)$
 $F(x) = \sin(4+x)$
 $F(x) = \sin(4+x)$

Funció 3: $F(x) = f(nx)$
 $F(x) = \text{sqr } 5x$
 $F(x) = \text{sqr } (5*x)$

Funció 4: $F(x) = x + f(mx)$
 $F(x) = x^6 + \text{tg } 4x$
 $F(x) = x^6 + \text{tg}(4*x)$

Funció 5: $F(x) = f(nx) g(mx)$
 $F(x) = \cos 2x \text{ Ln } 3x$
 $F(x) = \cos(2*x)*\text{Log}(3*x)$

Funció 6: $F(x) = nx / f(x)$
 $F(x) = 8x / \cos x$
 $F(x) = 8*x/\cos(x)$

Funció 7: $F(x) = e^{f(x)}$
 $F(x) = e^{\cos x}$
 $F(x) = \exp(\cos(x))$

Funció 8: $F(x) = (\text{Polimomi})$
 $F(x) = (x^3+6x^4)^6$

$$F(x) = (x^3 + 6x^4)^6$$

Diguem com a exemple que, en aquest cas, la derivada pot ser escrita així:

$$6(3x^2 + 24x^3)(x^3 + 6x^4)^5$$

o també, seguint ls normes del BASIC:

$$6*(3+x^2+24*x^3)*(x^3+6*x^4)^5$$

Funció 9:

$$F(x) = (x - f(nx))^m$$

$$F(x) = (x - \text{Ln } 5x)^8$$

$$F(x) = (x - \log(5x))^8$$

Funció 10:

$$F(x) = f(f(x))$$

$$F(x) = \cos \cos x$$

$$F(x) = \cos (\cos(x))$$

Funció 11:

$$F(x) = f(x) + g(\text{polimomi})$$

$$F(x) = \cos x + \sin(4x^3 - 3x^2 + 5)$$

$$F(x) = \cos(x) + \sin(4*x^3 - 3*x^2 + 5)$$

Funció 12:

$$F(x) = f(x) / g(nx)$$

$$F(x) = \text{sqr } x / \sin 9x$$

$$F(x) = \text{sqr}(x) / \sin(9x)$$

Funció 13:

$$F(x) = \text{arrel n-sima d'un polinomi}$$

$$F(x) = \text{AR5 } (x^3 + 4x^5)$$

En BASIC no es pot escriure de manera elemental aquesta funció. Cal tenir present, a més que una expressió tal com $(\text{polinomi})^{(1/5)}$ només serviria quan la base és positiva i, en canvi, l'arrel cinquena està definida per tot valor del radicand.

L'avaluador incorpora les arrels n-simes com a funcions.

Funció 14:

$$F(x) = n^{(xf(x))}$$

$$F(x) = 5^{x \ln x}$$

$$F(x) = 5^{(x * \sin(x))}$$

Funció 15:

$$F(x) = f(x)^{g(x)}$$

$$F(x) = \text{tg } x ^ \cos x$$

$$F(x) = \text{tg } (x) ^{\cos(x)}$$

A partir d'ací s'incorporen les funcions trigonomètriques inverses i es fa una revisió, lleugerament modificada, d'alguns esquemes de funció ja treballats.

Funció 16:

$$F(x) = (x f(X))^n$$

$$F(x) = (x \arctg 3x)^6$$

$$F(x) = (x * \text{ATN}(3x))^6$$

Funció 17:

$$F(x) = f(x).g(h(x))$$

$$F(x) = \text{sqr } x \sin(\cos x)$$

$$F(x) = \text{sqr } (x) * \sin(\cos(x))$$

Funció 18:

$$F(x) = f(nx) \cdot g(mx) \cdot h(px)$$

$$F(x) = \sin 2x \cos 3x \cos 4x$$

$$F(x) = \sin(2*x) * \cos(3*x) * \cos(4*x)$$

Funció 19:

$$F(x) = f(g(x))$$

$$F(x) = \text{sqr } \ln x$$

$$F(x) = \text{sqr}(\ln(x))$$

Funció 20:

$$F(x) = f(g(\text{polinomi}))$$

$$F(x) = e^{\arcsin(6x^5 + 10x + 1)}$$

$$F(x) = \exp(\text{ASN}(6*x^5 + 10*x + 1))$$

5. ANEX: Normes d'introducció de funcions per teclat

Alguns dels programes del grup EIX (FUNCDER, ITER, PARAMETR, GRAFICAC i POLAR) i el programa DERIVA inclouen una subrutina específica d'avaluació de funcions entrades des de teclat. Aquesta subrutina permet entrar una funció com una cadena de caràcters (string) en un programa BASIC i calcular els seus valors numèrics per als valors de la variable que siguin del domini o poder rebre un missatge explicatiu per als que no siguin del domini.

A més, aquesta subrutina possibilita:

* La inclusió de funcions que el BASIC no contempla directament.

* L'entrada de funcions amb el llenguatge "usual" de les matemàtiques, és a dir, sobre tot, escriure-les evitant signes de producte i determinats parèntesis en arguments de funció, tal com ho fem en l'escriptura ordinària quan no hi ha confusió.

ELEMENTS PERMESOS EN L'ESCRITURA DE LA FUNCIO:

Podem usar en l'escriptura de la funció els següents elements:

* Parèntesis, oberts i tancats.

