

L'espai cartesià

S. Manrique Catalán; M. T. Sasal Lasaosa ; J. L. Soler Quetglas
Programa d'Informàtica Educativa, 1990.

1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

- 1.1 Títol
- 1.2 Autors
- 1.3 Tema
- 1.4 Assignatura
- 1.5 Nivell escolar
- 1.6 Coneixements previs
- 1.7 Localització
- 1.8 Noms dels fitxers

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

- 2.1 Posta en marxa
- 2.2 Opcions bàsiques
- 2.3 Diagrama estructural
- 2.4 Instruccions. Interacció

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

- 3.1 Objectius
- 3.2 Metodologia d'ús
- 3.3 Opcions i exemple d'ús

1 Característiques generals

1.1 Títol

L'ESPAI CARTESIÀ

1.2 Autors

S. Manrique Catalán
M.T. Sasal Lasaosa
J.L. Soler Quetglas
Col·labora: GRUP ABAX

1.3 Tema

Aquest programa permet la representació de forma ràpida i precisa dels elements geomètrics lineals de l'espai tridimensional sobre la pantalla de l'ordinador. Utilitza unes formes pròpies de representació per a facilitar la visualització d'elements i les coordenades dels punts o les components dels vectors orientadors.

Aquesta unitat facilita l'estudi de temes com:

- Els aspectes relatius a geometria de l'espai, coordenades cartesianes, eixos i plans coordenats.
- Les diferents formes de determinar una recta, les seves equacions i les equacions del pla.

- Les interseccions entre elements poden ser analitzades directament a través del programa.

1.4 Assignatura

Matemàtiques.

1.5 Nivell escolar

C.O.U.

1.6 Localització

Aquesta unitat es troba en el disc amb l'etiqueta
GRAF123 UNITAT 8
L'ESPAI CARTESIÀ.

1.7 Coneixements previs

L'estudi matemàtic de l'espai cartesià és precedit en els plans d'estudis per una anàlisi detallada del pla bidimensional. Molts dels conceptes que s'hi desenvolupen són tractats de nou i adquireixen en l'espai una nova perspectiva. Per a un ús adequat d'aquest programa es pressuposen els coneixements recollits en els temaris sobre geometria del pla.

Els aspectes relatius a geometria de l'espai poden ser introduïts a classe paral·lelament a l'ús del programa. Així, per a una primera utilització n'hi ha prou de conèixer conceptes associats a l'espai cartesià, coordenades cartesianes, eixos i plans coordenats. En posteriors utilitzacions caldrà conèixer les diferents formes de determinar una recta, les seves equacions i les equacions del pla. El programa, per la seva banda, facilitarà la comprensió adequada d'aquests conceptes. Les interseccions entre elements podran ser analitzades directament a través del programa.

1.8 Noms dels fitxers

La unitat 6 està formada pels següents arxius:

Programa:

GRAFU8.EXE

Altres arxius:

PORTADA.BIN LETD U8P1.SCT U8P2.SCT U8P3.SCT

Arxius de les pàgines d'ajut i documentació:

U8D1.SCT	U8D2.SCT	U8D3.SCT	U8D4.SCT	U8D5.SCT
U8D6.SCT	U8D7.SCT	U8I1.SCT	U9I2.SCT	U9I3.SCT
U9I4.SCT	U9I5.SCT	U9I6.SCT	U9I7.SCT	U9I8.SCT
U9I9.SCT		U9I10.SCT	U8ZONA1.BAS	U8ZONA2.BAS
U8ZONA3.BAS	U8ZONA4.BAS		U8ZONA5.BAS	U8ZONA6.BAS
U8ZONA7.BAS	U8ZONA8.BAS		U8ZONA9.BAS	
U8ZONA10.BAS		U8ZONA11.BAS	U8ZONA12.BAS	U8ZONA1

3.BASU8ZONA14.BAS

U8ZONA15.BAS

U8ZONA16.BAS

U8ZONA17.BAS

U8ZONA18.BAS

U8ZON21.BAS

U8ZON22.BAS

U8ZON23.BAS

U8ZON24.BAS

U8ZON25.BAS

U8ZON26.BAS

U8ZON27.BAS

U8ZON28.BAS

U8ZON29.BAS

U8ZON210.BAS

U8ZON211.BAS

U8ZON212.BAS

U8ZON213.BAS

U8ZON214.BAS

U8ZON215.BAS

U8ZON216.BAS

U8ZON217.BAS

U8ZON218.BAS

2 Instruccions de funcionament

2.1 Posta en marxa

Per executar la unitat 8 podem triar alguna de les següents tres possibilitats:

a) Disposar d'un disquet a la boca A amb tots els arxius assenyalats.

A continuació executar el programa GRAFU8.EXE

b) Copiar al disc C tots els arxius en un subdirectori.

Cal accedir al subdirectori i executar el programa GRAFU8.EXE

c) Instal·lar al disc C.

