

# Resolució gràfica d'equacions

*E. Cabal García; S. Manrique Catalán ; T. Campoy Maldonado*  
Programa d'Informàtica Educativa, 1990.

## 1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

- 1.1 Títol
- 1.2 Autors
- 1.3 Tema
- 1.4 Assignatura
- 1.5 Nivell escolar
- 1.6 Coneixements previs
- 1.7 Localització
- 1.8 Noms dels fitxers

## 2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

- 2.1 Posta en marxa
- 2.2 Opcions bàsiques
- 2.3 Diagrama estructural
- 2.4 Instruccions. Interacció

## 3. ASPECTES PEDAGÒGICS

- 3.1 Objectius
- 3.2 Metodologia d'ús
- 3.3 Opcions i exemple d'ús

## 1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

### 1.1 Títol

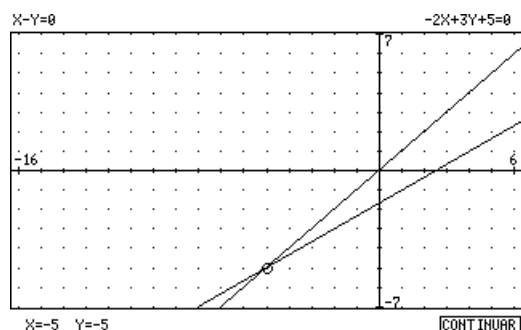
RESOLUCIÓ GRÀFICA D'EQUACIONS

### 1.2 Autors

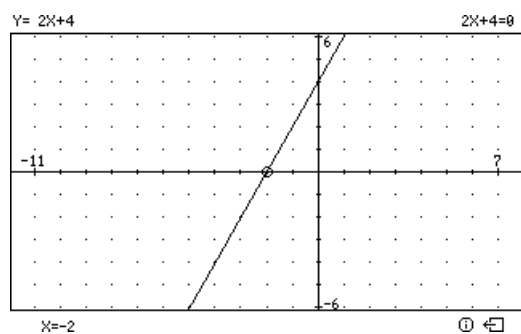
E. Cabal García  
S. Manrique Catalán  
T. Campoy Maldonado  
Col.labora: Grup ABAX

### 1.3 Tema

Aquest programa permet resoldre analíticament i gràfica equacions i sistemes d'equacions de grau un i dos, i resoldre gràficament altres equacions; associa la solució d'equacions o sistemes d'equacions amb les interseccions de les gràfiques corresponents.



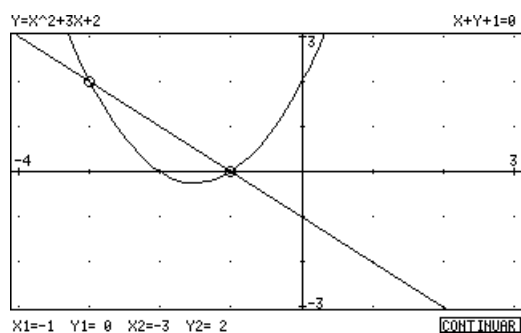
El programa permet la representació gràfica de funcions associades a equacions o sistemes lineals i quadràtiques, funcions definides en forma explícita associades a l'equació corresponent. Aquestes opcions s'ofereixen amb les possibilitats de triar l'escalat convenient i augmentar o reduir posteriorment la zona visualitzada.



La unitat facilita l'estudi de la relació entre expressions algebraiques de l'equació o del sistema i la representació gràfica de la/es seva/es funció/ns associada/es.

El programa mitjançant ampliacions o reduccions d'escala, permet observar les solucions de les equacions o dels sistemes d'equacions.

El programa no fa servir els mètodes de resolució d'equacions que s'utilitzen en el Càlcul Numèric.



## 1.4 Assignatura

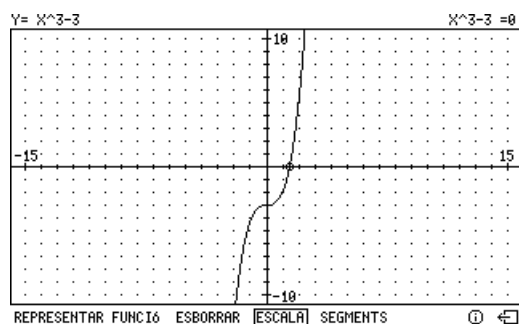
Matemàtiques.

## 1.5 Nivell escolar

Els tres cursos de BUP i COU.  
Els cinc cursos de F.P.

