

Paràboles

Carles Barceló i Vidal

Programa d'Informàtica Educativa, 1988.

1. ESPECIFICACIONS GENERALS

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

- 2.1. Estructura del programa
- 2.2. Instruccions i comentaris de funcionament
- 2.3. Tipus de representació
- 2.4. Trama
- 2.5. Representació de punts particulars
- 2.6. Introducció de valors numèrics
- 2.7. Errors d'introducció
- 2.8. Divisió de la pantalla

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

- 3.1. Objectius generals
- 3.2. Coneixements previs
- 3.3. Plantejament metodològic del tema
- 3.4. Metodologia d'ús
 - 3.4.1. Mòdul 1: $F(X) = a.X^2$, $a > 0$
 - 3.4.2. Mòdul 2: $F(X) = a.X^2$, $a > 0$
 - 3.4.3. Mòdul 3: $F(X) = a.(-m)^2$
 - 3.4.4. Mòdul 4: $F(X) = a.X^2 + n$
 - 3.4.5. Mòdul 5: $F(X) = a.(X-m)^2 + n$

1. ESPECIFICACIONS GENERALS

Aquest programa d'interpretació gràfica de la funció polinòmica de segon grau, resulta d'especial utilitat a l'hora de desenvolupar el tema funcions polinòmiques de 2on grau, actualment en el programa de 1r curs del BUP.

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

2.1. Estructura del programa

El programa principal s'estructura en sis mòduls autònoms que constitueixen el **Menú principal**. Aquests mòduls són:

1. Interpretació gràfica de les funcions $F(X) = a.X^2$, $a > 0$
2. Interpretació gràfica de les funcions $F(X) = a.X^2$, $a > 0$
3. Interpretació gràfica de les funcions $(X) = a.(X-m)^2$
4. Interpretació gràfica de les funcions $(X) = a.X^2 + n$
5. Interpretació gràfica de les funcions $(X) = a.(X-m)^2 + n$
- (0. Final)

Finalitzada l'execució de qualsevol dels sis mòduls hom retorna sempre novament al **Menú principal**. Una de les opcions d'aquest menú (l'**Opció 0**) és la de finalitzar l'execució del programa.

En tot moment de l'execució d'un mòdul hom pot retornar al **Menú principal** prement la tecla de funció **F1**.

Les característiques específiques de cadascun dels mòduls són les següents:

Mòdul 1

L'objectiu específic d'aquest mòdul és el de fer veure com en passant de la funció $x \rightarrow x^2$ a la $x \rightarrow a \cdot x^2$, amb $a > 0$, totes les ordenades es "dilaten" o es "contrauen" proporcionalment segons sigui a més gran o més petit que 1, respectivament. El mòdul s'inicia amb la representació de la paràbola $x \rightarrow x^2$. Tot seguit l'usuari tria diferents valors positius del paràmetre a fins una màxim de 10 valors. Per cada un d'ells el programa representa gràficament la corresponent paràbola $x \rightarrow a \cdot x^2$.

figura 1

La presentació en la finestra de text d'una taula comparativa de valors presos per les funcions $x \rightarrow x^2$ i $x \rightarrow a \cdot x^2$ per a $x = -3, -2, \dots, 3$ i la corresponent representació dels punts visibles dins la finestra gràfica, pretenen reforçar numèricament l'objectiu d'aquest mòdul.

Mòdul 2

Es tracta d'aconseguir que els alumnes visualitzin l'efecte gràfic que comporta el canvi de signe en el coeficient a de la funció $x \rightarrow |a| \cdot x^2$ i $x \rightarrow a \cdot x^2$. L'usuari tria el valor negatiu del coeficient a i tot seguit es representen successivament les gràfiques de les paràboles $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow |a| \cdot x^2$ i $x \rightarrow a \cdot x^2$.

figura 2

Mòdul 3

Aquest mòdul té per objectiu mostrar l'efecte gràfic -translació segons l'eix d'abscisses- que comporta la substitució en l'expressió de la funció $x \rightarrow a \cdot x^2$ de x per $x-m$. L'usuari tria els valors dels paràmetres a i m i tot seguit el programa representa successivament les funcions $x \rightarrow (x-m)^2$, $x \rightarrow |a| \cdot (x-m)^2$ i $x \rightarrow a \cdot (x-m)^2$.

figura 3

Mòdul 4

L'objectiu específic d'aquest mòdul és el de mostrar com el sumand n introduït en l'expressió de la funció polinòmica de $2n$ grau $x \rightarrow a \cdot x^2 + n$, comporta una translació d'aquella paràbola en la direcció de l'eix d'ordenades.