Instal·lar el programa amb els seus arxius.

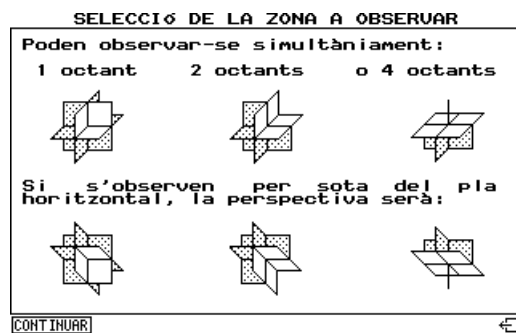
A continuació accedir a l'opció corresponent dels menús que apareixen a la pantalla.

2.2 Opcions bàsiques

SELECCIÓ DE LA ZONA DE TREBALL

Alternatives possibles

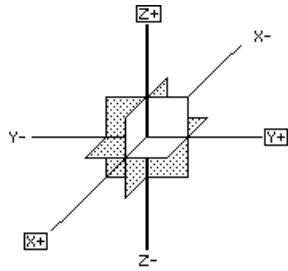
La zona de treball pot seleccionar-se per sobre o per sota del pla horitzontal. Es pot optar entre un octant, dos de contigus o quatre.



Forma de selecció

Cada una de les possibles zones de treball és determinada per uns semieixos. L'elecció de la zona es realitza triant aquests semieixos.

Hi ha tres submenús que permeten optar entre les diferents alternatives de l'eix X, les de l'eix Y i les de l'eix Z. Es pot accedir a cada un d'ells en l'ordre en què es vulgui.



CONTINUAR EIX X EIX Y EIX Z ① ←

La figura central de la pantalla reflecteix en cada moment la zona de treball triada. La retolació dels semieixos queda emmarcada i els límits de la zona destacats en color magenta.

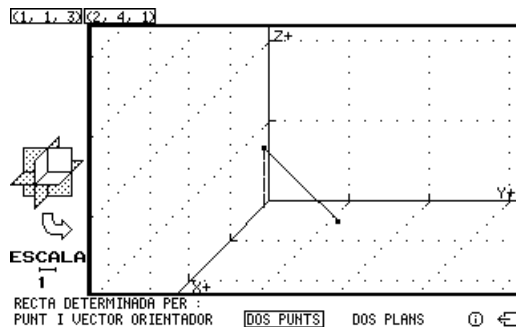
- Submenús: eixos X i Y. Ambdós ofereixen tres alternatives: es pot triar entre el semieix positiu, el semieix negatiu o ambdós alhora.
- Submenú: eix Z. Hi ha dues alternatives: es pot triar entre el semieix positiu o el semieix negatiu.

Punt d'observació

El punt d'observació dependrà de la zona de treball triada. En el cas de seleccionar un octant, aquest figurarà en el primer pla de la imatge, essent el punt d'observació el propi de la perspectiva cavallera utilitzada. En el cas de dos octants, un figurarà al davant i l'altre al darrera. A la situació de quatre octants s'hi arriba sempre a través d'una prèvia de dos octants i el punt d'observació existent es manté el de la fase anterior.

Elecció del punt d'observació en el cas de quatre octants

Per canviar el punt d'observació cal passar per un estat intermedi on se seleccionen dos octants. Aquesta selecció ha de fer-se de forma adequada per tal d'aconseguir que l'octant que es vulgui quedi en primer pla.



Representació en pantalla de l'elecció realitzada

La pantalla següent a la que ha estat usada per realitzar l'elecció reflectirà en el marge esquerre la selecció de zona de treball efectuada, tot destacant-la sobre una representació dels plans coordenats,

Es realitzarà una rotació dels plans coordenats quan la zona de treball no estigui situada en primer terme. En aquest cas es representaran uns nous plans coordenats a sota dels anteriors amb la seva orientació definitiva.

ELECCIÓ D'ESCALA

Dades sol·licitades

Per a cada un dels semieixos triats se sol·licita el nombre d'unitats mínimes que hauran de ser visualitzades. Els valors hauran d'oscil·lar entre 1000 i 0.001.

Realització de l'escalat

La situació de l'origen de coordenades a la pantalla és condicionada per les unitats que volem representar en cada semieix. A cada un dels semieixos s'hi dibuixen marques orientatives.

De forma similar en els plans coordinats apareix un reticle que facilita la interpretació dels elements geomètrics representats.

Aquest reticulat no és homogeni: els punts només es dibuixen a nivell de les marques dels eixos per no saturar la imatge.

Usualment el nombre d'unitats representades sobre cada eix és superior al que es demana, a fi de poder representar qualsevol punt les coordenades del qual es trobin dintre dels límits especificats. La dimensió de les unitats de dibuix es representa en la part esquerra de la pantalla.

REPRESENTACIÓ D'ELEMENTS

Els elements que es poden dibuixar són:

PUNT

Entrada de dades

Caldrà indicar els valors de cada una de les coordenades del punt.