## 1.6 Coneixements previs

Per començar és aconsellable conèixer els conceptes associats al pla cartesià i la seva representació gràfica, coordenades, eixos, ... També és aconsellable conèixer les funcions a representar i els conceptes associats a la representació gràfica de funcions.



Els conceptes i relacions entre: equació, solucions d'una equació, arrels de l'equació, intersecció de la funció associada a l'equació amb els eixos, ... són fonamentals per treballar amb aquest programa, si bé també es cert que el programa pot servir per il·lustrar aquests conceptes.

És important conèixer, abans o bé a través del programa, la relació entre solució de l'equació i gràfica de la funció associada, i entre els paràmetres de la funció i els coeficients de l'equació.

Si el que es tracta és de resoldre un sistema és important conèixer o estudiar amb el programa la relació entre el concepte d'intersecció de les gràfiques associades i solució del sistema.

Així mateix s'ha de conèixer la notació prevista pel programa per introduir expressions en alguna de les opcions del programa. (Vegeu apartat 2.4).

A l'apartat d'instruccions i interacció es comenten algunes d'aquestes normes.

Per utilitzar el programa per resoldre equacions associades a una funció no lineal o quadràtica convé conèixer prèviament aquestes funcions.

## 1.7 Localització

Aquesta unitat es troba en el disc amb l'etiqueta  
GRAF123 UNITAT 6  
RESOLUCIÓ GRÀFICA D'EQUACIONS

## 1.8 Noms dels fitxers

La unitat 6 està formada pels següents arxius:

Programa:

GRAFU6.EXE

Altres arxius:

PORTADA.BIN	LETD	U6-STANG.SCG	U6P1.SCT
U6P2.SCT	U6P3.SCT		

Arxius de les pàgines d'ajut i documentació:

U6D1.SCT	U6D2.SCT	U6D3.SCT	U6D4.SCT	U6D5.SCT
U6D6.SCT	U6D7.SCT	U6D8.SCT	U6D9.SCT	U6D10.SCT
U6I1.SCT	U6I2.SCT			
U6I3.SCT	U6I4.SCT	U6I5.SCT		U6I6.S
CT	U6I7.SCT	U6I8.SCT	U6I9.SCT	U6I10.SCT
U6I11.SCT	U6I12.SCT	U6I13.SCT		

## 2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

### 2.1 Posta en marxa

Per executar la unitat 6 ho podem fer amb alguna de les següents tres possibilitats:

a) Disposar d'un disquet a la boca A amb tots els arxius assenyalats.

A continuació executar el programa GRAFU6.EXE

b) Copiar al disc C tots els arxius en un subdirector.

Cal accedir al subdirector i executar el programa GRAFU6.EXE

c) Instal·lar al disc C el programa i els arxius.

Instal·lar prèviament el programa amb els seus arxius a través del Sèsam.

A continuació accedir a l'opció corresponent dels menús que apareixen a la pantalla.

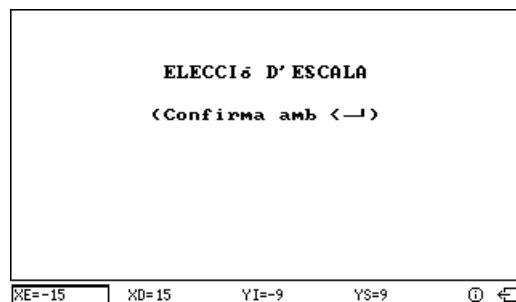
### 2.2 Opcions bàsiques

Un cop en marxa, el programa espera que premeu qualsevol tecla. Ens oferirà un menú amb tres opcions que permeten començar, accedir a una breu documentació o sortir.

Les tres opcions surten a la pantalla així:

COMENÇAMENT  
DOCUMENTACIÓ  
SORTIDA

Queda assenyalada amb un color diferent una opció.

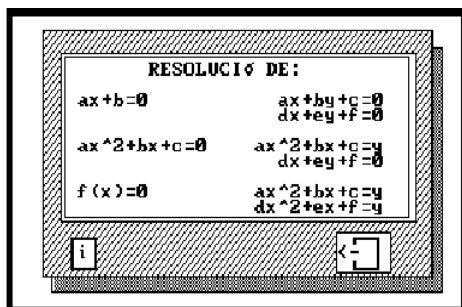


La primera és l'opció per començar, que és activada prement ↵. (Vegeu la interacció 2.4). Pregunta pel tipus d'escala i a continuació espera l'entrada d'una

funció, a la resta d'opcions el programa calcula l'escala per defecte.  
L'objectiu bàsic, i per tant les opcions bàsiques del programa, són la solució d'equacions a través de la gràfica de funció associada.

