Límits laterals

Joaquim Castellsaguer i Guanyabens
Programa d'Informàtica Educativa, 1988.

1. NOM DEL PROGRAMA

Límits laterals (nom d'arxiu LIMLAT.EXE)

2. AUTOR

Joaquim Castellsaguer i Guanyabens

formant part del GRUP EIX amb Carles Bailo i Mompart
Carles Barceló i Vidal
Antoni Gomà i Nasarre
Ferran Ruiz i Tarragó
Joan Antoni Sellarès i Chiva

3. TEMÀTICA

Representació i càlcul dels límits laterals en un punt finit d'una funció triada dins d'un conjunt d'exemples proposats.

4. OBJECTIUS

El programa es proposa constituir:

- una collecció de gràfiques de funcions que sigui apta per a observar determinades particularitats d'aquestes i relacionar- les amb la seva expressió analítica.

- un instrument per a la manipulació interactiva del concepte de funció com a mètode de transformació de nombres destacant els seus aspectes dinàmics, i del concepte de gràfica com a representació dels valors obtinguts.

- una ajuda per a la introducció i consolidació del concepte de límit i la seva interpretació, i per distingir i inventariar les diverses situacions que poden suscitar-se en el càlcul d'un límit.

No és objectiu del programa l'aprenentatge dels mètodes de càlcul efectiu de límits d'una funció en un punt.

5. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC

L'estreta relació entre els conceptes de límit i de continuïtat en un punt fa que sigui convenient, en tota exposició, deixar clara la seva articulació quant a l'ordre en què es presenten i s'entrellacen.

Aquest programa se centra exclusivament en el concepte de límit i més concretament en el de límit lateral. Deixa de banda, doncs, la consideració del límit pròpiament dit d'una funció en un punt. Tampoc es troba al seu abast l'estudi del límit quan la variable tendeix a infinit, tema estretament lligat a les successions.

El programa fa una introducció a la idea de límit lateral, mostrant en forma numèrica i gràfica el procés d'aproximació de X a un valor donat i la corresponent evolució de F(X). Durant la major part de la seva execució no utilitza ni presenta cap definició matemàtica de límit.
També es manté neutral respecte de la continuïtat, sense que hi hagi cap allusió a la terminologia relacionada amb ella.

El lligam entre les nocions de límit i continuïtat establert per la relació

$$F \text{ és contínua en } A \longleftrightarrow \lim_{X \to A} F(X)=F(A)$$

és emprat implícitament en la darrera part del programa i pot ésser llegit en el sentit que concordi amb el plantejament que s'hagi donat a tot el tema.

El programa pot, doncs, utilitzar-se en dos contextos:
- partint del concepte intuïtiu i gràfic de continuïtat, per observar diverses situacions i caracteritzar-les numèricament mitjançant la idea de límit d'una successió de valors.
- partint del concepte d'aproximació i donant-ne una interpretació gràfica, per detectar el seu diferent comportament segons on s'acosti la variable, i assignar a cada cas el nom adequat per a descriure'l.

6. CONEIXEMENTS PREVIS

Convé que l'alumne tingui present, durant l'execució del programa:

- la terminologia i notació bàsiques sobre funcions i el significat de les seves gràfiques.
- la definició, domini i propietats elementals de les funcions fonamentals que hi intervenen.
- alguna noció sobre la forma de les gràfiques de les funcions més conegudes
- la distinció entre intervals oberts i tancats
- el concepte, formalitzat o no, de punt d'acumulació.
- la possibilitat de definir una funció per trossos i de definir arbitràriament la imatge d'un valor.

Un coneixement del concepte de límit per a successions pot fer més entenedors alguns detalls, però no és imprescindible.

7. NIVELL

El programa està dirigit als alumnes dels actuals cursos Segon i Tercer de Batxillerat als quals hom vulgui introduir en els temes "Límit d'una funció en un punt" i "Continuïtat". L'amplitud del camp de funcions que siguin familiars als alumnes obligarà a una selecció dels exemples que puguin triar-se en cada moment. Pot aconsellar-se un retorn al programa quan els horitzons del treball s'hagin dilatat fins a incloure totes les funcions elementals, algebraiques i transcendents.

8. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

El desenvolupament del programa és essencialment lineal. El treball amb un exemple determinat implica l'elecció successiva de:

1) l'exemple
2) l'objectiu
3) el costat d'aproximació
4) l'inici de l'aproximació

i continua fins a la presentació del límit. Després és possible reemprendre l'execució modificant a voluntat una de les eleccions fetes a 1),2) o 3). En tot moment pot abandonar- se el programa prement F1.
El diagrama de la pàgina 11 illustra aquestes consideracions.

9. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA

La primera acció que el programa efectua, un cop triat l'exemple que hom desitja, és l'escriptura de l'expressió de la funció corresponent i la representació de la seva gràfica. Cal aturar-se aquí uns moments.

Hom observarà que la funció apareix definida en diversos intervals, alguns dels quals poden ésser tancats per un o els dos extrems. La gràfica no fa visible aquesta distinció, i els alumnes han de raonar els motius que han conduït a fer-la.
En primer lloc, els intervals estan sempre inclosos en el domini de la funció, i si els alumnes coneixen quelcom sobre el domini podran comprovar-ho cercant en cada fórmula els valors de X que puguin ésser "problemàtics" i veient, en sentit contrari, que els extrems dels intervals oberts corresponen, generalment, a valors que no tenen imatge.
En segon lloc, han de fixar-se que una mateixa abscissa no pot ésser extrem de dos intervals tancats en ella. Per això en alguns exemples l'atribució d'un punt a un qualsevol de dos intervals contigus ha estat feta arbitràriament en no existir problemes de domini, i cal remarcar que un canvi d'aquesta atribució no seria visible a la gràfica.
Finalment, pot mancar una definició de la funció en algun interval; els alumnes han de veure que això correspon a funcions que exclouen del domini intervals sencers i no ja a punts aïllats.