Forma de representar-lo

El punt es representa mitjançant una esfera blanca. Per delimitar-ne la situació en l'espai s'utilitza una línia auxiliar de traços que indica la seva projecció sobre el pla horitzontal. La longitud de cada un dels segments d'aquesta línia és una unitat d'escala.

Situacions en què no serà visualitzat

El punt no es dibuixa si no pertany als octants en què s'està treballant, o si és fora de la zona de visió determinada per l'escala triada.

En tots els altres casos el punt serà dibuixat fins i tot en el cas que la seva projecció (sobre el pla horitzontal) quedi fora de la línia de visió.

RECTA

Entrada de dades

Punt i vector orientador

Caldrà indicar les coordenades d'un punt de la recta i les components d'un vector que l'orienti. Aquesta opció recull l'equació vectorial, paramètrica i contínua de la recta.

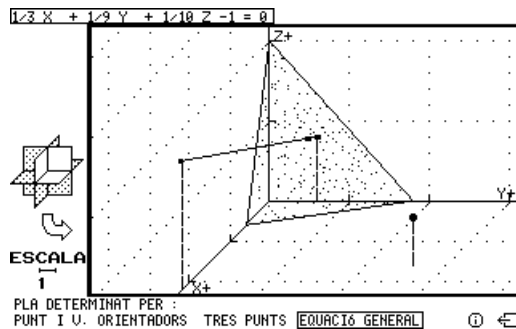
Dos punts

S'han d'indicar les coordenades de dos punts diferents de la recta.

Dos plans

És possible determinar la recta a través de dos plans diferents que la continguin.

Els paràmetres per definir cada un d'aquests plans poden triar-se entre les diferents opcions previstes per representar un pla.



Forma de representació

Es representa amb un segment blanc la part que es visualitza dintre de la zona de treball. Les seves interseccions amb els plans coordenats són punts negres.

PLA

Entrada de dades

Punt i vectors orientadors

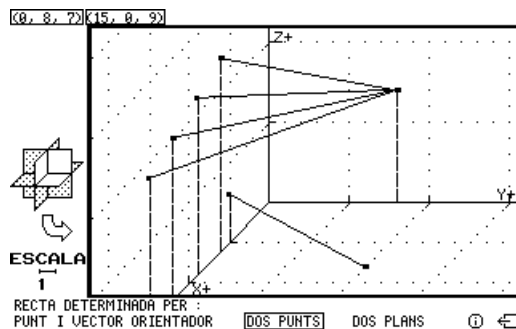
Caldrà indicar les coordenades d'un punt del pla i les components de dos vectors que l'orienten. Aquesta opció recull les equacions vectorial i paramètrica del pla.

Tres punts

S'han d'indicar les coordenades de tres punts no alineats del pla.

Equació general

La forma utilitzada d'equació general és $AX+BY+CZ+D=0$. Caldrà indicar els valors de cada un dels coeficients. Aquesta opció recull també l'equació segmentària del pla. (Cal recordar que és possible entrar dades en forma de fracció).



Forma de representació

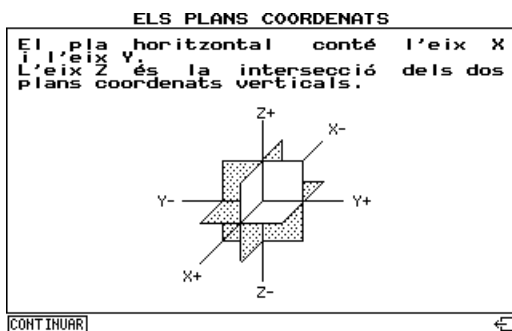
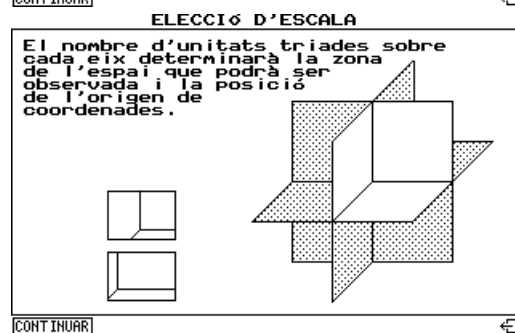
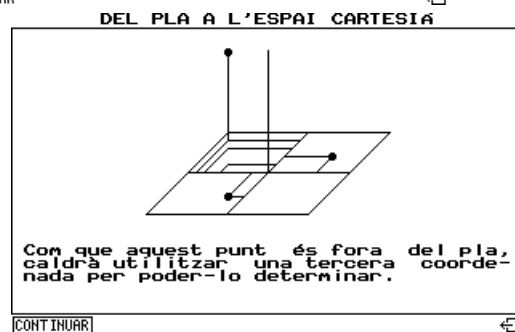
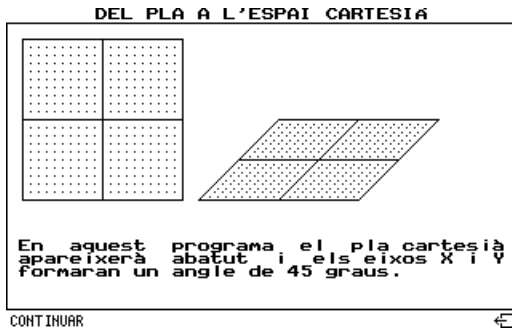
El pla queda delimitat per la seva intersecció amb els plans coordenats (rectes de color negre). L'opció PLA OMBREJAT dibuixa a més un núvol de punts blancs dintre del pla.