### Tipus d'equació o sistemes d'equacions presents al menú.

El programa ofereix com a menú d'opcions bàsiques sis propostes, les cinc primeres propostes donen una opció per demanar la solució analítica.  
El programa queda a l'espera del tipus d'equació a resoldre.



Les opcions fan referència a resolucions de diferents tipus, com equacions de primer i segon grau, en aquest cas a més a més donarà una opció que calcularà la solució analítica.

#### a) Resolució analítica i gràfica.

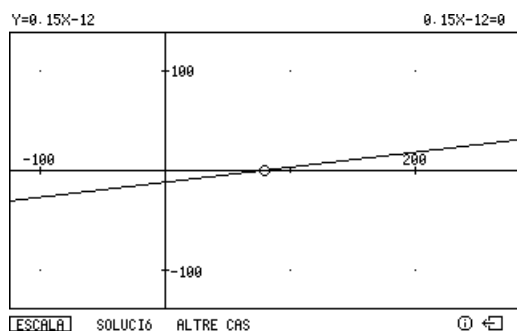
Resolució d'una equació de primer grau.

Resolució d'una equació de segon grau.

Resolució d'un sistema format per dues equacions de primer grau.

Resolució d'un sistema format per una equació de primer grau i una de segon grau.

Resolució d'un sistema format per dues equacions de segon grau.



A l'escollir una d'aquestes opcions el programa queda a l'espera dels paràmetres de l'equació. S'han de teclejar aquests valors.

El programa calcula de manera automàtica l'escala més adient per poder veure a la pantalla la/les solució/ns de l'equació o sistema.

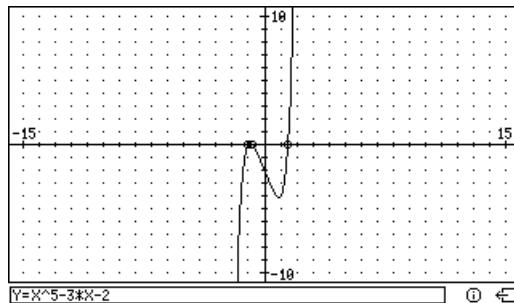
A continuació el programa ofereix l'opció de modificar l'escala, accedir a la solució o bé estudiar un nou cas.

#### b) Resolució gràfica.

Resolució d'una equació qualsevol.

En triar l'opció  $f(x)=0$ , el programa permet introduir una equació i, si la sintaxi

és correcta, dibuixa a la pantalla amb l'escala actual la funció associada.



Cal introduir la funció mitjançant el teclat, tot tenint en compte que la seva sintaxi s'ha d'ajustar a les normes previstes. (Veure apartat 2.4).

El programa reconeix les següents funcions associades a les equacions:

ABS	Funció valor absolut
ARCCOS	Funció arccosinus (Nom alternatiu: ACN)
ARCSIN	Funció arcsinus (Noms alternatius: ARCSEN, ASN)
ARCTAN	Funció arctangent (Noms alternatius: ATN, ARCTG)
ARn	Funció arrel n-èsima. n ha de ser un nombre enter
COS	Funció cosinus
EXP	Funció exponencial de base "e"
INT	Funció part entera
LN	Funció logaritme neperià (base e)
LOG	Funció logarítmica de base 10
LOGx	Funció logarítmica de base x. x ha de ser positiva.
SGN	Funció signe (Varia entre 1, 0 i -1 en funció del signe de X)
SQR	Funció arrel quadrada
SIN	Funció sinus (Nom alternatiu: SEN)
TAN	Funció tangent (Nom alternatiu: TN)

A més durant l'execució del programa hom ofereix en diferents moments altres opcions com:

## ESCALA

Abans de començar l'usuari haurà de decidir si utilitza l'escala ESTÀNDARD que se li ofereix, o bé si prefereix una altra escala. No obstant, en diferents fases del programa, és possible modificar l'escala que s'estigui utilitzant.

Per canviar d'ESCALA es pot fer amb les següents possibilitats:

## CANVIAR

Es demanen els valors dels extrems del pla que es veurà en el monitor.

Pot ser sol·licitada qualsevol regió del pla. No és imprescindible que hi estiguin

inclosos els eixos. En el cas de no ser visualitzats els quatre semieixos, l'ordinador ens indica prou informació per conèixer els valors de les unitats de l'escala. (Vegeu-ne alguns casos en la secció 2.3).