Es parteix com sempre de la gràfica de la paràbola $x \rightarrow x^2$ i es van representant successivament les funcions $x \rightarrow |a| \cdot x^2$, $x \rightarrow a \cdot x^2$ i $x \rightarrow a \cdot x^2 + n$.

figura 4

Prèviament, l'usuari haurà introduït els valors dels paràmetres a i n .

Mòdul 5

En aquest mòdul, l'objectiu que es persegueix és investigar l'efecte simultani dels tres paràmetres a , m i n en la representació gràfica de la funció $x \rightarrow a \cdot (x-m)^2 + n$. L'usuari escull els valor dels paràmetres a , m i n i, tot seguit es representen successivament les funcions $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow (x-M)^2$, $x \rightarrow |a| \cdot (x-M)^2$, $x \rightarrow a(x-M)^2$ i, finalment, $x \rightarrow a \cdot (x-M)^2 + n$.

figura 5

Mòdul 6

L'execució d'aquest mòdul pressuposa que anteriorment l'alumne s'ha exercitat en la transformació d'un polinomi de 2n grau $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ en una expressió equivalent del tipus $a \cdot (x-m)^2$.

Es tracta llavors d'aplicar aquestes transformacions algebraiques per a representar una funció polinòmica de 2n grau del tipus $x \rightarrow a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Aquest és precisament l'objectiu d'aquest mòdul: facilitar a l'alumne l'exercitació d'aquest tipus de transformacions tot representant la cadena de paràboles que des de la $x \rightarrow x^2$ condueix fins a la paràbola inicial.

L'usuari tria els valors dels coeficients a , b i c de la funció polinòmica que vol estudiar i tot seguit el programa representa en la pantalla la paràbola corresponent. Seguidament, l'usuari introdueix el valor de cada un dels paràmetres a , m i n que creu que corresponen a aquesta paràbola. Aquests hauran d'haver estat calculats prèviament per l'usuari o bé deduïts a partir de la gràfica. El programa passa tot seguit a representar les gràfiques de les successives funcions des de $x \rightarrow x^2$ fins a $x \rightarrow a \cdot (x-m)^2 + n$ igual com en l'anterior mòdul núm. 5. Si aquesta última paràbola coincideix amb la paràbola inicialment representada, vol dir que els paràmetres m i n introduïts per l'usuari són els correctes. Si no fos així, el programa comunicaria la incorrecció dels paràmetres introduïts demanant si es vol fer un nou intent. Si l'usuari rebutja aquesta possibilitat se li comuniquen els valors correctes dels paràmetres i es passa immediatament a representar l'anterior successió de paràboles prenent ara els valors correctes d' a , m i n .

figura 6

2.2. Instruccions i comentaris de funcionament

2.2.1. Tipus de representació. Eixos de coordenades i escala de representació

2.2.1.1. Les representacions gràfiques són totes de tipus "proporcional", és a dir, prenent la mateixa unitat de graduació en els dos eixos de coordenades.

2.2.1.2. Els eixos de coordenades romanen sempre visibles dins la finestra gràfica. Llur posició és triada sempre pel programa procurant aprofitar al màxim la zona de representació preveient que les zones on quedaran representades les paràboles.

2.2.1.3. En tots els mòduls, a excepció del 6è, el programa escull inicialment una escala de representació que assigna 25 punts de la pantalla a la unitat de mesura i

gradua els dos eixos de coordenades de 1 en 1.

En l'execució del mòdul núm. 6 el programa calcula i escull internament l'escala de representació per tal que siguin visibles la paràbola a representar i la $x \rightarrow x^2$.

2.2.1.4. Amb l'excepció del mòdul 6, el programa ofereix a l'usuari la possibilitat de canviar l'escala de representació mitjançant la introducció d'un factor K de canvi d'escala -enter, decimal o fraccionari- que fa que el nombre de punts de l'unitat de mesura quedi multiplicat per aquest factor K. la graduació dels eixos és adaptada convenientment per tal de tenir una visió permanent de l'escala de representació amb què s'està treballant. En una de les quatre cantonades de la finestra gràfica apareix indicat el valor de les graduacions dels eixos.

