

Interpolació a trossos

Joaquim Casellsaguer i Guanyabens
Programa d'Informàtica Educativa, 1988.

1. NOM DEL PROGRAMA
2. AUTOR
3. TEMÀTICA
4. OBJECTIUS
5. FONAMENTACIÓ TEÒRICA
6. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC
7. CONEIXEMENTS PREVIS
8. NIVELL
9. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA
10. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA
11. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

1. NOM DEL PROGRAMA

Interpolació a trossos (nom d'arxiu INTTROS).

2. AUTOR

Joaquim Castellsaguer i GuanyabeNS, formant part del GRUP EIX amb Carles Bailo i Mompart, Carles Barceló i Vidal, Antoni Gomà i Nasarre, Ferran Ruiz i Tarragó i Joan Antoni Sellarès i Chiva

3. TEMÀTICA

Representa la interpolació global i quatre formes d'interpolació a trossos d'un conjunt de dades, permet de comparar-les i estudiar l'efecte de la seva variació.

4. OBJECTIUS

Es tracta del segon d'un conjunt de dos programes dedicats a la interpolació, essent el primer el dedicat a la Interpolació global.

Llur objectiu és facilitar la comprensió d'aquest concepte bàsic del càlcul numèric, concretat en aquest programa en els següents aspectes:

- Obtenir el traçat de gràfiques de diferent complexitat que passin per un conjunt donat de

punts.

- Observar les particularitats i els avantatges de cada mètode quant a l'oscil·lació, l'estabilitat i la regularitat.

- Introduir a l'ús de la interpolació en les tècniques de disseny, estadístiques, etc.

5. FONAMENTACIÓ TEÒRICA

Donat un conjunt de n parells $(x(i), y(i))$ de nombres reals, anomenats dades de la interpolació, tals que $x(i) < x(j)$ si $i < j$, llavors és possible trobar una funció contínua $F(x)$ tal que per a tota i sigui $F(x(i)) = y(i)$, i que sigui:

1) una funció polinòmica de grau n (interpolació global)

2) una funció lineal a trossos i per tant no derivable (interpolació lineal)

3) una funció quadràtica a trossos no necessàriament derivable (interpolació parabòlica). La seva gràfica està formada per arcs de paràbola, cadascun dels quals ve determinat per l'exigència de passar per tres dades consecutives.

4) una funció quadràtica a trossos i derivable (interpolació parabòlica derivable). La seva gràfica està formada per arcs de paràbola, el primer dels quals ve determinat per les tres primeres dades i els altres per dues dades consecutives i la condició de derivabilitat en la primera d'elles.

5) una funció cúbica a trossos i derivable (interpolació cúbica derivable). La seva gràfica està formada per arcs de cúbica, el primer dels quals uneix les quatre primeres dades i ve determinat per elles, i cadascun dels altres ve determinat per les dues dades consecutives entre les quals es traça i per la següent, i per la condició de derivabilitat en la primera d'elles.

Hi ha moltes altres possibilitats de determinació de la funció $F(x)$, però no són objecte d'aquest programa.

6. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC

La conveniència d'una aproximació -ni que sigui, com en aquest cas, breu i parcial- a la interpolació a trossos sorgeix naturalment de les insuficiències detectades en el treball pràctic amb la interpolació polinòmica global. La simplicitat de la construcció algorísmica d'aquesta emmascara sovint el seu caràcter insatisfactori quant a l'aspecte gràfic: obtenir una corba convenient que passi per uns punts prèviament establerts.

Aquest aspecte és el primordial en aquelles aplicacions que no comporten un càlcul numèric explícit, entre les quals hi ha:

- El traçat de la corba representativa de l'evolució de certa magnitud mesurada en forma

discreta.

- La "determinació de perfils" que generalment es duu a terme amb recursos matemàtics molt més sofisticats (corbes de Bezier, splines, etc.).

Hom no acostuma a trobar cap d'aquestes qüestions en l'actual ensenyament mitjà. Això dóna a aquest programa unes característiques especials. Sembla possible que l'experimentació aportí noves formes d'utilització interessants i interdisciplinàries, lligades a les gràfiques d'evolució (científiques, estadístiques) i a certes modalitats de disseny. Des d'aquest punt de vista el programa tal com està confegit és totalment insuficient.

El tema queda doncs configurat com una prolongació del tema genèric "Interpolació" i té interès matemàtic autònom en aspectes com les condicions necessàries per a les seves construccions (problema dels "coeficients indeterminats") i la seva implicació directa en els mètodes d'integració numèrica (regles dels trapezis, de Simpson, etc.).