### MEITATS.

Permet visualitzar les meitats de les divisions del reticle que hi ha en pantalla; el seu objectiu és facilitar l'estudi de les gràfiques representades en un reticle on creguem que són insuficients les divisions visualitzades.

Poden demanar-se els valors meitat d'un dels eixos o bé dels dos.

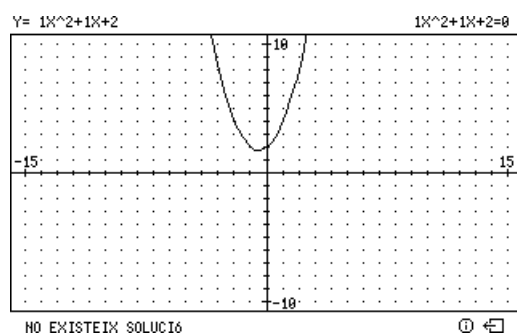
### ESTÀNDARD

Els extrems d'aquesta escala són:

Eix X: -15, 15

Eix Y: -10, 10

A la figura podeu observar aquest escalat.



### QUADRICULAR

Aquesta opció ens permet obtenir en pantalla un reticulat on les unitats dels dos eixos siguin d'igual longitud.

Dels quatre extrems del pla s'ha d'assenyalar aquell que serà establert per l'ordinador a fi de tenir aquest reticle amb les unitats d'igual longitud en ambdós eixos.

### PUNTS/SEGMENTS

Aquesta opció commuta la forma de representació de la funció entre dues formes.

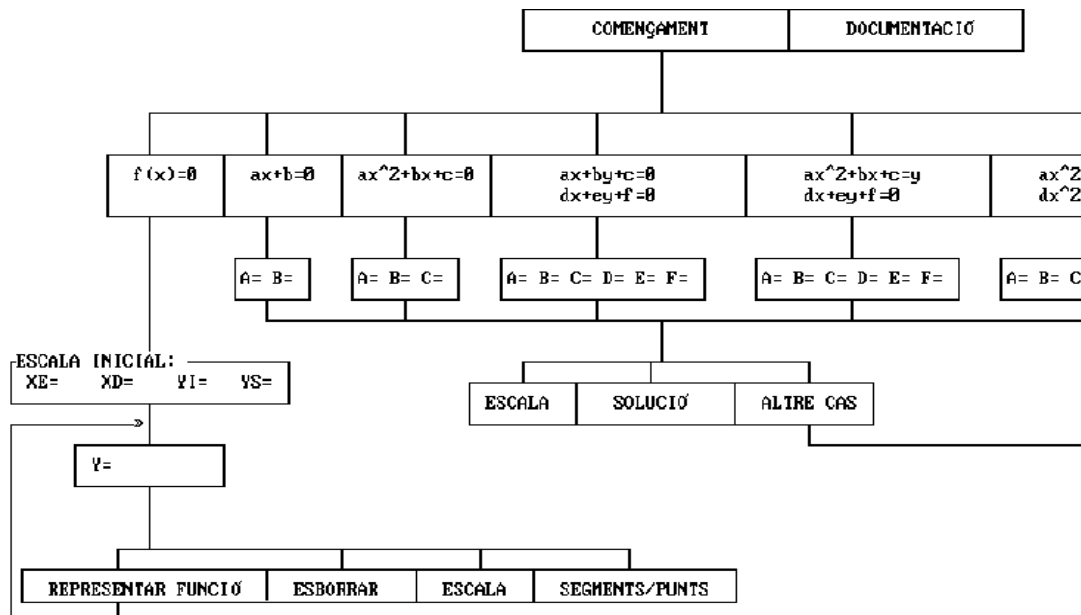
En la forma PUNTS, la funció es dibuixa com una sèrie de punts (més adient per algunes funcions discontinües) i en la forma SEGMENTS, com a segments units.

### ESBORRAR

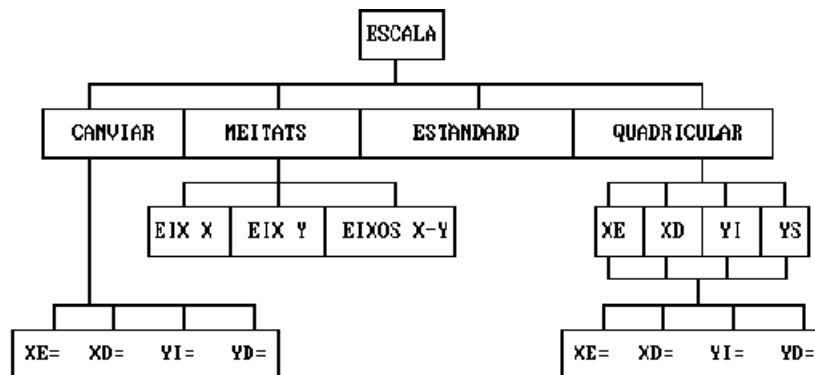
Esborra les gràfiques dibuixades i deixa els eixos de coordenades amb l'escala actual.