Quan la gràfica pot enganyar quant a l'existència d'imatge d'alguna abscissa, ha estat deixat en el seu lloc un senyal o "forat" prou ampliat per ésser fàcilment distingible. L'experiència mostra que els alumnes es familiaritzen molt aviat amb aquest simbolisme. Quan la definició de la funció en un punt està feta independentment de la que correspon als intervals adjacents a aquest punt, apareix també així en la designació i com un cercle o "punt gros" a la gràfica.

En la major part dels exemples hom empra una sola expressió de la funció, que es repeteix en cada interval idènticament. Això pot semblar reiteratiu als alumnes, que -no gaire ben acostumats- prefereixen fer abstracció del domini a l'hora de donar una definició. És important, en canvi, que no separin massa aviat l'expressió simbòlica del seu domini de validesa, i que el facin constar explícitament tal com fa el programa.

La darrera tasca que cal dur a terme abans de continuar és la identificació, tant com sigui possible, de la gràfica i de les seves parts. La presència de l'origen i d'un (com a mínim) dels extrems visibles de l'eix d'abscisses ha d'ésser suficient per imaginar la posició dels intervals i dels punts que entren a la definició. Certa familiaritat amb les formes de les gràfiques d'algunes funcions senzilles permet de reconèixer-les quan apareixen. Si es tracta de funcions més complexes o encara no conegudes per l'alumne, el programa pot servir-li d'introducció.

Un cop establerta la identitat de la funció estudiada i verificades la seva escriptura i la seva correspondència amb la gràfica el professor pot formular certes qüestions associades a una lectura purament visual de la situació: a més a més de l'observació del domini, ja esmentada, pot dirigir l'atenció vers conceptes com els de recorregut, monotonia, injectivitat, simetries, etc.

El programa es configura així, en una primera lectura, com un magatzem d'exemples amb els quals treballar, a un nivell elemental, diverses nocions associades a l'estudi de les funcions.

La modificació de la posició de l'eix d'abscisses, a què cal donar resposta a continuació, no és gaire rellevant des d'aquest punt de vista, ja que el seu interès està molt lligat a la representació de límits. Ara bé, és una forma eficaç de convèncer els alumnes refractaris a la convenció de la "finestra" que la gràfica s'estén, visible o no, a tot el domini que ha estat precisat en la definició.

Si ara no es confirma l'opció triada com a exemple podem passar a un altre, ja sigui cercant-ne un de més adequat o, més naturalment, realitzant una exploració del conjunt d'exemples, i treballant amb ells de la forma analitzada fins ara.

El pas a l'estudi del límit té diverses etapes:

1) elecció de l'objectiu

En el programa s'anomena "objectiu" el valor A al qual s'aproxima l'abscissa X. Pot ésser triat lliurement per l'alumne entre les abscisses visibles a la finestra, estiguin o no dins del domini.
Hi ha una sola restricció a l'elecció d'A: el programa el rebutja raonadament si és interior a un interval en què la funció no està definida, és a dir, si no és un punt d'acumulació del domini.

La noció de punt d'acumulació, deixant estar les seves ramificacions topològiques, és essencial en la definició de límit. Malgrat la raresa del seu ús i del seu nom en aquests nivells, el seu significat és senzill d'assimilar i també les raons de la seva importància . Quan aparegui aquesta restricció -només present en dos exemples- el professor haurà de remarcar- ho i procedir, si de cas, a un refinament de la idea de límit que pugui haver donat prèviament.

Quin objectiu convé triar? De cara a l'eficiència didàctica del programa és millor descartar:
a) els objectius que tinguin imatge fora de la finestra gràfica, perquè el programa deixarà llavors de tenir resultats "visibles". Si ha estat triat així un missatge ho informa i ofereix la possibilitat de canviar-lo.
b) els objectius massa artificiosos, amb diversos decimals o indistingibles pràcticament dels extrems dels intervals.

L'estudi del límit en un objectiu interior al domini és convenient algunes vegades, però pot cansar aviat pel seu escàs marge de sorpresa. El moment en què els alumnes comencin a reaccionar en aquest sentit és important, car llavors comença a haver-hi una comprensió correcta del concepte de continuïtat en un punt. L'atenció es desplaça llavors naturalment als punts fronterers, on realment passen les coses interessants.

Un cop triat l'objectiu A, el programa calcula la seva imatge F(A) i si no existeix ho diu explícitament. El professor ha de tranquillitzar, en aquest darrer cas, els alumnes sensibilitzats -tant de bo fossin tots!- a les qüestions de domini.

En tot cas apareix en l'eix d'abscisses un senyal quadrat corresponent a X=A. Atenció: no és la representació de (A,F(A)). Els alumnes ja aniran veient que F(A) no té un paper gens interessant en la resta del programa.

2) elecció del costat

Té, òbviament, dues opcions. Si l'objectiu és un extrem de la finestra només és admissible una d'elles. Quan l'objectiu és a la frontera d'un interval exterior al domini tampoc no és possible -i així ho explica el programa- una de les opcions.

3) elecció de l'inici de l'aproximació

En les primeres execucions convé que es trobi en el mateix interval que l'objectiu; més endavant podrà situar-se més lluny per constatar -i la idea és important- que el límit ve lligat al comportament en els punts pròxims a l'objectiu i que els altres no hi tenen res a veure.
També és convenient, d'entrada, que la funció sigui monòtona entre l'inici i l'objectiu. La variant monòtona de la convergència és la captada en primer lloc pels alumnes.

El nucli del programa consisteix en la visualització i càlcul de les imatges de diversos valors de X, cada cop més pròxims a l'objectiu, i en l'anàlisi dels resultats així obtinguts. En el procés hi ha, mentre és possible, un doble recolzament simultani: gràfic i numèric. Els alumnes han de marcar ara el ritme de treball i el professor haurà, molt probablement, de moderar-lo i dirigir l'atenció més enllà dels efectes visuals immediats.

