Funcder

Joan Antoni Sellarès i Chiva
Programa d'Informàtica Educativa.

1. NOM DEL PROGRAMA

Funció - Funció Derivada (nom d'arxiu FUNCDER.EXE).

2. AUTOR

Joan Antoni Sellarès i Chiva

Formant part del GRUP EIX amb :Carles Bailo i Mompart
Carles Barceló i Vidal
Joaquim Castellsaguer i Guanyabens
Antoni Gomà i Nasarre
Ferran Ruiz i Tarragó

3. TEMÀTICA

Estudi de la relació entre les gràfiques d'una funció i de la seva derivada.

4. OBJECTIUS

Mostrar la construcció, per mitjà de procediments geomètrics i de forma dinàmica, de la gràfica de la funció derivada d'una funció donada a partir de l'evolució de la recta tangent a la gràfica d'aquesta.

Reconèixer les derivades de certes funcions elementals, identificant les seves gràfiques.

Observar el creixement, decreixement, concavitat i convexitat d'una funció relacionant-la amb la seva funció derivada.

5. FONAMENTACIÓ TEÒRICA

Si la funció F és derivable en x=a, l'equació de la tangent "t" a la seva gràfica en el punt P (a,F(a)) és

$$y = F'(a).(x-a) + F(a)$$

La paral·lela a "t" per l'origen de coordenades és la recta "s" d'equació $y = F'(a).x$

El punt Q d'intersecció de "s" i la recta x=1 és la solució del sistema $x = 1$

$$y = F'(a).x$$

i té per coordenades (1,F'(a)). Per aquest motiu l'ordenada de Q correspon al valor numèric de la derivada de F en a i pot utilitzar-se per construir la gràfica de F'.

6. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC

En l'exposició rigorosa del càlcul diferencial de funcions reals de variable real el concepte fonamental és el de derivada, i el concepte de tangent apareix com un auxiliar per interpretar l'anterior en termes geomètrics, i es troba teòricament subordinat a ell.
Això no obstant, en una primera aproximació a l'estudi d'aquestes qüestions la idea de tangent té una naturalitat que fa que sigui fàcil de captar i que sigui apropiada per introduir el concepte de derivada. Fins i tot aquest ha estat, històricament, un dels camins que van dur en el segle XVII a la constitució del càlcul diferencial.
El programa adopta aquest plantejament car el seu camp de treball és essencialment gràfic i no conté cap element numèric ni simbòlic.

Una altra característica deliberadament adoptada en el programa és la globalitat per oposició a la localitat; el punt de vista local és l'utilitzat, conjuntament amb els recursos de la derivació simbòlica, en el programa sobre Màxims i Mínims de Funcions, del mateix grup d'autors.

Quant als criteris de creixement i concavitat, doncs, es presenten només els intervals corresponents ometent tota menció a punts d'inflexió o extrems, que seran tractats en l'altre programa ja esmentat.
En particular una funció constant no és considerada com a creixent ni com a decreixent, i

una funció lineal no és considerada ni com a convexa ni com a còncava.

Els objectius del programa, com ja ha estat dit, són limitats : es configura com un instrument per enllaçar diversos moments de l'aprenentatge que són independents d'ell, com ara la introducció i formulació del concepte de derivada, el càlcul de derivades de funcions elementals, i l'establiment dels criteris de variació.

7. CONEIXEMENTS PREVIS

L'alumne ha de conèixer, en algun moment de l'execució del programa:

- El concepte de derivada d'una funció en un punt.
-_La interpretació de la derivada d'una funció en un punt com el pendent de la recta tangent en aquest punt a la seva gràfica.
-_La relació entre el pendent d'una recta i la tangent trigonomètrica de l'angle que forma amb l'eix d'abscisses.
-_El concepte de funció derivada.
-_Els conceptes de creixement, decreixement, concavitat i convexitat d'una funció.
-_Les gràfiques d'algunes funcions elementals.
- Les derivades de les funcions elementals.

8. NIVELL

El programa és destinat als alumnes del curs (actualment Segon o Tercer de B.U.P.) en el qual es faci l'estudi de la funció derivada d'una funció i de les seves propietats en relació a la variació de la funció original.

9. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA

La introducció del concepte de derivada es fa, generalment, des d'un punt de vista numèric: hom defineix "derivada d'una funció en un punt" com un nombre real, del qual pot donar-se una interpretació geomètrica. El pas a la funció derivada ha de fer- se , en aquesta òptica, definint-la com a funció que en cada punt pren el valor anteriorment calculat, i prescindint de la interpretació geomètrica que tornarà a evocar-se, més endavant, quan hom emprengui l'estudi dels criteris de variació.

El programa, en una primera utilització, pretén omplir aquesta discontinuïtat en la presentació, proporcionant una construcció de la funció derivada a partir de la interpretació geomètrica que pugui complementar la rigorosa - i ineludible - formulació numèrica.

En primer lloc cal introduir la funció que volem estudiar, i apareixerà representada respecte una referència centrada a la meitat esquerra de la pantalla. Hom representa també, en un color diferent, la recta x=1. Aquesta recta estableix un criteri, ni que sigui aproximat, per a la imprescindible graduació dels eixos.

Els exemples que hom utilitzi en aquesta fase no han d'ésser necessàriament funcions conegudes per l'alumne, sinó que és millor escollir-los de la forma convenient perquè el procés de construcció de tangents pugui portar-se a terme en nombrosos punts i resulti variat i eficaç. Cal evitar, doncs, d'entrada els exemples desorientadors com els corresponents a funcions lineals, i exemples poc efectius com poden ésser els de funcions amb discontinuïtats o de variació molt ràpida.

Per a un cert conjunt de punts regularment espaiats de la gràfica té lloc llavors el procés constructiu fonamental:

1. Traçat de la tangent a la gràfica en el punt.
2. Translació d'aquesta tangent fins a l'origen de coordenades.
3. Intersecció amb la recta x=1.
4. Transport de l'ordenada del punt d'intersecció fins a una referència centrada a la meitat dreta de la pantalla.
5. Representació, en aquesta referència, del punt corresponent.

Els fonaments d'aquest procés han d'haver estat prèviament exposats als alumnes, i en el moment en què es realitzi en pantalla cal recordar-los apropiadament. Per fer-ho és possible detenir l'execució quan sigui necessari i continuar-la posteriorment.
És convenient que, passat el primer exemple, l'alumne pugui conjecturar, observant la gràfica, els moviments que seguiran i apreciar aproximadament la magnitud i l'orientació del segment representatiu de la derivada. Així podrà posar-se de manifest la forma en què la derivada mesura el concepte intuïtiu de "pendent" i la relació entre el creixement i el signe de la derivada que és objecte d'una part posterior del programa.
Un cop obtinguts diversos punts de la gràfica de la funció derivada, aquesta és traçada íntegrament en la referència de la dreta; en cas que el nombre de punts obtinguts hagi estat petit aquest traçat pot ésser difícil de conjecturar i els alumnes poden quedar-ne sorpresos.

Durant aquesta fase i a mesura que els exemples vagin variant- se, podrà remarcar-se la complexitat del concepte de tangent : des del cas en què probablement ha aparegut per primer cop (cercle), passant pels seus anàlegs formals (paràboles) fins als casos en què la tangent talla a la gràfica una o més vegades, o a aquells en què s'hi confon. Això fa necessari definir rigorosament la tangent a partir de la derivada, i no a l'inrevés.

Pot suscitar-se també, amb exemples adequats , el problema de les tangents verticals. Si bé, evidentment, no són representades, en alguns punts la derivada es fa molt gran i el procés ha d'interrompre's abans del pas 3, i de reprendre's en el punt seguent. Pot així conjecturar-se l'existència de punts amb tangent vertical, en els quals la funció derivada es fa infinita (i que són una bona ocasió per recordar les propietats de la tangent trigonomètrica). La identificació d'aquests punts pertany a una fase posterior de l'aprenentatge, en la qual es fa ús de la derivació simbòlica.

Una segona utilització del programa té lloc quan cal procedir a l'obtenció de les funcions derivades de les funcions elementals. Abans que siguin deduïdes formalment, poden ésser reconegudes pels alumnes mitjançant l'execució del programa, si bé aquesta constatació no pot suplir la demostració, generalment més complexa .

Els exemples utilitzats en aquest context han d'ésser molt concrets, car la seva efectivitat exigeix que les gràfiques de la funció i de la funció derivada siguin relativament familiars a l'alumne. Malgrat aquesta limitació, pot conduir a reflexions interessants: per exemple, l'existència de funcions amb un domini més restringit del que pot tenir, autònomament, la seva funció derivada, com és el cas del logaritme; o una suggestiva explicació del fet que les funcions F(x) i F(x)+c, on c és constant, tinguin la mateixa derivada.