## 2.3 Diagrama estructural

Un cop s'ha triat l'opció COMENÇAMENT el programa permet continuar segons es detalla en el diagrama estructural de la següent pàgina.



El diagrama que correspon a ESCALA s'ha inclòs a continuació per tal de fer més clar el diagrama anterior.



## 2.4 Instruccions. Interacció

### A) Interacció

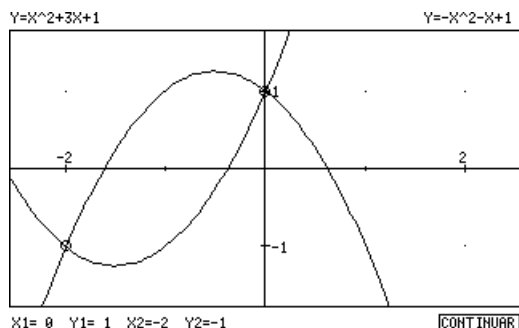
La interacció amb el programa segueix les característiques generals de tots el programes de GRAF123, del qual forma part.

#### a) Selecció d'una opció.

- Les opcions accessibles en cada instant apareixen en la part inferior de la pantalla.
- Un rectangle emmarca una d'aquestes opcions. Aquest marc pot desplaçar-se cap a la dreta mitjançant la barra espaiadora. Les tecles de moviment del cursor <- i -> també permeten desplaçar el marc cap a l'esquerra o cap a la dreta. D'aquesta manera hom indica quina serà l'opció seleccionada.
- En prémer ↵ el programa considera seleccionada l'opció emmarcada i



en prossegueix l'execució a través d'aquesta opció.



b) Informació o Ajut.

- Cada vegada que l'usuari pot interaccionar amb el programa se li ofereix la possibilitat de sol·licitar "ajut" a través de l'opció "informació", que és representada mitjançant una "i" emmarcada per una circumferència.
- La informació proporcionada està relacionada amb la situació des de la qual es demana.

c) Sortida.

- De la mateixa manera s'ofereix la possibilitat de retrocedir a opcions anteriors. Per fer-ho cal utilitzar l'opció "sortida" que apareix a l'extrem inferior dret del monitor indicada mitjançant el símbol situat més a la dreta.

d) Entrada de valors numèrics.

Pel que fa a l'entrada de valors numèrics cal assenyalar:

- El nombre màxim de caràcters que admet és de 6.
- Només admet aquells caràcters que puguin tenir sentit en el moment de ser avaluats.
- La coma decimal s'indica mitjançant un punt (".").
- Admet fraccions. Per exemple: 5/3, -6/7, etc.
- El marc indica a quina variable s'assigna el valor introduït.
- En cas que es vulgui esborrar, pot fer-se mitjançant la tecla de retrocés. També, si es torna a una entrada quan es tecleja un valor, queda automàticament esborrat l'anterior.
- Per prosseguir l'execució del programa amb els valors introduïts, cal prémer ↵ quan el marc estigui sobre alguna de les variables del model.

e) Possibles errors.

Si en la pantalla no apareix la gràfica o el reticle, sense ser considerats els valors escrits, aquesta circumstància pot ser deguda a:

- La gràfica que es vol dibuixar queda fora dels límits del pla visualitzat.
- Els valors teclejats no són avaluables o no són correctes. Exemples: 5/0, 3/, 0./0., 3,2
- Falten dades
- El marc no es troba sobre una de les variables.
- A l'escalat del pla els extrems d'un eix s'han teclejat amb valors iguals.

**B) Altres instruccions.**

Per introduir la funció mitjançant el teclat, s'ha de tenir en compte que la seva sintaxi s'ha d'ajustar a unes normes bàsiques.

#### 1. Anàlisi de les expressions

El programa disposa d'un analitzador sintàctic de l'expressió que revisa la informació a mesura que hom la introdueix. Aquest control evita l'entrada d'expressions incorrectes.

Si la funció introduïda es dona per acabada quan està incompleta el programa avisa, donant l'opció de completar o abandonar el procés.

Els caràcters alfabètics poden ser teclejats en majúscules o minúscules. A la pantalla sempre apareixen en majúscules.