Podem citar, en aquest sentit, que:

- a un nivell molt elemental, l'alumne ha de reflexionar sobre els fonaments del procés: una gràfica és un registre o dipòsit d'imatges, que podem obtenir d'una en una traçant dues paralleles als eixos tal com ho fa el programa.
Aquesta concepció, que és absolutament fonamental, ha estat sovint enfosquida per la seva recíproca, que fa derivar la gràfica de les imatges ja obtingudes. Ara és una bona ocasió per a insistir-hi.

- el control dels valors numèrics que van apareixent no pot dur- se a terme de forma efectiva més que en casos molt senzills (funcions constants, lineals, etc.). Es molt útil anar observant les seves tendències de creixement o decreixement, el seu ritme de variació i, sobretot, la seva eventual aproximació al valor de F(A) que roman escrit a l'angle superior dret. Correlativament, les marques fetes a l'eix d'ordenades per a cada imatge calculada s'aniran condensant o separant segons els casos.

Aquest procés de càlcul gràfic d'imatges es dóna per acabat quan X és suficientment a prop de l'objectiu. En tal moment els alumnes poden efectuar diverses conjectures basant-se en l'observació de la gràfica, dels valors numèrics, i de la imatge de l'objectiu. Les conjectures seguiran normalment el model "si X continua aproximant-se a A llavors F(X)..."; la seva formulació és un important objectiu del programa, car pot representar la primera aparició del concepte de límit en la forma més directa i assequible.
És ara quan la paraula "límit" intervé per primer cop en el programa, exigint una actuació per part de l'usuari, el qual pot passar directament al límit o continuar, si sembla necessari, efectuant aproximacions numèriques.
En cas d'haver elegit aquesta darrera opció, la gràfica roman immòbil i van calculant-se al ritme desitjat les imatges de valors de X cada vegada més pròxims a l'objectiu, sense arribar, però, a prendre el valor d'aquest. L'obtenció de valors esdevé impossible quan, amb l'ordre de precisió de l'aparell, coincideixen els valors de X i de l'objectiu. És important explicar els motius d'aquesta restricció, que serveix per a insistir en una qüestió primordial: el límit està totalment deslligat de la imatge de l'objectiu. Caldrà també remarcar que aquesta "proximitat" ha d'ésser, en la definició de límit, una distància arbitràriament petita que l'ordinador no pot aconseguir. El càlcul pot ésser abandonat en qualsevol moment per passar al valor del límit.

La darrera fase és estàtica: el programa informa de l'existència o no del límit lateral de la funció en el punt i, en el primer cas, comunica el seu valor que pot ésser finit o infinit. Quan el límit coincideix amb F(A) es mostra a més a més l'expressió simbòlica obtinguda en substituir X per A en el corresponent fragment de la funció, cosa que pot servir per a comprovació.

És convenient retornar llavors a la gràfica, desproveïda de tots els additaments que el curs del programa ha anat afegint, per interpretar-hi el resultat obtingut i proposar progressivament la terminologia descriptiva de cada situació un cop analitzada numèricament. És el moment d'introduir els mots "continuïtat" i "discontinuïtat" i les diverses distincions d'aquesta.
Un complet aprofitament de l'exemple passa per la repetició de les fases anteriors per a l'altre costat d'aproximació, per tal d'observar la possible diferència de comportament entre els dos i justificar així els noms "límit per la dreta" i "límit per l'esquerra". Com ja ha estat dit, el programa no els compara ni estableix conclusions en aquest sentit; el professor ha d'introduir el terme "límit" i les notacions adequades per a cada cas.

10. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

El programa es posa en marxa escrivint el seu nom LIMLAT.

11. EXEMPLES

El programa disposa d'un repertori de 25 exemples raonablement exhaustiu. Un seguiment detallat de tots ells resulta potser massa llarg per a un curs ordinari, i cal triar els més adequats als propòsits i circumstàncies.
S'ha intentat d'evitar els exemples artificials, privilegiant els integrats per una única funció i reduint al mínim indispensable els descrits per dues o més funcions. El ventall de funcions involucrades és molt ampli i comprèn la major part de funcions fonamentals, tant algebraiques com transcendents.

Els exemples poden agrupar-se segons diferents criteris, alguns dels quals s'especifiquen a continuació com a guia per al professor:

a) funcions exclusivament algebraiques: 1, 2, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 20, 23, 24

b) amb funcions trigonomètriques: 4, 8, 12, 14, 25

c) amb exponencials i logaritmes: 3, 5, 13, 18, 19, 21, 25

d) amb funcions part entera i valor absolut: 6, 7, 21, 22

e) descrits per una sola fórmula: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 22

f) descrits per dues fórmules: 16, 19, 20, 21, 24, 25

g) descrits per tres fórmules: 17, 18, 23

h) amb punts definits separadament: 14, 15, 23, 24, 25

i) amb intervals fora del domini: 9, 10

j) amb una discontinuïtat asimptòtica: 1, 3, 4, 21, 24

k) amb dues discontinuïtats asimptòtiques: 2,10

l) amb una discontinuïtat asimptòtica per un sol costat: 5, 20

m) amb una discontinuïtat de salt: 6, 7, 8, 16, 23

n) amb discontinuïtats evitables: 11, 12, 13, 19, 22, 25

o) amb un punt aïllat: 15

En les figures 1 a 25 poden veure's les gràfiques i fórmules dels 25 exemples, amb la mateixa numeració.