2.2.1.5. L'opció de canviar voluntàriament l'escala s'ofereix a l'usuari a l'inici de l'execució del mòdul, abans de procedir a les representacions gràfiques de les paràboles. I també, al final, quan han estat representades totes les paràboles. En aquest últim cas, el mateix programa sense intervenció de l'usuari procedeix a reproduir en la nova escala les gràfiques de totes les paràboles que estaven representades en el moment del canvi d'escala.

2.2.1.6. En l'execució dels mòduls 3, 4 i 5, l'escala que inicialment ofereix el programa no assegura la correcta visualització de les paràboles a representar. Si l'usuari preveu que alguna d'aquestes no tindrà visible el seu vèrtex, és convenient que esculli des de bon principi un a escala de representació més petita.

2.2.1.7. Immediatament abans de la representació d'una paràbola el programa controla que el seu extrem, sigui màxim o mínim, caigui en l'interior de la finestra gràfica. Si no fos així, l'usuari seria informat d'aquesta circumstància i se li oferiria la possibilitat de canviar l'escala de representació. Si la rebutgés, el programa consideraria finalitzada l'execució del mòdul i demanaria a l'usuari si vol o no interpretar algun altre conjunt de funcions del mateix tipus.

2.2.2. Trama

També s'ofereix la possibilitat de representar una trama dins la finestra gràfica per tal de localitzar més fàcilment els punts a través de llurs coordenades.

2.2.3. Representació de punts particulars

Preveient la possibilitat de que, en certs moments del desenvolupament d'una classe pugui resultar necessària la representació en pantalla de certs punts en particular - ja sigui per assenyalar el vèrtex d'una paràbola o per esbrinar si determinat punt pertany o no a la gràfica d'una paràbola-, el programa ofereix a l'usuari la possibilitat de representar els punts que cregui convenient. El programa es limita a representar el punt sense avaluar en cap moment si pertany o no a la gràfica d'una determinada paràbola. Si el punt a representar no fos visible dins la finestra gràfica, l'usuari seria informat d'aquest fet.

2.2.4. Introducció de valors numèrics

2.2.4.1. Qualsevol valor numèric susceptible d'ésser manipulat algebraicament, - coeficients, paràmetres, factors de canvi d'escala...- pot ser introduït indistintament fent servir notació entera, decimal o fraccionària.

2.2.4.3. En el mòdul núm. 6 el programa calcula internament el valor dels paràmetres m i n després de la introducció dels coeficients a , b i c de la funció polinòmica de $2n$ grau. Aquells són calculats i presentats en forma fraccionària. L'usuari, però, els pot introduir en forma decimal en el cas que m i n tinguin expressió decimal exacta.

2.2.5. Errors d'introducció

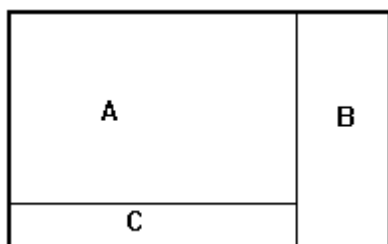
El programa realitza un control immediat dels valors numèrics i caràcters entrats per l'usuari. Si es detecta un error en la introducció, l'ordinador emet un senyal acústic, esborra en la pantalla el valor introduït i reclama novament la introducció nou valor o caràcter.

El programa no informa del tipus d'error comès per l'usuari. Els errors més habituals que es poden cometre són:

- entrar un caràcter diferent a l'esperat pel programa.
- Escriure incorrectament un valor numèric.
- Introduir un valor d' a (coeficient d' x^2) fora dels límits permesos (el valor absolut d' a ha d'ésser comprès entre 0.01 i 100).
- Introduir un valor negatiu d' a durant l'execució del mòdul 1.
- Introduir un valor positiu d' a durant l'execució del mòdul 2.
- Introduir un valor negatiu o nul del factor K de canvi d'escala.
- Prémer únicament la tecla Retorn com a resposta a la demanda d'entrada d'un valor numèric.

2.2.6. Divisió de la pantalla

A l'hora de les representacions gràfiques, el programa considera la pantalla imaginària ment dividida en 3 parts o finestres:



A) Finestra gràfica o zona de representació gràfica

B) Finestra de text en la qual apareixen els textos i les preguntes a través de les quals l'usuari dialoga amb el programa.

C) Finestra de missatges permanents destinada a recordar a l'usuari la forma de sortir de l'execució del mòdul sense necessitat d'executar-lo fins al seu final.

La limitació de la finestra de text fa que el programa controli la longitud de les expressions de les funcions que han de ser presentades en aquesta finestra. Si el programa preveu que l'expressió a escriure és massa llarga, ho comunica a l'usuari oferint-li la possibilitat d'introduir novament els valors dels paràmetres que configuren l'expressió de la funció.

