

Introducció a la integral de Reimann

Carles Bailo Mompert; Carles Barceló Vidal; Joaquim Castellsaguer Guañabens; Antoni Gomà Nasarre; Ferran Ruiz Tarragó; Joan Antoni Sellarés Chiva

Programa d'Informàtica Educativa.

DESCRIPCIÓ

1. DINÀMICA DE FUNCIONAMENT

- 1.1. Mòdul principal del programa
- 1.2. Exemples que incorpora el programa
- 1.3. Introducció d'un exemple per part de l'usuari

2. ASPECTES PEDAGÒGICS

- 2.1. Objectiu del programa
- 2.2. Coneixements previs
- 2.3. Metodologia d'ús

DESCRIPCIÓ

Temàtica: Introducció als conceptes de sumes inferiors i sumes superiors d'una funció en relació a una partició de l'interval en el qual es treballa, com a pas necessari per a l'explicació del concepte d'Integral de Riemann.

Assignatura: Matemàtiques

Nivell escolar: 3r de BUP; COU; algunes branques d'FP de 2n grau i els futurs batxillerats de l'ensenyament secundari.

El programa va ser dissenyat inicialment per a un ordinador NCR, amb alta resolució i 8 colors. L'adaptació a l'equipament estàndard dels Centres Públics ha estat realitzada per Antoni Gomà.

És així que l'arxiu que conté aquesta versió del programa denominada INTEGRAL.EXE, escrita en llenguatge GW-BASIC i compilada posteriorment. Requereix la presència de l'arxiu BRUN20G.EXE. No es crea cap arxiu extern ni està pensat tampoc per fer servir altra interfície que no sigui la pantalla.

1. DINÀMICA DE FUNCIONAMENT

El programa consta d'un únic mòdul que serà descrit detalladament més avall. Tanmateix, convé explicar d'antuvi que el programa presenta un menú principal on l'usuari ha de prendre una opció de treball, presentada així:

1. Àrea d'un trapezi mixtilini predefinit.
2. Àrea d'un trapezi mixtilini proposat per l'usuari.

A aquest menú s'hi pot accedir en qualsevol moment de l'execució prement la tecla predefinida F9. Des del menú es pot acabar l'execució del programa prement la tecla 0 però, a més, s'ha predefinit la tecla F10, la qual permet tallar l'execució en qualsevol moment.

1.1. Mòdul principal del programa

El programa treballa amb pantalla gràfica. La línia inferior d'aquesta pantalla està destinada a observacions sobre el funcionament del programa o a indicacions de la tecla que cal prémer per continuar el treball o bé optar per una tasca o una altra. A la pantalla apareixen dues finestres de representació: la finestra de l'esquerra serveix per fer visuals les sumes inferiors; a la de la dreta es podrà observar les sumes superiors. A sota dels gràfics es pot veure una taula que informa dels successius resultats numèrics que poden interessar.

Inicialment, les dues pantalles mostren el gràfic de la funció i a la taula no hi ha informació numèrica; caldrà prémer dues vegades l'espaiador i llavors, a la finestra de l'esquerra, s'acolorirà de color verd l'àrea inferior i a la de la dreta s'esborrarà una part del fons -inicialment groc- i que no ha de ser considerat per a l'àrea superior.

La taula indicarà els valors numèrics de les dues àrees considerades i la diferència entre aquests valors dient-nos, a més, que corresponen a la subdivisió 0, que té un interval. Efectivament, l'interval de treball encara no ha estat dividit.

Seguidament hi ha diverses possibilitats que s'aniran repetint després de cada subdivisió. S'indicarà l'opció escollida prement la tecla corresponent:

Tecla S. Subdivisió

Si premem aquesta tecla cadascun dels intervals considerats fins aquell moment com a partició de l'interval inicial serà subdividit en dos i podrem continuar el nostre treball.

Tecla D. Mostrar diferència

Aquesta opció permet fer visual la diferència entre la suma superior i la inferior, cosa que, per altra banda també es fa avinent amb la consulta de la taula de dades numèriques que facilita el programa.

De fet, es podrà veure superposades les dues àrees, la que correspon a l'àrea inferior dibuixada també, temporalment, a la finestra de la part dreta de la pantalla. Caldrà polsar l'espaiador per tornar a la pantalla anterior.

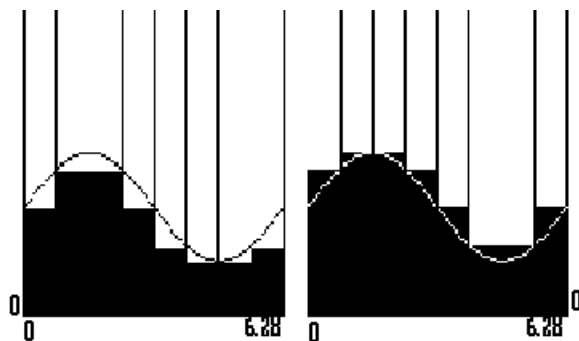
Tecla F. Finalitzar l'exemple

Per acabar l'anàlisi de cada exemple, el programa incorpora algunes dades numèriques:

- valors numèrics de les àrees corresponents a la suma inferior i a la superior amb la màxima resolució a què es podria arribar en pantalla, és a dir, calculada "per píxels".
- valor de l'àrea aproximada si el procés teòric es portés al límit. De fet, aquesta àrea és calculada per la fórmula d'aproximació de Simpson amb un gran nombre d'intervals.

La figura que es presenta a continuació mostra la pantalla corresponent a la situació habitual pel que fa al treball que permet el programa.