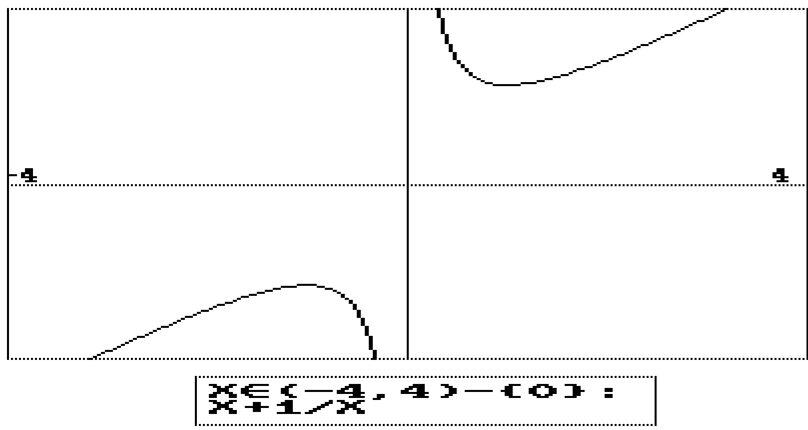


Figura1

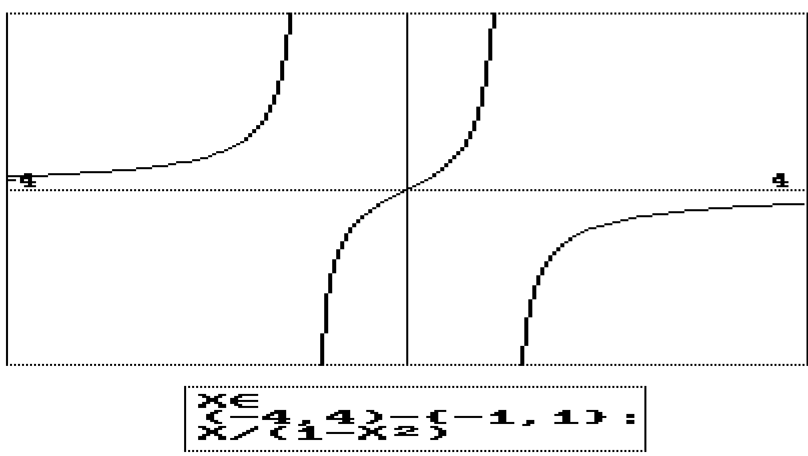


Figura 2

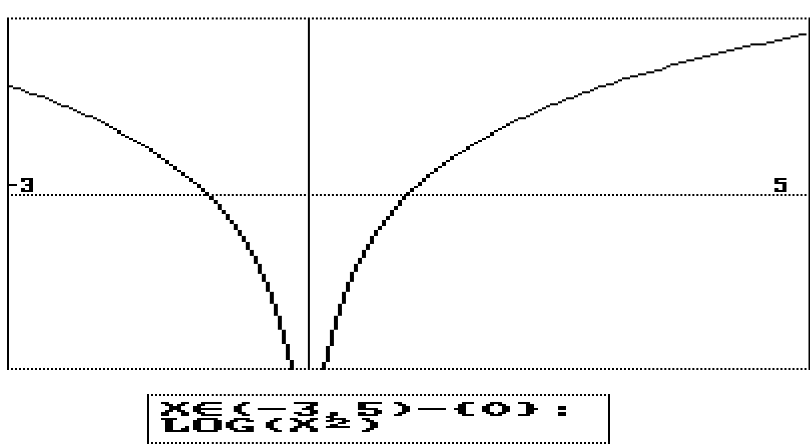


Figura 3

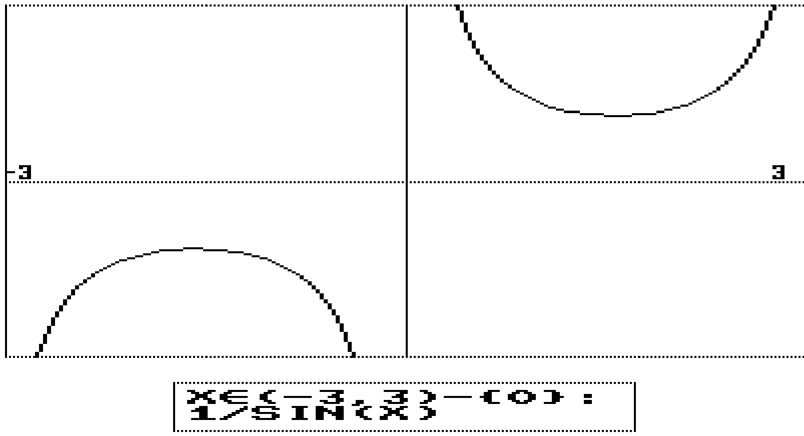


Figura 4