És important, doncs, escollir la forma més curta d'escriure un valor numèric. així, per exemple, és preferible introduir 0.1 -o fins i tot .1- en comptes de 1/10. O bé, 9/8 en comptes de 1.125.

És possible, però, que la presència d'una situació no prevista pel programa provoqui el desbordament d'un text d'excessiva llargada de la finestra de text a la qual hauria de limitar-se. Aquesta situació no comporta l'acabament de l'execució del mòdul que pot continuar amb tota normalitat.

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

3.1. Objectius generals

L'objectiu primari del programa és el d'aprofitar la claredat i rapidesa de la representació gràfica de l'ordinador per tal de reforçar en l'alumne la comprensió de la relació existent entre les representacions gràfiques de les funcions $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow a \cdot (x-m) + n^2$ i $x \rightarrow a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Un segon objectiu és el de servir com a programa introductori per emprendre l'estudi sistemàtic de les relacions existents entre les gràfiques de les funcions $x \rightarrow f(x)$, $x \rightarrow f(x-m)$, $x \rightarrow f(x)+n$, $x \rightarrow a \cdot f(x)$ i $x \rightarrow a \cdot f(x-m)+n$, per a qualsevol funció $f(x)$.

Aquest estudi, en tot cas, és aconsellable ajornar-lo fins que el bagatge de funcions conegudes per l'alumne sigui suficientment abundant.

3.2. Coneixements previs

Per poder abordar aquest tema, és necessari que l'alumnes estigui prèviament familiaritzat amb el concepte intuïtiu de funció i acostumat a representar i interpretar gràfiques de funcions a partir de les corresponents "taules de valors".

És aconsellable precedir aquest tema amb el relatiu a l'estudi sistemàtic de la funció polinòmica de 1r grau $x \rightarrow m \cdot x + n$ i la significació gràfica dels paràmetres m i n que intervenen en la definició.

3.3. Plantejament metodològic del tema

Després de presentar a l'alumne d'una forma més o menys intuïtiva el concepte de funció es passa habitualment a l'estudi sistemàtic de les representacions gràfiques de les funcions polinòmiques de 1r i 2n grau.

Pel que fa referència a aquestes últimes hi ha diverses formes de presentar-les. Una d'elles consisteix en partir de la representació gràfica de la funció $x \rightarrow x^2$ i passar de forma successiva per l'estudi de les gràfiques de les funcions

$x \rightarrow a \cdot x^2$ ($a > 0$), $x \rightarrow a \cdot x^2$ ($a < 0$), $x \rightarrow a \cdot (x-m)^2$, $x \rightarrow a \cdot x^2 + n$
i $x \rightarrow a \cdot (x-m)^2 + n$

veient en cada pas la influència que els paràmetres a , m i n tenen en les representacions gràfiques successives.

Subsidiàriament, aquesta forma d'exposició permet d'iniciar la introducció de forma totalment intuïtiva dels conceptes "translació segons l'eix d'abscisses", etc. que en cursos posteriors seran degudament sistematitzats.

Una vegada estudiada la gràfica de la funció $x \rightarrow a \cdot (x-m)^2 + n$ sembla justificada la necessitat de transformar el polinomi general de 2n grau $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ en un altre equivalent de la forma $a \cdot (x-m)^2 + n$ per tal de representar gràficament la funció $x \rightarrow a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Indirectament, aquesta transformació facilita la demostració de la fórmula general de resolució de les equacions de 2n grau que d'altra manera resulta un tant artificiosa.

3.4. Metodologia d'ús

Tot seguit presentem unes orientacions metodològiques per a la utilització de cada un dels mòduls de què consta el programa.

Mòdul 1 ($F = a \cdot X^2$ $a > 0$)

Una vegada l'alumne ha comprès la significació geomètrica del coeficient positiu a de x és convenient que construeixi diverses plantilles de cartolina amb els perfils de les paràboles $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x^2/3$, $x \rightarrow 3x^2$, $x \rightarrow x^2/2$, $x \rightarrow 2x^2$ prèviament representades sobre paper mil·límetrat prenent 1 cm. com a unitat en ambdós eixos. Aquestes plantilles seran utilitzades posteriorment en el desenvolupament del tema.