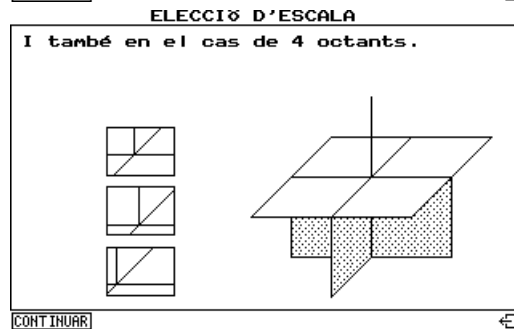
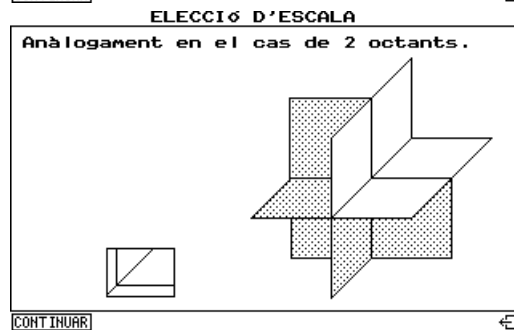
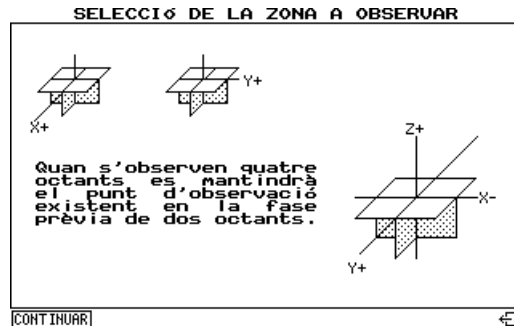
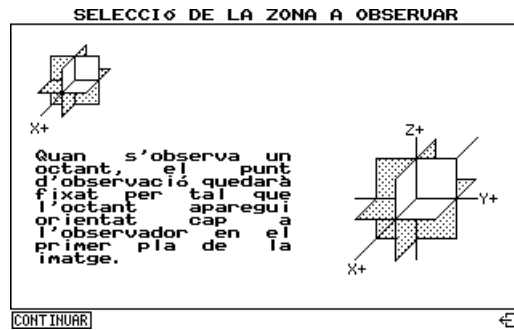
Demostració.

L'apartat DEMOSTRACIÓ del programa permet familiaritzar-se amb aquestes formes i amb l'ambient de treball i utilitzar-lo per veure diferents propostes per l'ús del programa. Aquesta opció ofereix quatre alternatives diferents:

- Del pla a l'espai cartesià.
- Els plans coordenats.
- Selecció de la zona a observar.
- Elecció d'escala.

Cada una d'aquestes demostracions és una seqüència de pantalles. El pas de cada una a la següent es realitza prenent l'opció CONTINUAR del menú del peu de pantalla. L'opció alternativa permet tornar al menú d'opcions. Figura a continuació una selecció d'imatges corresponents a diversos moments significatius de l'opció DEMOSTRACIÓ seleccionable des del menú principal.





2.3 Diagrama estructural

Un cop s'ha triat l'opció de COMENÇAMENT el programa permet continuar tal i com es detalla en el següent diagrama estructural.

- La informació proporcionada està relacionada amb la situació des de la qual es demana.
- c) Sortida.
 - De la mateixa manera s'ofereix la possibilitat de retrocedir a opcions anteriors. Per fer-ho cal utilitzar l'opció "sortida" que apareix a l'extrem inferior dret del monitor.
- d) Entrada de valors numèrics.

Pel que fa a l'entrada de valors numèrics cal assenyalar:

 - El nombre màxim de caràcters que admet és de 6.
 - Només admet aquells caràcters que puguin tenir sentit en el moment de ser avaluats.
 - Si els valors donats són fora dels límits de càlcul que preveu el programa apareix un missatge.
 - La coma decimal s'indica mitjançant un punt (".").
 - Admet fraccions. Per exemple: $5/3$, $-6/7$, etc.
 - El marc indica a quina variable s'assigna el valor introduït.
 - En cas que es vulgui esborrar, pot fer-se mitjançant la tecla de retrocés. També, si es torna a una entrada quan es tecleja un valor, queda automàticament esborrat l'anterior.
 - Per prosseguir l'execució del programa amb els valors introduïts, cal prémer ↵ quan el marc estigui emmarcant alguna de les variables del model.