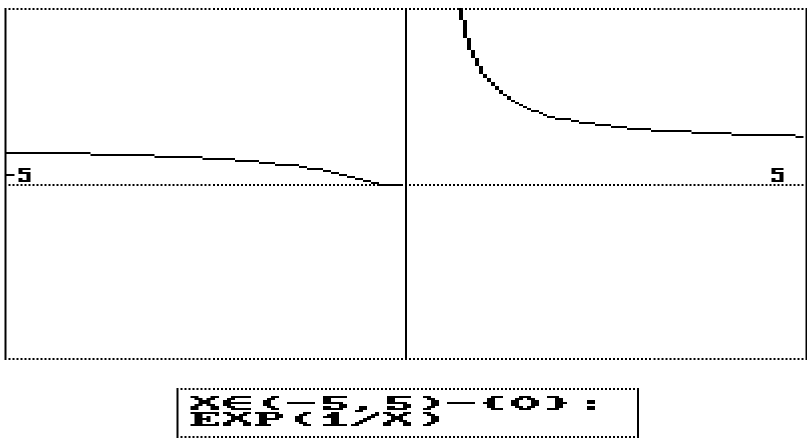


Figura 5

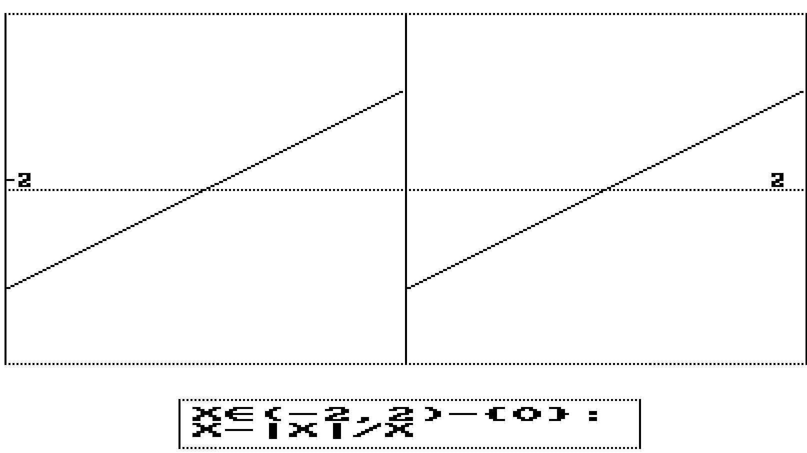


Figura 6

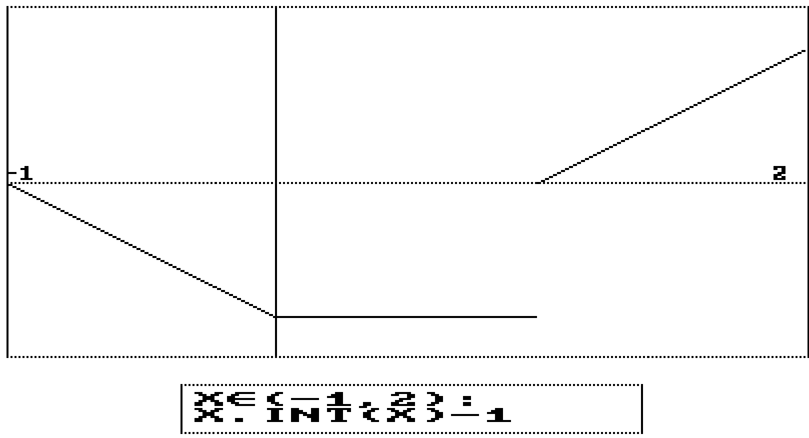


Figura 7

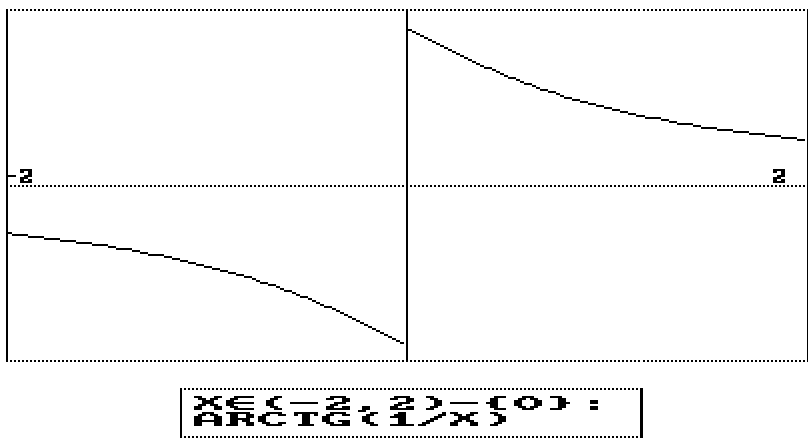


Figura 8

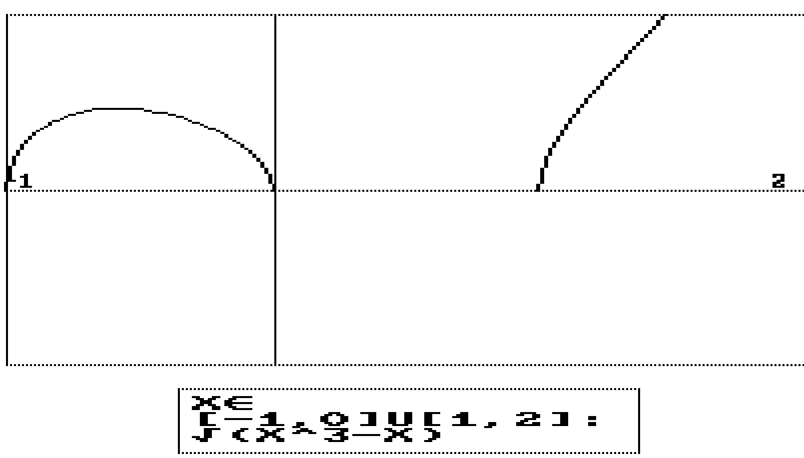