Mòdul 2 ($F(X) = a \cdot X^2$ $a < 0$)

L'alumne ha de començar per comprovar per si mateix que el perfil de les paràboles $x \rightarrow a \cdot x^2$ i $x \rightarrow -a \cdot x^2$ és el mateix i que, per tant, aquesta última es pot obtenir fent senzillament una "simetria respecte de l'eix d'abscisses" de la primera de les paràboles.

És el moment d'iniciar la introducció dels termes "còncava" i "convexa", "màxim" i "mínim" encara que en cursos posteriors hagin de ser explícitament definits a l'hora de tractar l'estudi de la representació gràfica de funcions reals.

Amb l'ajuda de les plantilles que ell mateix ha construït, l'alumne podrà, doncs, representar ràpidament les paràboles $x \rightarrow -x^2$, $x \rightarrow -x^2/3$, $x \rightarrow -3x^2$, ...

Mòdul 3 ($F(X) = a \cdot (X-m)^2$)

Caldrà començar amb la representació gràfica de funcions del tipus $x \rightarrow (x-m)^2$ recalcant la influència del signe del paràmetre m en el sentit de la translació que experimenta la paràbola $x \rightarrow x^2$.

Seguidament, a la influència del paràmetre m , s'afegirà la del coeficient a de x^2 tot representant gràficament les funcions del tipus $x \rightarrow a \cdot (x-m)^2$. Caldrà començar amb valors positius d' a -superiors i inferiors a 1- per continuar amb valors negatius.

Seria bo que l'alumne, en el decurs de tot el tema, s'esforcés en expressar-se correctament indicant pel seu nom quines són les diferents transformacions del pla - translació segons l'eix d'abscisses, simetria respecte l'eix OX, ...- que cal aplicar a la gràfica de $x \rightarrow x^2$ fins arribar a la gràfica de $x \rightarrow a \cdot (x-m)^2$.

L'alumne ha d'exercitar-se en la representació d'aquests tipus de funcions fent ús de les plantilles de què disposa.

Mòdul 4 ($F(X)=a \cdot X^2+n$)

Com en el cas anterior, caldrà començar amb la representació gràfica de les funcions del tipus $x \rightarrow x^2+n$ per passar tot seguit a representar funcions del tipus $x \rightarrow a \cdot x^2+n$, primer amb $a>0$ i llavors amb $a<0$.

Caldrà insistir en la influència del signe del paràmetre n en el sentit de la translació en la direcció de l'eix d'ordenades. Igualment és convenient fer veure a l'alumne el significat del paràmetre n com a ordenada del punt d'intersecció de la paràbola amb eix d'ordenades.

Mòdul 5 ($F(X)=a \cdot (X-m)^2+n$)

Abans d'emprendre l'estudi gràfic corresponent a a aquest mòdul és convenient que l'alumne es doni compte de quines són les diferents transformacions algebraiques que cal aplicar a $F(x)$ fins a arribar a una expressió del tipus $a \cdot (x-m)^2+n$. Tot seguit l'alumne haurà d'interpretar aquesta cadena de transformacions algebraiques en la corresponent cadena de transformacions geomètriques aplicades a la paràbola $x \rightarrow x^2$. Això ho podrà fer fàcilment amb l'ajuda de les plantilles i corroborar les seves respostes amb l'execució del present mòdul.

Finalment, caldrà fer veure a l'alumne com els paràmetres m i n determinen totalment la posició del vèrtex de la paràbola.