7. CONEIXEMENTS PREVIS

Els alumnes als quals aquest programa vagi destinat han de conèixer:

- El problema de la interpolació i les situacions en que es presenta.
- L'existència del polinomi d'interpolació global i les seves particularitats.
- El concepte de derivabilitat per a una funció definida a trossos.
- Les formes bàsiques de les gràfiques de les funcions polinòmiques.

Convé, sobretot, que tinguin la màxima curiositat possible. Tota la ciència, hom ha dit, prové de la curiositat dels homes i de la seva poca vista.

8. NIVELL

El programa admet una lectura purament visual i bastant independent del seu contingut matemàtic, la qual cosa fa possible utilitzar-lo en diversos cursos. Això no obstant, i com ja s'ha dit abans, el seu lloc natural és el tema "Interpolació" de l'actual programa de C.O.U.

9. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

Queda reflectida en el diagrama de la figura 1, on es veu l'estructura bàsica del menú amb 9 opcions, els moments d'introducció de dades i les possibilitats de sortida.

El final de cadascuna de les opcions porta de nou al menú principal i permet de recórrer-lo en un ordre qualsevol. Quan el conjunt de dades és modificat per l'execució de les opcions 7 i 8 els seus valors són conservats fins que torni a triar-se una d'aquestes opcions. Un missatge demana llavors si volem continuar amb el darrer conjunt o retornar a l'anterior. En tot cas, les dades que no són elegides es perden a partir d'aquest moment.

10. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA

El programa s'inicia amb l'elecció del nombre de dades i amb l'entrada d'aquestes. Cada dada és una parella (abscissa, ordenada) i poden introduir-se en un ordre qualsevol. Les dades poden, en un primer moment, haver estat triades arbitràriament, si bé és més interessant haver-les obtingut de problemes i de situacions reals (vegi's respecte a això la documentació del programa "Interpolació polinòmica").

En el menú que apareix a continuació hom pot distingir dos conjunts diferents d'opcions:

- les que presenten la gràfica corresponent a un dels tipus d'interpolació previstos:
 - 1.polinòmica global
 - 2.lineal
 - 3.parabòlica
 - 4.parabòlica derivable
 - 5.cúbica derivableo bé (opció 6) la de dues d'aquestes gràfiques simultàniament i per a un mateix conjunt de dades.
- les que permeten modificar el nombre i el valor de les dades (opcions 7 i 8) per passar després a les gràfiques.

Totes les opcions són independents entre si i poden combinar-se en qualsevol manera.

Una possible lectura del programa comença fent aparèixer separatament els cinc tipus de gràfica per a un mateix conjunt de dades, i comentant la seva construcció i peculiaritats. L'ordre que es segueixi depèn de les circumstàncies didàctiques: si hom ha utilitzat prèviament el programa "Interpolació polinòmica", és natural veure d'entrada l'opció 1, que n'és un recordatori. En un altre cas pot semblar més lògic seguir l'ordre creixent de graus i principiar per la interpolació lineal.

Tenim un exemple amb dades arbitràries a les figures 2 a 6, amb les dades (1,1), (2,1), (3,1), (4,3), (5,1), (6,1), (7,1) i un altre exemple amb dades reals a les figures 7 a 11, que mostren diferents versions de la gràfica d'evolució del nombre absolut de matrimonis civils a Barcelona entre 1967 i 1981.

La interpolació lineal és molt senzilla i fàcilment comprensible. Gairebé tots els alumnes l'han emprada inadecuadament en la primera iniciació a la construcció per punts de la gràfica d'una funció. Pot passar-se per ella molt breument en una primera aproximació, remarcant si de cas dues coses:

- la seva manca de derivabilitat en els punts corresponents a les dades.
- el fet, més anecdòtic, que no sortirà mai de la "finestra gràfica" o, en termes matemàtics, que està afitada per les ordenades extremes de les dades.

Passant llavors a la interpolació parabòlica pot aparèixer també molt visiblement la no derivabilitat. Aquest és el cas en què els diferents arcs que formen la gràfica poden posar-

se més de manifest i ésser identificats com a arcs de paràbola determinats per tres punts. Els alumnes han de raonar que són tres els punts necessaris, car són també tres els coeficients d'una paràbola.

Un exemple adequat farà que l'exigència de derivabilitat sigui ara, fins i tot, més estètica que no pas matemàtica, i la interpolació parabòlica derivable quedarà naturalment justificada.

La interpolació cúbica no presenta novetats substancials des d'aquest punt de vista. És convenient preparar-ne algun exemple en què aparegui un arc amb un punt d'inflexió visible, que el faci clarament distingible d'un arc de paràbola.