Figura 9

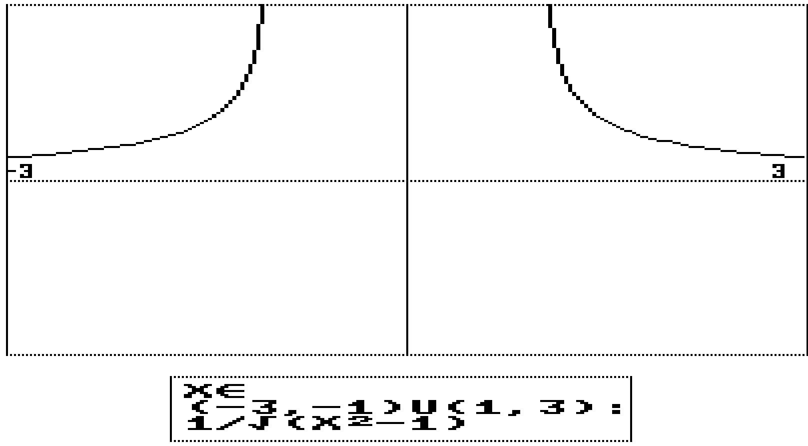


Figura 10

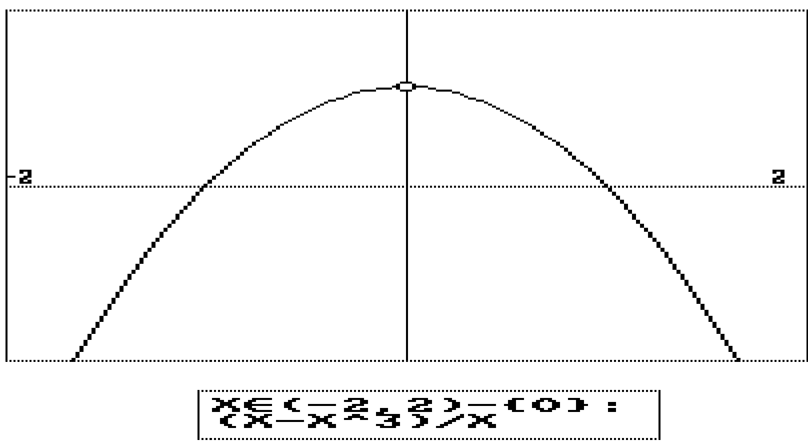


Figura 11

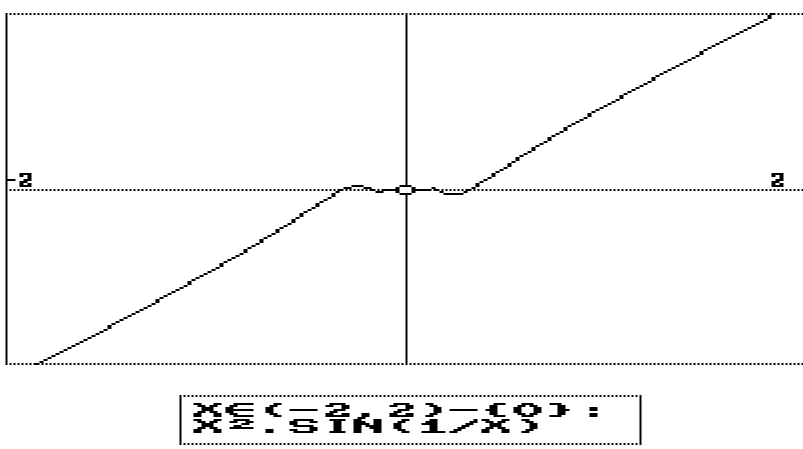
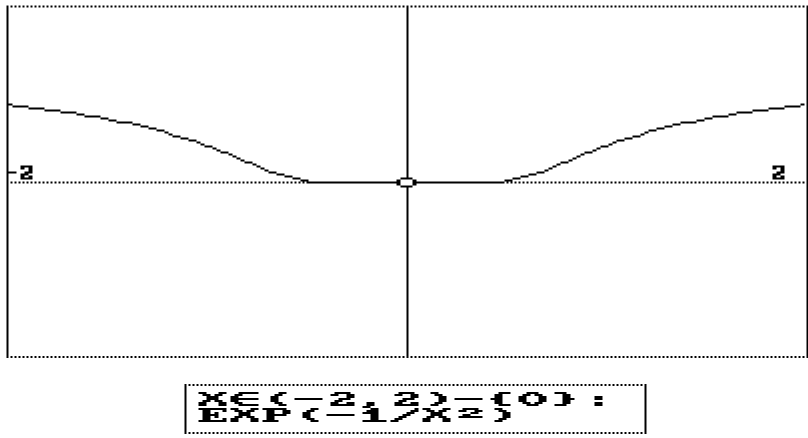