#### 2. Normes d'introducció de la funció

Constants.

Poden tenir fins a sis xifres. S'ha de fer servir el "." per senyalar on comencen els decimals. Els nombres positius han d'introduir-se sense el signe "+". Existeixen dues constants definides: E i PI. L'entrada de constants numèriques segueixen els mateixos criteris que a la resta d'entrades de nombres.

Variables.

El nom de la variable independent és "X"

Operadors aritmètics.

Els operadors aritmètics són:

+ suma                      \* producte  
- diferència                / divisió                ^ potència

S'ha d'indicar sempre l'operador (inclòs el del producte: "\*")

#### 3. Parèntesis.

Els parèntesis canvien la prioritat de les operacions. L'argument d'una funció ha d'anar entre parèntesis.

#### 4. Prioritat en les operacions.

La prioritat correspon a aquella que va indicada entre parèntesi. A continuació la potència, el producte i la divisió totes dues al mateix nivell. Finalment en l'últim esglaó la suma i la resta. Si hi ha més d'un operador del mateix nivell es realitzen les operacions d'esquerra a dreta.

## 3. ASPECTES PEDAGÒGICS

### 3.1 Objectius

L'objectiu didàctic fonamental d'aquest programa és servir de suport i ajut en els temes relacionats amb la resolució d'equacions i sistemes d'equacions.

Aquest ajut pot realitzar-se tant com a mitjà de comprovació del tema com utilitzant-lo a través de les explicacions.

De forma específica poden establir-se com objectius:

- Aconseguir que l'alumne aprengui a buscar les arrels d'un polinomi de primer grau i d'un de segon grau, relacionant les solucions de l'equació associada amb els punts d'intersecció amb l'eix X, i les arrels del polinomi.
- Aprendre a buscar les solucions d'una equació qualsevol.
- Aprendre a resoldre sistemes formats per dues equacions lineals, una lineal i una quadràtica, dues quadràtiques.

- Que l'alumne arribi a relacionar:
  - L'expressió algebraica d'una funció.
  - La seva representació gràfica.
  - La solució de l'equació associada.
- (Si més no per a equacions polinòmiques de fins a grau dos).
- Poder estudiar més equacions gràcies a la facilitat amb què s'aconsegueix la representació.
- Obtenir una més gran exactitud en la representació que la que s'obté a la pissarra.
- Predir i comprendre la influència que tenen sobre la solució de l'equació, els diversos paràmetres.
- Estudiar l'equació i la relació amb la seva representació en el pla.
- Comparar dues equacions i veure les seves solucions i relacions gràfiques amb les funcions associades.
- Utilitzar la noció d'escala, i a partir de l'opció d'escala trobar solucions de l'equació o dels sistemes.

### 3.2 Metodologia d'ús

Creiem convenient dirigir l'alumne al començament davant de l'ordinador. Per fer-ho, suggerim que l'alumne posseeixi una petita documentació.

Cal fer notar la relació existent entre l'equació i la funció associada que es representa, remarcant el fet que les solucions de l'equació són els punts d'intersecció de la funció associada amb l'eix de les X.

S'ha d'assenyalar (un cop assimilada la relació entre equació i funció associada a ella) que la solució del sistema no és altra cosa que els punts d'intersecció.

L'opció d'escalat permet aproximar-se a la solució.

S'accedeix directament a cada una de les sis opcions, segons quin sigui l'objectiu de la classe. Els valors donats als paràmetres dependran del nivell i l'edat dels alumnes.

Per tal d'obtenir la solució gràfica es disposa d'una eina gràfica potent pel fet de poder-se variar l'escalat, cosa que permet aproximar-se progressivament a la solució gràfica.

Sembla convenient començar doncs per resoldre equacions de primer i segon grau, seguit de sistemes.

Un cop assimilades les conclusions que se'n poden extreure seria convenient seguir resolent equacions, començant primerament per les polinòmiques (tercer grau, quart, etc), i continuar amb les equacions que porten associades funcions elementals, (exponencials, logarítmiques, trigonomètriques, etc.).

Mitjançant ampliacions d'escala es pot arribar a establir el nombre d'arrels que té l'equació, i, mitjançant reduccions d'escala, es pot arribar a establir les solucions amb una aproximació determinada prèviament.

Després es poden resoldre sistemes d'equacions començant per dues equacions i complicant-les fins on es consideri oportú.

#### ESCALA

La utilització de l'opció d'ESCALA, permet representar una gràfica en diferents

escales, visualitzar diferents zones del pla, incrementar el nombre de divisions senyalades en la pantalla, etc.