El recorregut dels cinc tipus fonamentals sobre unes mateixes dades haurà mostrat algunes disparitats -potser molt notables- entre les gràfiques obtingudes. La segona fase d'ús del programa insisteix en aquest punt, fent servir l'opció 6 per superposar en una mateixa imatge dues d'aquestes gràfiques. Pot ésser excessiu analitzar els 10 parells possibles, entre els quals alguns semblen més interessants:

- el cas més senzill i el que ho és menys (2 i 1)
- les dues formes parabòliques (3 i 4)
- les dues formes derivables (4 i 5)

El veritable centre d'interés del programa es troba en l'exercici de les opcions 7 i 8.

En l'opció 7 "Modificació d'una dada" el programa presenta les dades actuals i demana la modificació que hom en desitgi, només quant a l'ordenada. Un cop modificada podem dirigir-nos a les opcions 1 a 5 i comparar, en cada cas, l'alteració que aquest canvi ha produït en la gràfica. Aquesta comparació no es permet si hom tria l'opció 6, ja que hi hauria 4 gràfiques en pantalla i l'estudi no en sortiria gens afavorit.

L'abast de l'alteració depèn, en principi, del tipus d'interpolació i, més exactament, de la seva regularitat. En el cas lineal la modificació d'una dada afecta només els dos segments que la uneixen amb les adjacents i l'alteració és mínima. En anar augmentant el grau l'entorn on la variació es fa sentir va eixamplant-se fins arribar a la interpolació global, on l'efecte és també global.

Cal mostrar als alumnes, amb exemples ben triats, aquesta relació discordant entre "suavitat" i "estabilitat" de la gràfica, i justificar-la amb els principis que regeixen la seva construcció, fent intervenir en la determinació de cada fragment els valors presos en punts progressivament allunyats dels seus extrems.

L'opció 8 "Augment del nombre de dades" permet d'eleger les noves dades que hom desitgi sense ultrapassar el nombre de 20, i continuar com en l'opció 7. És natural afegir una dada cada vegada, perquè quedin evidenciats els fenòmens que puguin produir-se. Aquests tenen un interès teòric secundari davant dels mencionats en l'opció 7, i obeeixen en general a les mateixes regles i consideracions.

Els efectes de l'addició d'una dada varien molt amb la posició d'aquesta. Si l'abscissa de la dada nova és més gran que les abscisses de les anteriors es produeix el que en una sèrie temporal hom podria dir "extrapolació cap al futur". Com que la gràfica ha estat construïda començant per l'arc més a l'esquerra la part ja dibuixada es manté inalterada i només s'afegeix un nou arc. Amb l'excepció de la interpolació global, doncs, la

prolongació d'una sèrie de dades no afecta els valors anteriors. Quan la dada afegida es situa a l'esquerra de les anteriors o en mig d'elles les alteracions produïdes poden descriure's segons les mateixes pautes que en la variació d'una dada.

11. INSTRUCCIONS I COMENTARIS DE FUNCIONAMENT

El programa es posa en marxa escrivint el seu nom INTTROS.

El nombre de dades està limitat a 20 per les restriccions que imposa la pantalla a la presentació del conjunt de dades i a la saturació que amb tal nombre es produeix a les gràfiques. No s'admeten menys de 5 dades car llavors els diferents mètodes són pràcticament idèntics i en alguns casos no poden dur-se a terme els càlculs per manca de punts suficients per a establir les equacions.

Excepte en la interpolació global, un nombre gran de dades pot ésser més revelador de certs fenòmens que un de petit. Cal tenir en compte que el temps d'execució dels algorismes és proporcional al nombre de dades i, en el cas global, al seu quadrat.

La naturalesa de la interpolació parabòlica exigeix un nombre imparell de dades, i el programa refusa la seva realització si això no es compleix. Si un augment del nombre de dades canvia la paritat ja no hi ha inconvenient, però no podrà realitzar-se la comparació de la interpolació parabòlica amb l'efectuada amb les dades anteriors, com és natural.

Les gràfiques apareixen referides a dos segments graduats de forma diferent per a abscisses i ordenades, per tal que puguin utilitzar-se en la major part de situacions reals, on corresponen a ordres de magnitud molt diferents. Els punts que representen les dades de la interpolació sempre són visibles i estan especialment ressaltats; però la gràfica pot quedar parcialment fora del camp de dibuix i llavors, si es creu convenient, pot reduir-se fins a fer-se visible. Aquesta reducció és factible per a abscisses i ordenades separatament i permet també de posar la mateixa escala als dos eixos. El canvi d'escala és factible tant per ampliar com per reduir les figures, i tant si a la pantalla hi ha una gràfica com dues, i pot reiterar-se. En cas d'augment de l'escala cal esperar que es perdi la visió d'alguna de les dades.