* Signes aritmètics: + - * / ^ amb els resultats usuals (suma, diferència, producte, quocient, potenciació) però amb les possibilitats d'omissió que s'expliquen més avall.

* La variable, escrita en majúscula o en minúscula (ja sigui X, A, T, segons ho indiqui el programa de què es tracti).

* Noms de funcions elementals amb els codis que s'expliquen seguidament. Podran anar descrites en majúscules o en minúscules.

Trigonomètriques: el sinus, escrit SIN
 el cosinus, COS
 la tangent, TAN o bé TG

Trigonomètriques inverses:
 l'arc sinus, ASN o bé ARCSIN
 l'arc tangent, ATN, ARCTG o bé ARCTAN

Hiperbòliques: sinus hiperbòlic, SINH
 cosinus hiperbòlic, COSH
 tangent hiperbòlica, TANH o bé TGH

Logaritme neperià: LN o bé LOG

Funció exponencial de base e: EXP o bé e^

Arrels: arrel quadrada, SQR
 arrel d'índex n, ARn (n_N, n_2)
 exemples: AR3, AR8, AR23, ...

Aritmètiques: part entera, INT
 signe, SGN
 valor absolut, ABS

L'argument de la funció no caldrà escriure'l entre parèntesis si no hi ha confusió, com s'explica més avall.

* Números en notació decimal (però, la , i la ' són admeses com a punt decimal si hom ha controlat abans l'entrada de la cadena adequadament) o científica i, a més, e i PI s'admeten entrats així (en majúscules o minúscules) perquè representen les que segurament són les dues constants més importants de les matemàtiques.

Entre un element i un altre es poden posar espais en blanc que facilitin l'escriptura... però no en mig d'un nom de funció ni, naturalment, en mig d'un número.

NORMES PER L'ESCRITURA DE LES FUNCIONS:

L'avaluador permet entrar la funció en una forma molt semblant a com s'escriuria a la classe o l'escriuen els textos.

Tanmateix, hi ha una limitació que no podrem pas salvar: la cadena de caràcters representativa de la funció haurà de ser escrita "en un sol nivell". No valdran subíndexs o exponents ni fraccions amb una expressió damunt de la línia i una altra a sota. És per això que es recomana emprar els parèntesis per a explicitar clarament qualsevol expressió on hi hagi possibilitat de confusió amb el signe ^ de potència.

En relació amb l'entrada de funcions en BASIC o altres llenguatges de programació, aquestes són les diferències fonamentals:

Podem ometre el signe * quan no hi hagi confusió però procurarem escriure en els productes on un factor sigui numèric aquest al davant.

Exemples:

Podem escriure $3x$ enlloc de $3*x$, però no $x3$ en lloc de $x*3$; podem entrar $5x^3+4x^2+7x$ per indicar allò que en BASIC seria $5*x^3+4*x^2+7*x$ o també $5x\sin(x)$ per a indicar $5*x*\sin(x)$ i, a més ...

Podem ometre els parèntesis per a l'argument de la funció quan no hi hagi confusió.

I, doncs, podem escriure $5x \sin x$ per a indicar $5*x*\sin(x)$ i, combinant tot això, podem escriure per exemple una expressió com és ara $\cos 4x + 7x \ln 3x$ per a indicar allò que en BASIC escriuríem com a $\cos(4*x)+7*x*\text{LOG}(3*x)$.

Tanmateix convé aclarir que una expressió com $\sin x \ln x$ s'interpreta com $\sin(x)*\log(x)$ i que si hom vol entrar la funció $\sin(x \ln x)$ cal emprar els parèntesis per a indicar l'argument de la funció, exactament com es faria en l'escriptura ordinària.

Podem ometre els parèntesis per a un denominador o un exponent que siguin productes.

Exemples:

No ens caldrà escriure $4/(5*x)$ o bé $4/5/x$ per a indicar (fòrmula 1) sinó que podem posar $4/5x$.

També podem escriure $2^x \sin x$ per indicar $2^{(x*\sin(x))}$. Cal observar que aquesta norma "xoca" amb la que indica que la ^ té precedència envers el producte. És per això que ja anteriorment s'ha recomanat l'ús dels parèntesis si hom veu confusió quan s'usa ^. En aquest sentit serà recomanable, per evitar confusions, escriure l'expressió que ara comentem com $2^{(x \sin x)}$.

Aquesta recomanació ja serà d'ús obligat per escriure una exponencial "de tres pisos": caldrà que usem els parèntesis que indiquin prioritats.

Pel que fa a la relació entre el signe de potència i els arguments de les funcions convé dir que si no són permeses expressions tals com $\sin^2 x$, $\cos^2 4x$ (i tampoc $\sin^2(x)$ o coses semblants que hom pogués imaginar) per a indicar $(\sin x)^2$ o bé $(\cos 4x)^2$.

Ara, el càlcul de les funcions té precedència respecte la potenciació i, doncs, si escrivim $\sin x^2$, igual com passa en BASIC, es calcularà $(\sin x)^2$. També podem escriure $\cos 4x^2$ per tal que es calculi $(\cos 4x)^2$.

Tanmateix, com es feia en el cas de potències i productes, és possible emprar sempre que es vulgui els parèntesis per evitar confusions.