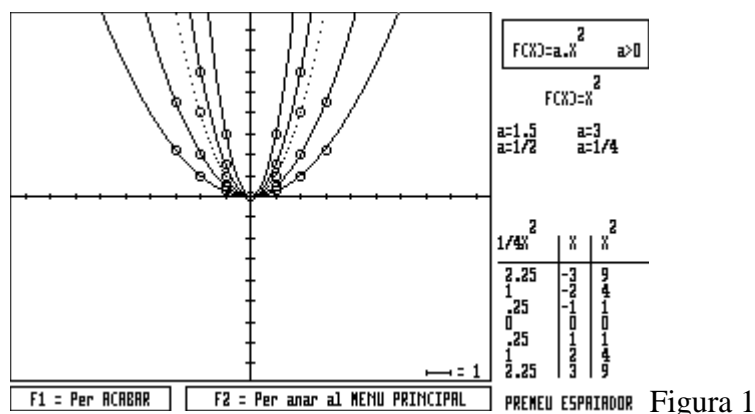


Figura 1

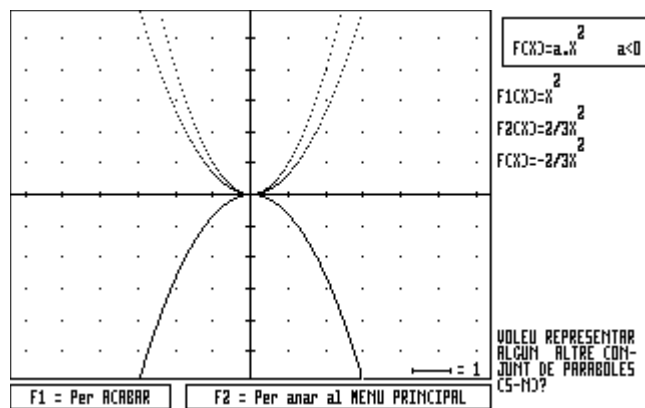


Figura 2

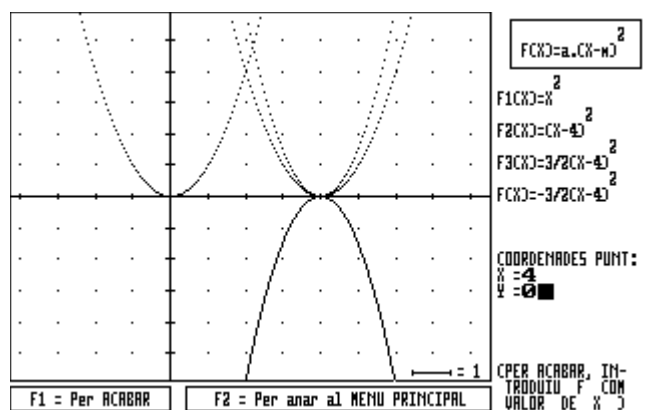


Figura 3

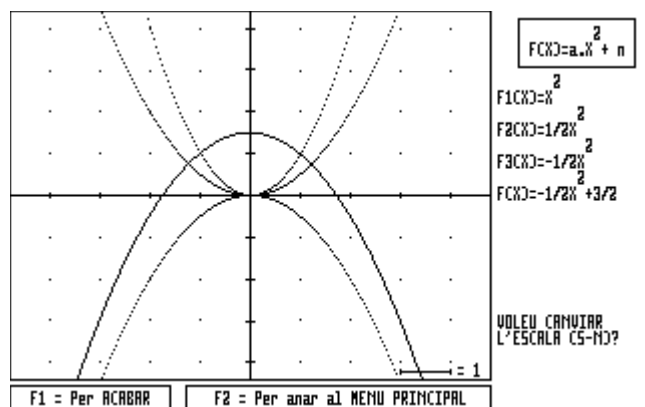


Figura 4

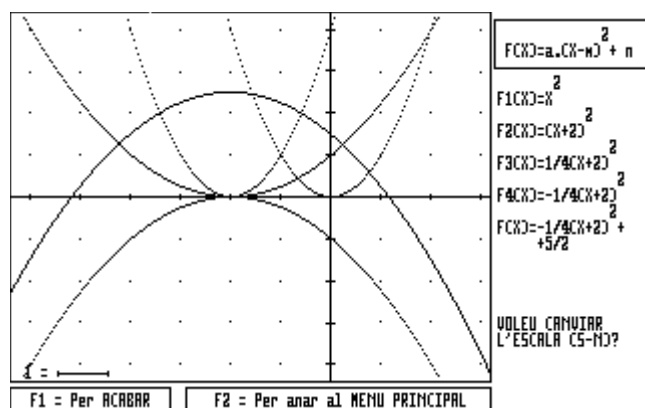


Figura 5

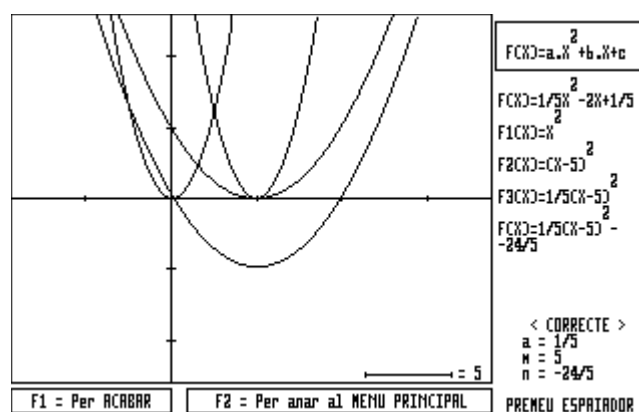


Figura 6