En el càlcul de la interpolació global el programa empra l'algorisme de Lagrange, i en els casos 3,4 i 5 resol un sistema de 4 equacions lineals com a màxim, plantejat pel mètode dels coeficients indeterminats. En la interpolació lineal no es porta a terme cap càlcul.

En alguns casos quan el nombre de dades és gran i la seva magnitud molt dispar pot produir-se una distorsió exagerada en la gràfica que faci impossible el seu correcte traçat. En aquest cas l'usuari és informat de la circumstància i invitat a reduir l'escala de la representació o a dirigir-se a un altre punt del menú.

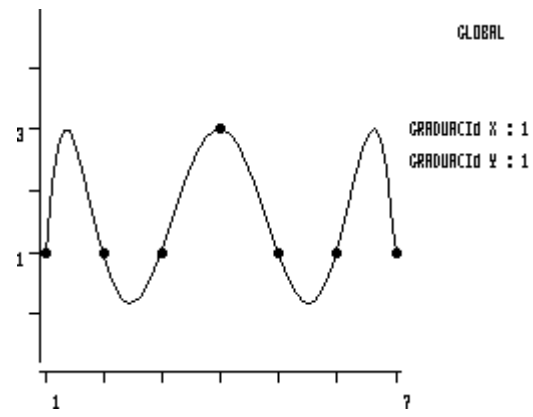


Figura 2

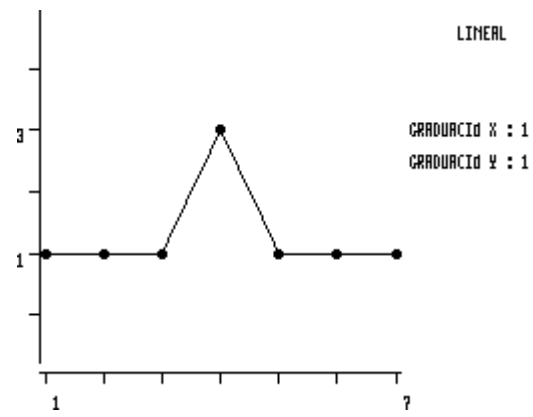


Figura 3

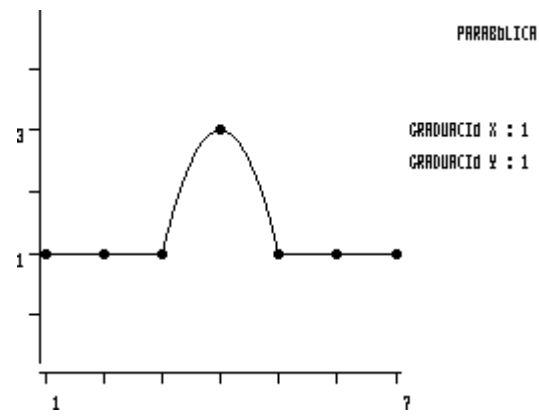


Figura 4

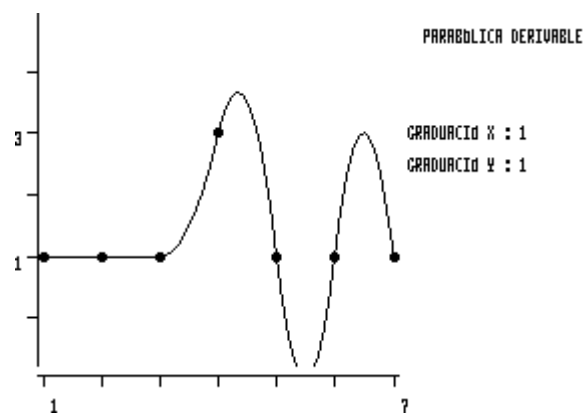


Figura 5

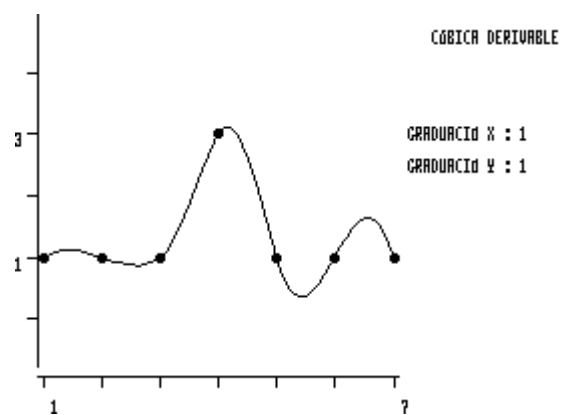


Figura 6

Matrimonis civils a Barcelona, de 1967 a 1981

1967	90
1968	136
1969	181
1970	215
1971	315
1972	379
1973	471
1974	468
1975	477
1976	560
1977	888
1978	1387
1979	1941
1980	2062
1981	2243