Figura 12



Fugura 13

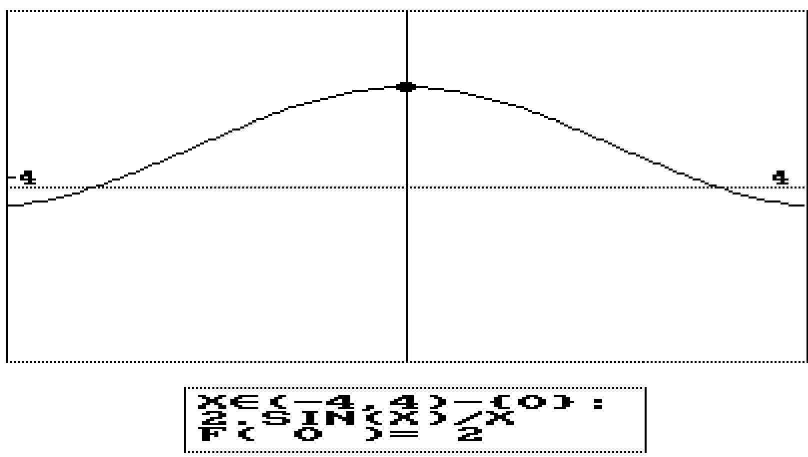


Figura 14

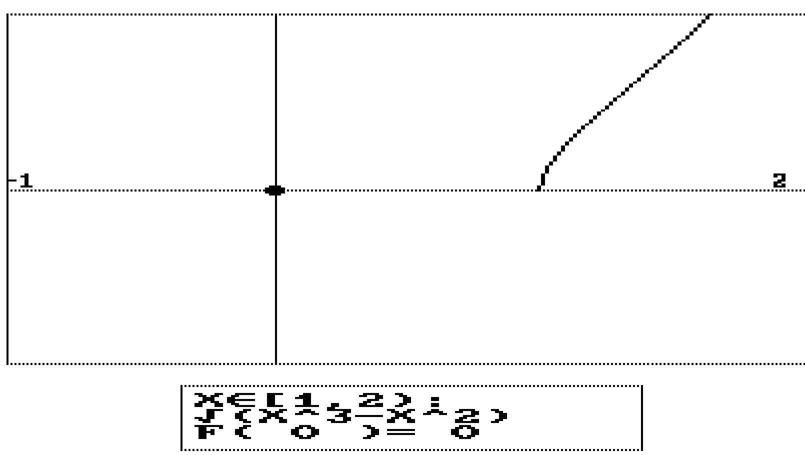


Figura 15

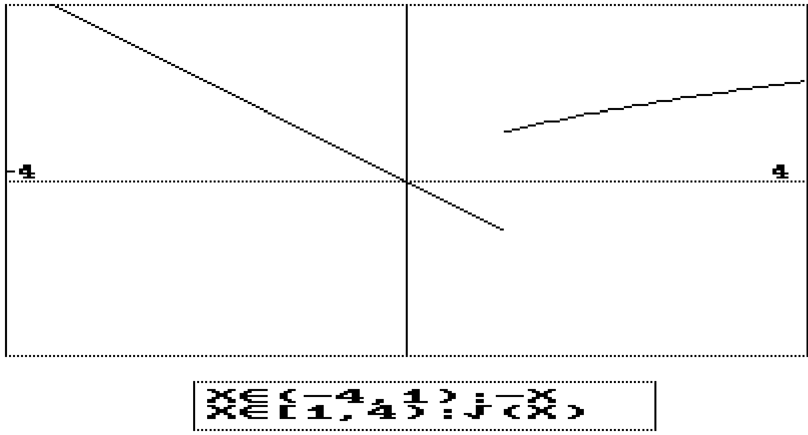


Figura 16

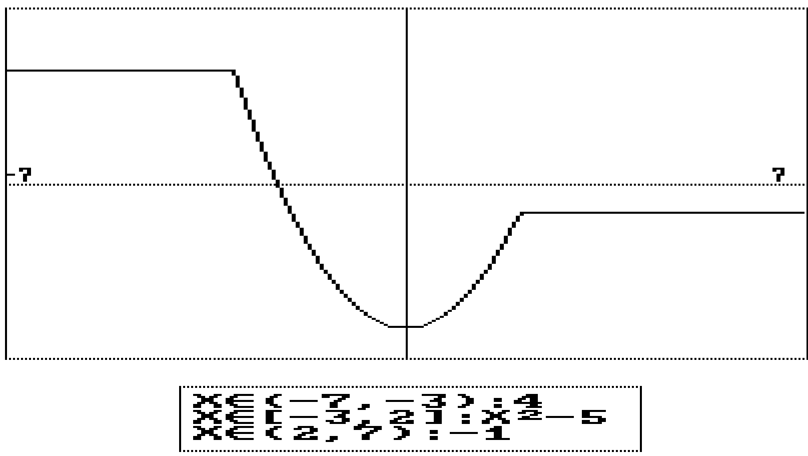


Figura 17

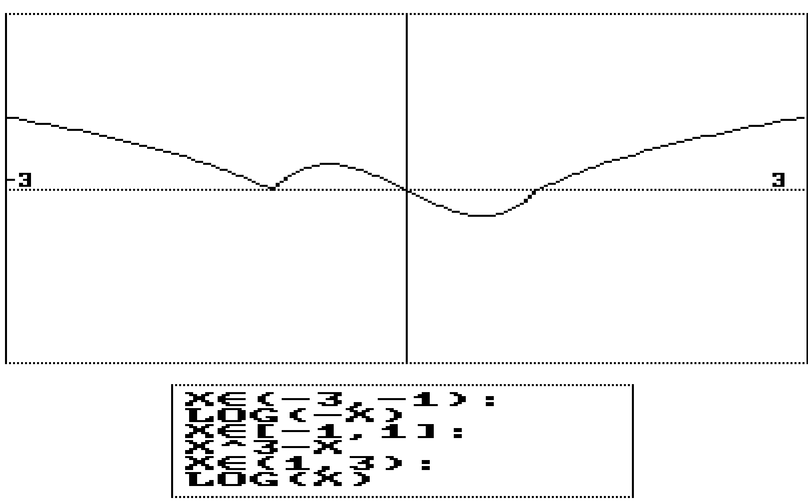


Figura 18

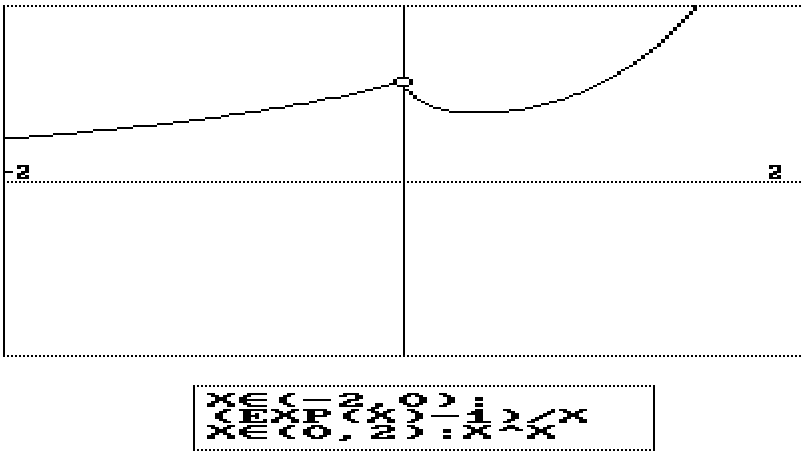