Aquesta opció permet fer observar el diferent aspecte que pot tenir una mateixa recta o paràbola (equació associada de primer grau o segon grau) segons els valors de l'escala.

També la modificació de l'escala a conveniència pot ajudar a assimilar conceptes relatius a escala, pla cartesià, coordenades cartesianes, representació en un pla, ...

Didàcticament sembla més correcte començar treballant amb escales que mantinguin la proporció entre les unitats dels eixos.

### 3.3 Opcions i exemple d'ús

A continuació es proposen alguns exemples de possible utilització del programa. El procés d'interacció amb l'ordinador es proposa en els diferents exemples.

- Una vegada que el programa està en marxa, trieu l'opció de COMENÇAMENT, prement  $\downarrow$  quan estigui senyalada aquesta opció.
- A continuació, apareixen les sis opcions bàsiques; escolliu-ne una.
- Una vegada escollit el programa demana pels coeficients, excepte en el cas de resolució d'una equació qualsevol.
- Després d'introduir els paràmetres, es dibuixarà en la pantalla la funció associada. Les solucions, si existeixen, apareixen envoltades per un cercle blau.
- Una vegada realitzat el dibuix a la pantalla podeu adaptar l'escala, estudiar els punts d'intersecció, ...

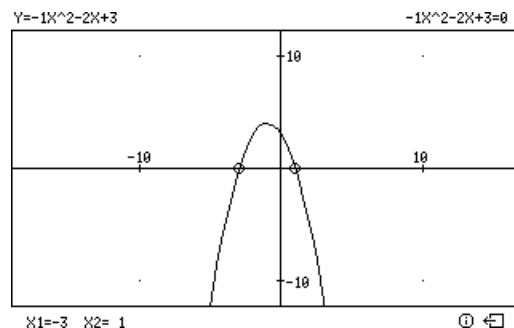
Per tal d'aproximar la solució gràficament, cal escollir l'opció d'ESCALA reiteradament, de forma que cada vegada es representi la funció en un entorn més reduït al voltant dels punts solució.

#### Resolució d'una equació de segon grau.

Resoleu l'equació :  $-x^2 - 2x + 3 = 0$

Després de començar el programa, teniu l'opció d'escollir quin tipus de resolució d'equacions voleu.

- Activeu l'opció d'una equació de segon grau:  $ax^2+bx+c=0$ .
- Introduïu els valors d'A, B i C a la línia inferior tal com estan referenciats a la línia superior.



El programa calcula de forma automàtica l'escala de manera que quedi visible la

intersecció amb l'eix OX. Hom pot veure els valors de les solucions, just en els punts interseccions amb l'eix OX.

Podeu modificar l'escala de manera que quedin més visibles aquests punts, o bé activar l'opció que ens donarà la solució.

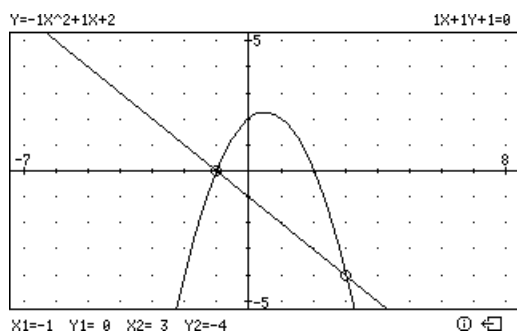
### Resolució d'un sistema d'equacions.

Resoleu el següent sistema d'equacions.

$$y = -x^2 + x + 2$$

$$x + y + 1 = 0$$

- Activeu l'opció de sortida fins a arribar al menú d'opcions bàsiques.
- A continuació, seleccioneu l'opció corresponent a aquest sistema d'equacions, observeu que és la situada a l'extrem superior dret.
- Un cop fet això, s'introdueixen els paràmetres dels coeficients. A la línia superior es pot observar en quin ordre s'han d'introduir aquests valors.
- Després de prémer la tecla ↵, apareixeran les gràfiques de la recta i de la paràbola que s'ha de representar.



Els punts assenyalats amb una circumferència són les solucions del sistema.

- Si voleu obtenir les solucions de forma gràfica més aproximada, modifiqueu l'escala convenientment.
- Si voleu saber la solució analítica, seleccioneu l'opció de SOLUCIÓ.