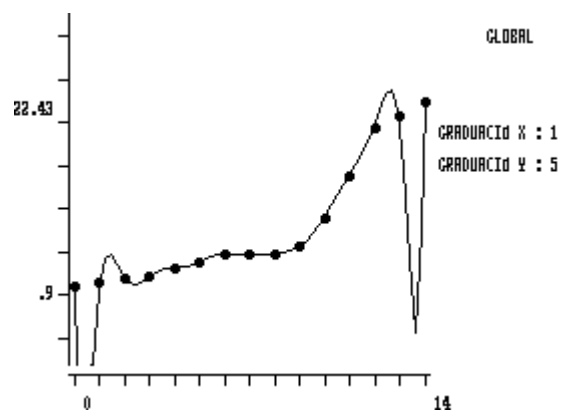


Figura 7

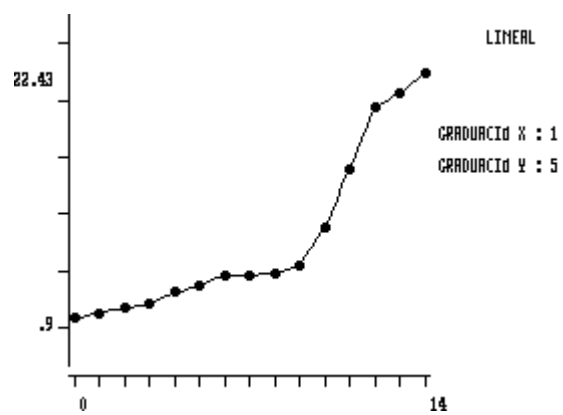


Figura 8

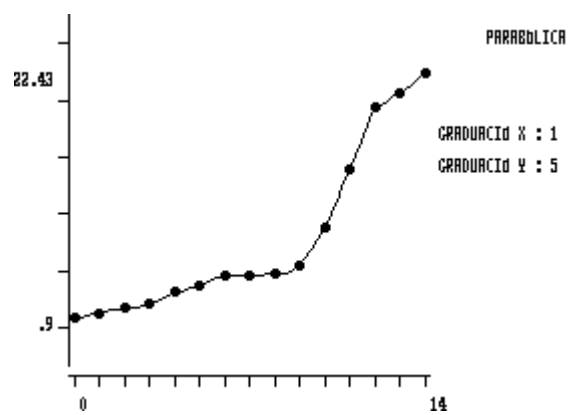


Figura 9

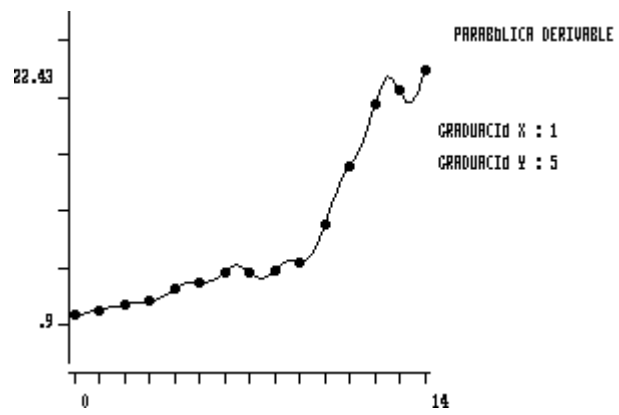


Figura 10

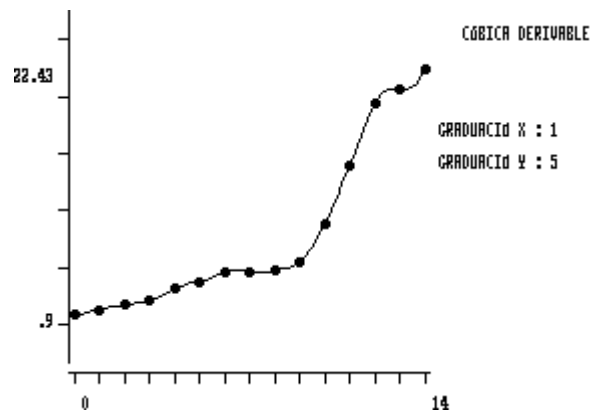


Figura 11