3 Aspectes pedagògics

3.1 Objectius

L'observació espacial utilitzant representacions en dues dimensions és una activitat que presenta grans dificultats. Aquestes depenen de forma molt notable de l'educació visual de cada persona. Degut a això, el tractament de problemes geomètrics de tres dimensions ha trobat tradicionalment importants problemes.

L'objectiu d'aquesta unitat és dotar d'un instrument que faciliti la representació de forma ràpida i precisa dels elements geomètrics lineals de l'espai tridimensional sobre la pantalla de l'ordinador.

Aquesta eina, utilitzada a l'aula de forma adequada, permet la introducció de conceptes teòrics tals com coordenades de l'espai, octants, plans i eixos coordenats, equacions de la recta (sota les seves diverses formes) i equacions del pla.

A més, el programa pot ser un ajut eficaç en la resolució de problemes en l'espai en permetre visualitzar els elements i raonar-hi. El programa té també com a finalitat contribuir al desenvolupament de la intuïció espacial dels alumnes.

El programa utilitza unes formes pròpies de representació encaminades a facilitar la visualització d'elements i també de les coordenades dels punts o les components dels vectors orientadors. L'apartat DEMOSTRACIÓ del programa està destinat a familiaritzar-se amb aquestes formes i amb l'ambient de treball.

3.2 Metodologia d'ús

A continuació hom descriu una proposta d'utilització d'aquesta unitat. Després del concepte d'espai cartesià i del punt, hom introdueix en primer lloc la recta i seguidament el pla. Obviament aquest ordre pot ser canviat adequant-se a les explicacions del professor.

L'espai cartesià. Representació de punts.

La primera fase del treball ha de tenir com a missió l'estudi de l'espai cartesià, identificant punts de l'espai amb les seves coordenades cartesianes. Això permet que l'alumne es familiaritzi amb les formes de representació utilitzades pel programa i que conegui com utilitzar el programa. En aquesta fase pot ser d'utilitat l'opció de DEMOSTRACIÓ inclosa al programa.

La seqüència de punts que volem representar pot començar per aquells on les tres coordenades són positives i pertanyen al primer octant. És útil identificar aquells punts on algunes de les seves coordenades són nul·les i en conseqüència pertanyen als eixos o plans coordenats. Després d'aquesta fase serà útil ampliar la zona representada a dos o quatre octants, i senyalar punts on la primera o segona coordenada (o totes dues) siguin negatives.

La representació de punts on la tercera coordenada és negativa obliga a canviar de forma notable el punt d'observació. Per aquest motiu pot ser adequat obviar aquest aspecte en una primera fase.

Representació de rectes.

L'estudi de la recta pot començar amb l'opció de recta que passa per dos punts. Serà útil dibuixar prèviament els dos punts de pas que la determinen i en segon lloc representar la recta. La manera de visualització aconsellada en aquesta fase és representar només el primer octant, per tant, els punts que determinen la recta haurien de tenir totes les seves coordenades positives.

És adequat dibuixar diverses rectes seguint aquesta mateixa mecànica, intentant obtenir diferents casos: rectes que tallen els plans coordenats, un eix, etc. Una etapa posterior permetria determinar la recta fent servir l'opció "punt de pas i vector orientador". Això correspon a les formes vectorial, paramètrica i contínua de la recta. En els primers exemples pot ser adequat dibuixar prèviament el punt de pas i a més a més punts auxiliars de la recta que permetin observar la incidència dels elements que la defineixen.

A partir d'aquesta última forma de representació, es poden estudiar diferents aspectes lligats a la recta: rectes paral·leles entre elles, rectes paral·leles als eixos coordenats, rectes paral·leles als plans coordenats, feix de rectes que passen per un punt, rectes que passen per un punt i són sostingudes per una recta donada, rectes que es tallen i rectes que es creuen, etc.

Representació de plans.

La introducció del pla es pot fer de manera semblant al cas de la recta, prenent com a primera opció la recta que passa per tres punts. És convenient que els punts tinguin les tres coordenades positives. En el cas que els punts pertanyen a cada un dels eixos de coordenades, s'obtenen representacions especialment simples d'interpretació.

Un segon pas seria fer servir l'opció "punt de pas i dos vectors orientadors". Això correspon a les formes vectorial i paramètrica del pla. De la mateixa manera

que en la recta, és convenient representar prèviament el punt de pas i alguns punts auxiliars del pla que faciliten observar la incidència de cada un dels vectors orientadors del mateix.

A partir d'aquesta manera de representació es poden estudiar aspectes com: plans paral·lels entre ells, plans paral·lels als eixos coordenats, plans paral·lels als plans coordenats, feix de plans que passen per una recta comú, pla paral·lel a una recta, pla que conté una recta, etc.