Diguem, finalment, que el procés es pot repetir fins que la precisió de pantalla ho fa aconsellable. Si s'arriba al nombre màxim de subdivisions que permet el programa, aquest mateix el conduirà a la situació d'acabament de l'exemple, ja explicada.



FUNCIO $Y = \sin X + Z$

Subdivisió	Intervals	Àrea inferior	Àrea superior	Diferència
2	4	9.4225	15.6975	6.275
3	8	11	14.1288	3.1288

per a subdivisió pouseu 'S'; per a mostrar diferència, 'D'; per acabar, 'F'

Detalls de la figura:

- Correspon a la funció $y = \sin x + 2$.
- S'estudia en l'interval $[0, 2\pi]$.
- S'ha fet tres vegades el procés de subdivisió i, per tant, la partició de l'interval està constituïda per 8 subinterval.
- La taula mostra informació relativa a la partició anterior (és a dir, quan hi havia 4 subinterval) i de l'actual.

1.2. Exemples que incorpora el programa

Els exemples preparats a què hom pot accedir són aquests:

1. Funció $y = \sin x + 2$ en l'interval $[0, 2\pi]$
2. Funció $y = 1 + \ln x$ en l'interval $[1, 4]$
3. Funció $y = 1 + \arcsin(x-1)^2$ en l'interval $[0, 3]$

L'exemple número 1 permet fer avinent que, per determinades funcions, en algun cas, el pas d'una certa subdivisió de l'interval a la següent no fa variar el valor de l'àrea superior ni de l'àrea inferior.

L'exemple número 2 mostra una funció estrictament creixent en l'interval considerat amb totes les conseqüències que això comporta per a l'estudi de les sumes superiors i inferiors.

Finalment, l'exemple número 3 presenta el treball amb una funció no derivable en un punt però amb la qual, com és sabut, no hi ha cap problema en fer tot el procés d'estudi de les sumes superiors i les sumes inferiors.

1.3. Introducció d'un exemple per part de l'usuari

Si és aquesta l'opció escollida caldrà, en primer lloc, entrar la funció que s'ha d'estudiar.

El programa incorpora l'avaluador de funcions característic dels programes del Grup Eix. Les facilitats que dona aquesta subrutina per a l'escriptura "habitual" de les funcions i el treball amb algunes funcions elementals que no incorpora el

BASIC, així com tots els detalls concrets per a la correcta introducció de funcions varen ser exposats en la segona tramesa de programes didàctics.

Els exemples indicats en l'apartat anterior estan escrits seguint aquestes normes: no és necessari parèntesis per a l'argument si això no comporta confusió; s'han incorporat les arrels, com és ara AR3, arrel cúbica; etc.

El programa controla la correcció de la funció que s'ha entrat; en cas que no ho sigui, s'emet un senyal acústic, s'informa de possibles errades d'entrada i es permet repetir l'entrada.

Seguidament cal entrar els extrems de l'interval en el qual es vol dur a terme l'estudi. Per l'entrada d'aquests extrems també es fa ús de la subrutina que avalua expressions i, doncs, es poden fer servir e, pi, operacions indicades -com es veu en un dels exemples anteriors-.

Cal comprovar que els valors entrats per a l'interval comportin la situació que es vol estudiar: valors definits per a la funció i positius o zero en tot l'interval.

Si no és així s'emet un senyal acústic, s'informa l'usuari de la causa per la qual l'interval no és acceptat i, finalment, se li donen dues oportunitats de treball (canviar l'interval amb la mateixa funció o bé canviar la funció) o bé l'oportunitat d'abandonar el programa.

2. ASPECTES PEDAGÒGICS

2.1. Objectiu del programa

El programa pretén ser una eina de suport, des del punt de vista gràfic, per a la introducció al concepte de la Integral de Riemann.

De fet, fa visuals les sumes inferiors i les sumes superiors d'una funció no negativa definida en un interval tancat, i possibilita repetir el procés per a particions de l'interval cada vegada més fines.

El programa encamina cap a la idea que el límit comú de les sumes superiors i les sumes inferiors, en les condicions explicades, representarà l'àrea del trapezi mixtilini limitat pel gràfic de la funció, l'eix de les x i les ordenades dels extrems de l'interval.

2.2. Coneixements previs

En realitat, el programa no requereix cap coneixement previ pel que fa al tema que es vol tractar. Caldrà, això sí, que els alumnes hagin adquirit la suficient maduresa matemàtica que cal per tal que el professor es pugui plantejar explicar-los el tema del càlcul aproximat d'àrees i culminar amb el concepte de la integral de Riemann.

2.3. Metodologia d'ús

En primera instància, creiem que el programa hauria de ser utilitzat en el context de la dinàmica col·lectiva d'una classe, a manera de "pissarra electrònica", que fa possible el valor afegit de gràfics elaborats correctament i de forma ràpida i clara, cosa que dibuixant sobre la pissarra "amb guix", es fa molt més difícil.

El programa, però, també pot ser útil per tal que l'alumne -de forma individual o en

petit grup- treballi amb el programa sense la presència directiva del professor el qual, això sí, convindrà que hagi suggerit diversos exemples d'ús, a part dels que el programa ja porta incorporats.

Entre aquests exemples serà del tot interessant la consideració d'alguna funció gradual, per a les quals el programa incorpora procediments especials de dibuix. Suggerim l'anàlisi de la funció $y = 1 + \text{INT } 4x$ en l'interval $[0,1]$. Convé, llavors, parar molta atenció en l'observació del punt corresponent a $x=1$; si no es fa un comentari adequat pot ser que l'exemple no compleixi la seva finalitat.