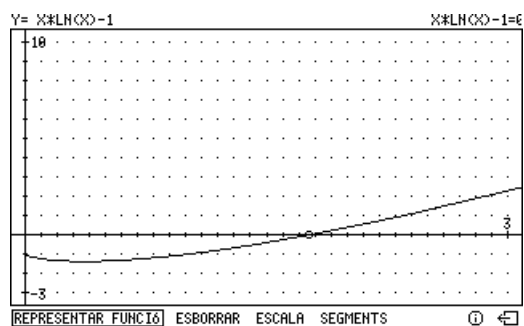
### Resolució de l'equació.

Resoleu amb un error de 10-1 l'equació:

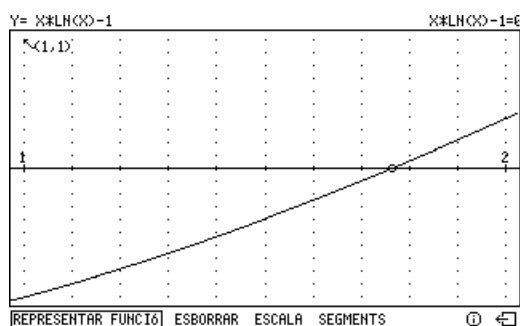
$$x \ln(x) = 1$$

- Seleccioneu i activeu l'opció de sortida fins a arribar al menú general.
- Del menú d'opcions, cal seleccionar  $f(x)=0$  i prémer després la tecla ↵.
- Confirmeu l'escala estàndard quan el programa la pregunta.
- A continuació hom pregunta la funció a representar.
- Introduïu l'expressió:  $X * \ln(X) - 1$

Podeu observar on està situat el punt d'intersecció amb l'eix OX. Es tracta de modificar l'escala.

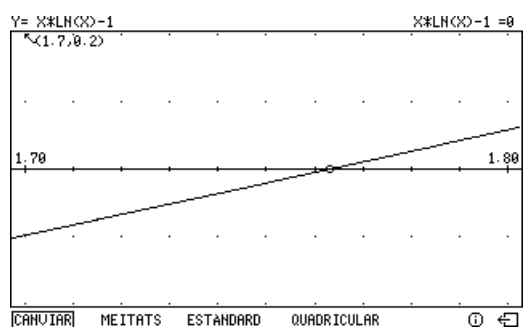


- Activeu l'opció d'escala i de canviar, i doneu per extrems de l'eix OX els valors 0 i 3. I de l'eix OY, -3 i 10.
- Torneu a representa la mateixa funció.



Observant el punt d'intersecció podeu aproximar encara més l'escala. Hom pot observar que la intersecció està entre 1.7 i 1.8.

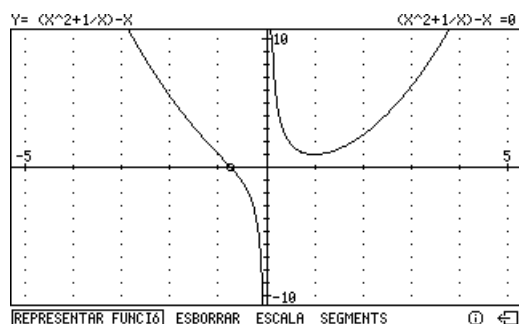
Si repetiu el procés amb una escala més petita trobareu que el valor correspon aproximadament a 1.76.



### Exercici.

Dues equacions més a resoldre:

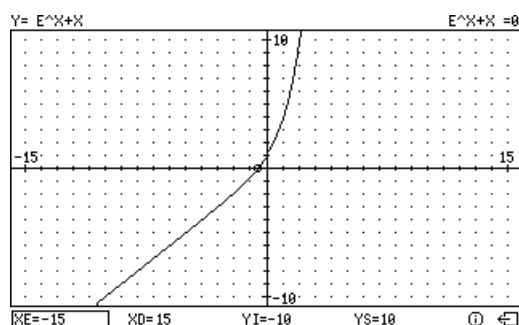
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x$$



Observant el punt d'intersecció podeu aproximar encara més l'escala. Observar que la intersecció està entre -1 i 0. Repetiu el procés amb una escala més petita per tal de trobar una aproximació més gran.

La segona:  $e^x = -x$ ,

quina és la solució?



Aquest programa permet resoldre analíticament i gràfica equacions i sistemes d'equacions de grau un i dos, i resoldre gràficament altres equacions

### Graf123

- N. Títol
- 1 La recta real i el pla cartesià.
- 2 Funció afí. Rectes.
- 3 Funció quadràtica. Paràboles.**
- 4 Representació gràfica d'una funció.
- 5 Composició de funcions. Deformacions gràfiques.
- 6 Resolució gràfica d'equacions.
- 7 El pla vectorial.
- 8 L'espai vectorial.