Una fase posterior, lligada a la seva explicació teòrica a classe, faria ús de l'opció "equació general". Aquesta opció inclou la forma segmentària del pla, en poder introduir els coeficients en forma de fracció. És útil repetir, fent servir aquest tipus d'equació, els exercicis comentats prèviament, fent l'anàlisi de la relació entre els coeficients de l'equació i de les diferents situacions plantejades.

Recta com a intersecció de dos plans.

El programa ofereix les interseccions entre els diferents elements que es representen. Això permet, per exemple veure una recta determinada per dos plans, representant prèviament cada un d'ells i obtenint d'aquesta manera la seva intersecció. Si no es vol analitzar la relació existent entre recta i plans sinó només representar la recta serà més útil l'opció "dos plans" del menú de representacions de rectes.

Resolució de problemes.

Una etapa posterior correspon a la resolució de problemes amb l'ajut del programa. Aquest serà útil segons el tipus de problema i de les seves pròpies dades. Molt sovint serà necessari canviar el punt d'observació fins a poder obtenir aquell que permeti una millor visió dels elements que intervenen en el mateix. Alguns exercicis que es poden realitzar amb l'ajut del programa són: deduir l'equació d'una recta o d'un pla a partir de la seva representació gràfica, visualitzar els elements que apareixen en la resolució de problemes (projeccions, punts simètrics), temptejar gràficament la seva resolució, resolució gràfica d'alguns problemes independentment de la seva resolució analítica, etc.

3.3 Exemples d'ús

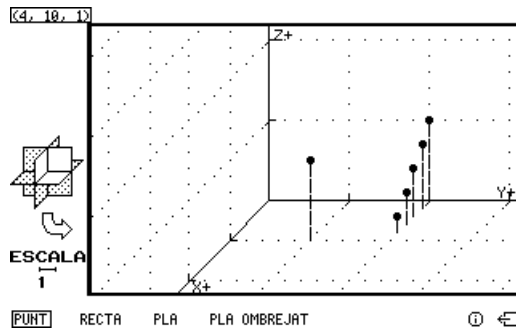
A continuació podem observar una sèrie d'exemples sobre representació de punts, rectes i plans. S'han recollit una varietat de casos que inclouen representacions en un octant, dos o quatre. L'escala triada en la majoria dels casos és la que per defecte ofereix el programa prenent 10 unitats sobre cada semieix.

Exemple 1

Zona de visió: $X+:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

Elements:

Punt (5,5,5)	Punt (0,10,5)
Punt (1,10,4)	Punt (2,10,3)
Punt (3,10,2)	Punt (4,10,1)



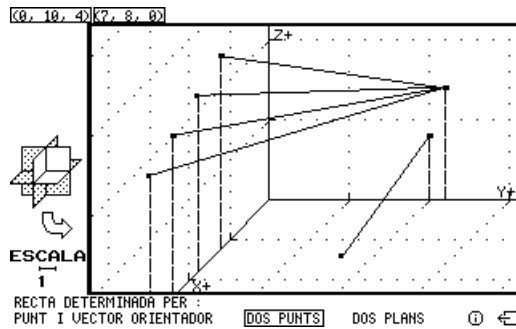
Exemple 2

Zona de visió: $X+:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

Elements:

Recta que passa pels punts: $(0,10,4)$ i $(7,8,0)$

Feix de rectes que passen pel punt: $(0,11,7)$ i que estan orientades pels vectors:
 $(6,-11,5)$, $(9,-11,4)$, $(12,-11,3)$, $(15,-11,2)$

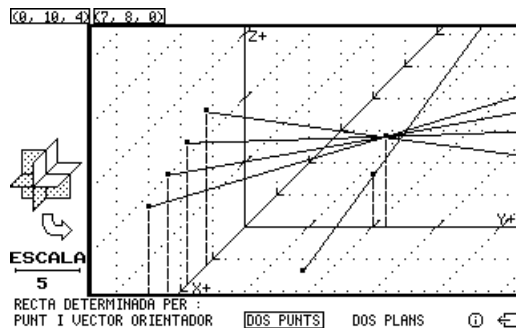


Exemple 3

Zona de visió: $X+:10$ $X-:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

Elements:

Els mateixos de l'exemple anterior

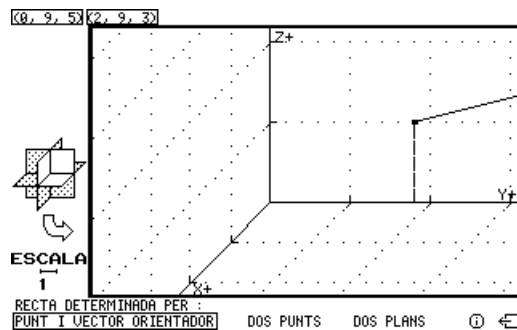


Exemple 4

Zona de visió: $X+:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

Elements:

Recta que passa pel punt $(0,9,5)$ i que està orientada pel vector: $(2,9,3)$

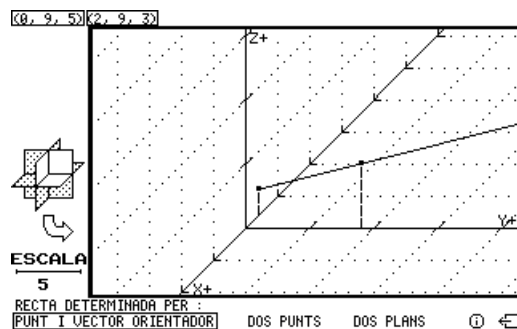


Exemple 5

Zona de visió: X+:10 X-:10 Y+:10 Z+:10

Elements:

La mateixa recta de l'exemple anterior

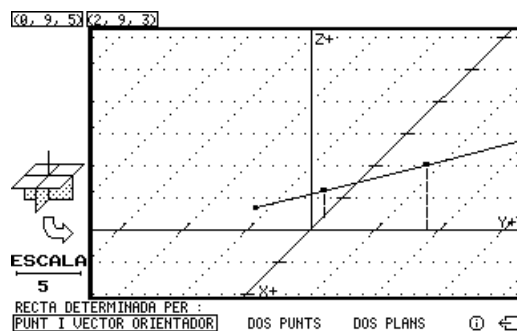


Exemple 6

Zona de visió: X+:10 X-:10 Y+:10 Y-:10 Z+:10

Elements:

La mateixa recta de l'exemple anterior



Exemple 7

Zona de visió: X+:10 Y+:10 Z+:10

Elements:

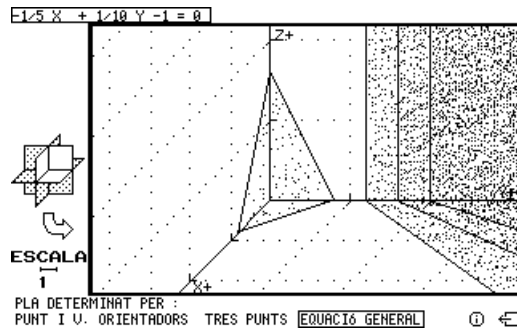
Pla d'equació: $X+Y+Z/2-4=0$

Pla d'equació: $-X/5+Y/6-1=0$

Pla d'equació: $-X/5+Y/8-1=0$

Pla d'equació: $-X/5+Y/10-1=0$

(Tots representats amb l'opció pla ombrejat)

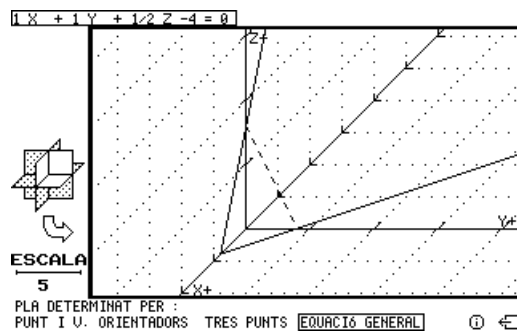


Exemple 8

Zona de visió: $X+:10$ $X-:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

Elements:

Pla d'equació: $X+Y+Z/2-4=0$



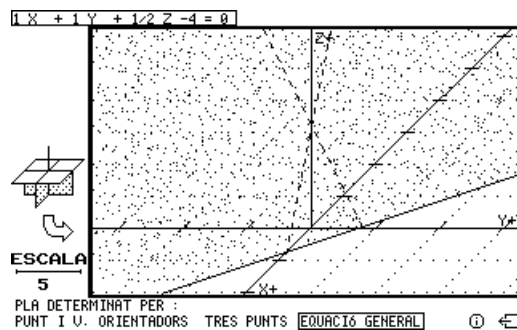
Exemple 9

Zona de visió:

$X+:10$ $X-:10$ $Y+:10$ $Y-:10$ $Z+:10$

Elements:

El pla de l'exemple anterior, representat amb l'opció pla ombrejat

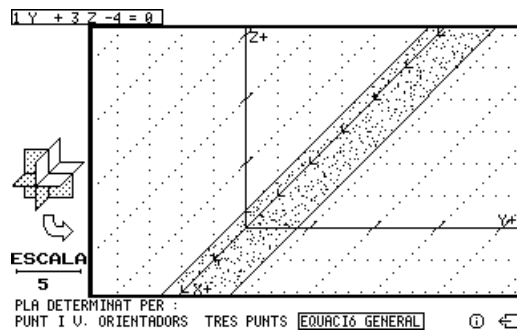


Exemple 10

Zona de visió: $X+:10$ $X-:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

Elements:

Pla ombrejat amb equació: $Y+3Z-4=0$



Exemple 11

Zona de visió: $X+:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

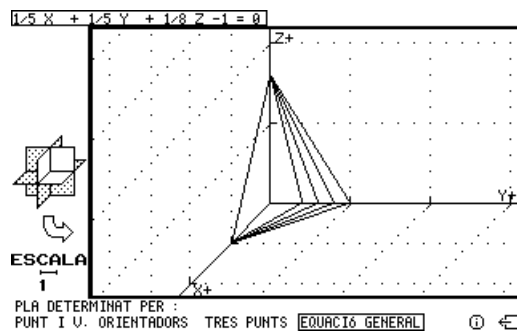
Elements:

Pla amb equació: $X/5 + Y/2 + Z/8 - 1 = 0$

Pla amb equació: $X/5 + Y/3 + Z/8 - 1 = 0$

Pla amb equació: $X/5 + Y/4 + Z/8 - 1 = 0$

Pla amb equació: $X/5 + Y/5 + Z/8 - 1 = 0$

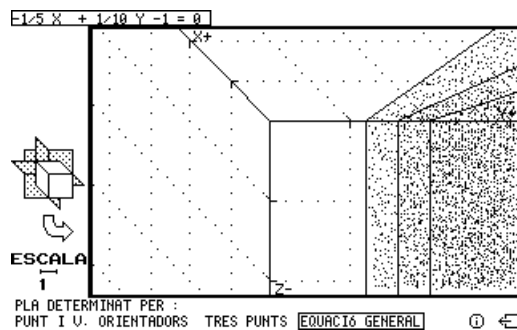


Exemple 12

Zona de visió: $X+:10$ $Y+:10$ $Z-:10$

Elements:

Els plans 2, 3 i 4 de l'exemple 7 amb un punt de vista diferent



Exemple 13

Zona de visió: $X+:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

Elements:

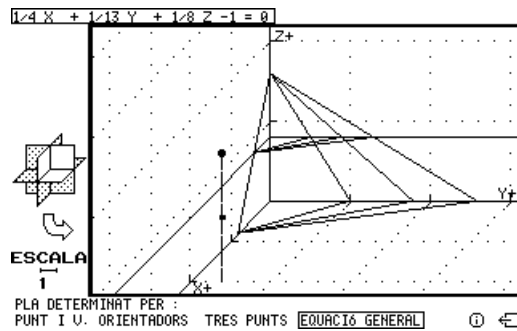
Punt (10,2,8)

Pla d'equació $Z/4-1=0$

Pla d'equació $X/4+Y/5+Z/8-1=0$

Pla d'equació $X/4+Y/9+Z/8-1=0$

Pla d'equació $X/4+Y/13+Z/8-1=0$



Exemple 14

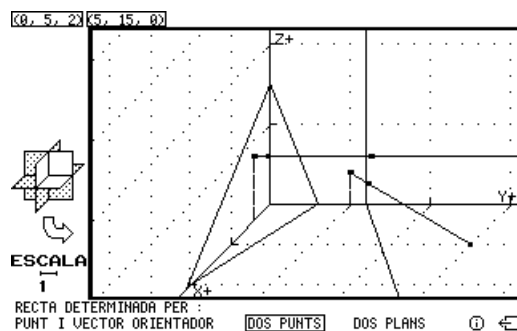
Zona de visió: $X+:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

Elements:

Pla d'equació $X/10+Y/7+Z/4=-1$

Pla d'equació $X/3+Y/4+Z/8=-1$

dibuixats amb l'opció pla ombrejat.



Exemple 15

Zona de visió: $X+:10$ $Y+:10$ $Z+:10$

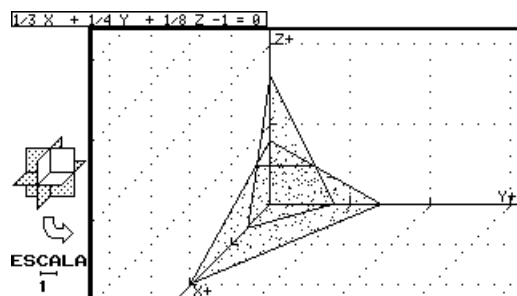
Elements:

Pla d'equació $X/7+Y/2+Z/5=-1.5$

Pla d'equació $X/9+Y/6 = -1$

Recta que passa pels punts (2,0,4) i (2,1,4)

Recta que passa pels punts (0,5,2) i (5,15,0).



PLA DETERMINAT PER :
 PUNT I V. ORIENTADORS TRES PUNTS **EQUACIÓ GENERAL** ⓘ ⇐ Aquest programa permet la representació de
 forma ràpida i precisa dels elements geomètrics lineals de l'espai tridimensional sobre la
 pantalla de l'ordinador.

Graf123

- | | |
|----------|---|
| N. | Títol |
| 1 | La recta real i el pla cartesià. |
| 2 | Funció afí. Rectes. |
| 3 | Funció quadràtica. Paràboles. |
| 4 | Representació gràfica d'una funció. |
| 5 | Composició de funcions. Deformacions gràfiques. |
| 6 | Resolució gràfica d'equacions. |
| 7 | El pla vectorial. |
| 8 | L'espai cartesià. |