Figura 19

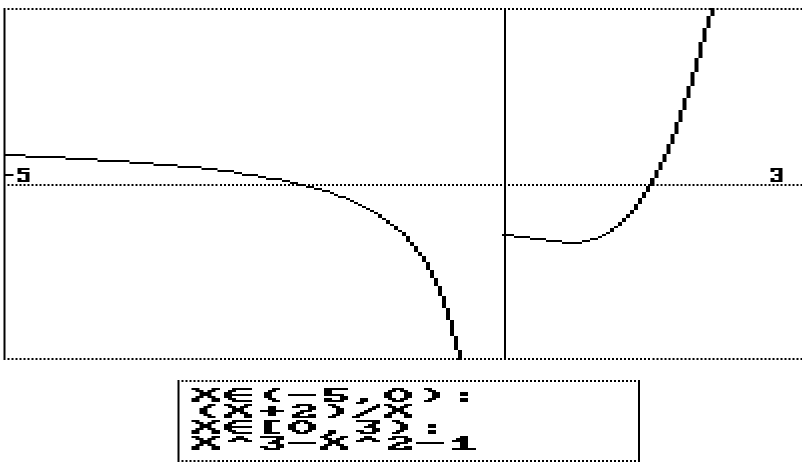


Figura 20

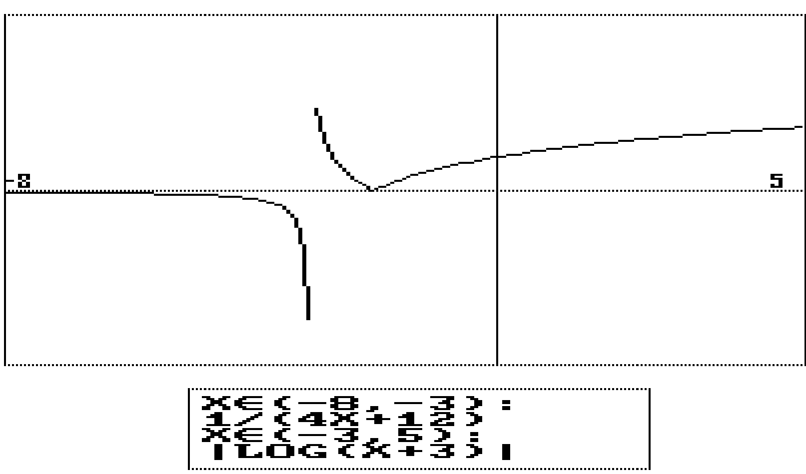


Figura 21

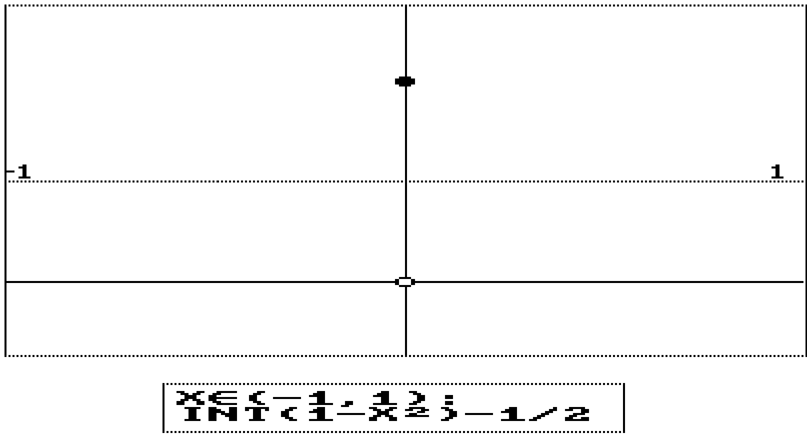


Figura 22

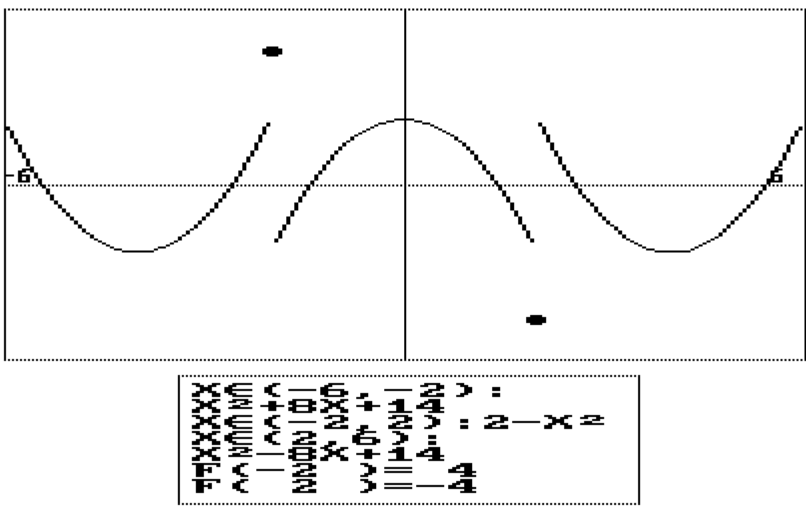


Figura 23

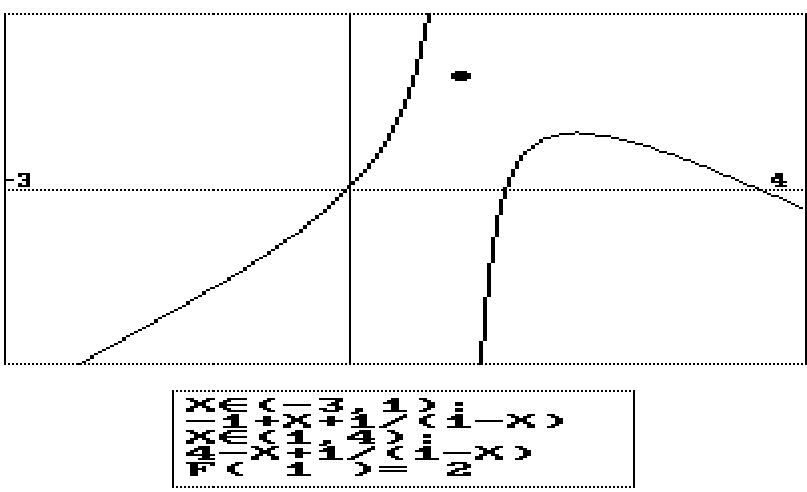


Figura 24

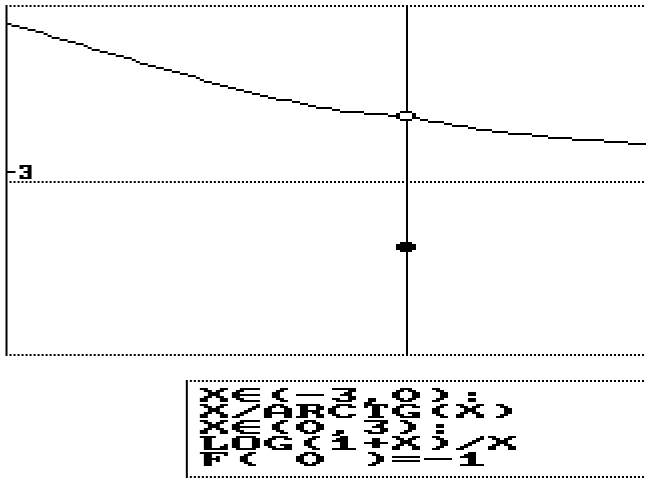


Figura 25