La tercera aplicació important del programa rau en la visualització global de les zones de creixement i de concavitat, i és bastant posterior a les altres en el procés d'aprenentatge.

Un cop construïda la gràfica de la funció derivada, pot demanar- se l'opció "estudi de creixement i decreixement". Llavors apareixen de color diferent els punts de la gràfica de F en què aquesta és creixent o decreixent i, correlativament, els punts de la gràfica de F' en què aquesta és positiva o negativa, el que permet estudiar la concordança entre les dues diferenciacions.
Els criteris que sustenten aquesta relació poden haver estat intuïts, com s'ha dit abans, en el procés de construcció, i han d'ésser demostrats independentment; el programa pot contribuir a obtenir-los per observació i, posteriorment, a efectuar-ne les comprovacions que semblin pertinents.

Han de fer-se, en aquesta fase, dues precisions importants:

-_El programa, essent de naturalesa global, no informa amb precisió del comportament de la funció en punts particulars: per exemple, no individualitza els extrems relatius ni qualsevol altre punt aïllat de derivada zero. Quan la funció té derivada zero en tots els punts, les zones de creixement i decreixement no són indicades.

-_La relació entre les dues gràfiques ha d'ésser llegida correctament, és a dir de dreta a esquerra o de F' a F, i el professor ha de vetllar perquè els alumnes no caiguin en la natural temptació d'admetre la seva equivalència. Com que les excepcions a aquesta equivalència són sempre puntuals i pels motius indicats en l'observació anterior, el programa no pot efectuar la distinció necessària.

És convenient emprar aquesta part del programa per a diverses funcions amb un nombre progressivament creixent de zones de creixement i de decreixement, i cal vigilar que cadascuna d'elles sigui prou visible, car, si la discretització a què ha estat sotmesa la gràfica les reduís a un punt, la seva interpretació es faria molt dificultosa.

Tot l'anterior és vàlid, canviant el que calgui, per a les qüestions de concavitat i convexitat. Hi existeix, però, un inconvenient addicional que fa que no sigui aconsellable el seu ús fins a tenir una idea clara dels conceptes que s'investiguen i dels criteris que els determinen. Es tracta de la no aparició en pantalla de F'', el que fa que les seves propietats hagin d'ésser "llegides" en la gràfica de F', que actua com a intermediària. Així, haurà d'observar-se que un punt en què F és còncava correspon a un punt en què F' és creixent, el qual, segons ja s'ha de saber, correspon a un punt en què F'' és positiva. Tot això exigeix als alumnes cert esforç de reflexió.

10. INSTRUCCIONS I COMENTARIS DE FUNCIONAMENT

El programa es posa en marxa escrivint el seu nom FUNCDER.

L'usuari només ha d'introduir la funció F d'acord amb les regles exposades en les "Normes per a l'escriptura de funcions". Donat que l'expressió simbòlica de F' i F'' ha d'ésser calculada malgrat que no aparegui en pantalla, és imprescindible que l'expressió de F no contingui cap nom de funció no derivable en algun punt, com ara INT o ABS, encara que en l'interval en què es treballa la funció sigui efectivament derivable. Són, en canvi, admissibles funcions amb discontinuïtats infinites com ara TAN(X) o 1/X, o que tinguin en algun punt derivada infinita com és el cas de l'arrel cúbica.

L'escala a què són representades les gràfiques és fixada pel programa atenent al fet que la recta X=1 sigui visible, però pot ésser canviada per l'usuari mentre es mantingui aquesta restricció. Aquest canvi pot efectuar-se abans o després de la construcció de la gràfica de la funció derivada i pot servir per a millorar el nombre de punts visibles, l'amplada de les zones de creixement i concavitat, o altres característiques que hom cregui convenient.

11. ANEX: Normes d'introducció de funcions per teclat

Alguns dels programes del grup EIX (FUNCDER, ITER, PARAMETR, GRAFICAC i POLAR) i el programa DERIVA inclouen una subrutina específica d'avaluació de funcions entrades des de teclat. Aquesta subrutina permet entrar una funció com una cadena de caràcters (string) en un programa BASIC i calcular els seus valors numèrics per als valors de la variable que siguin del domini o poder rebre un missatge explicatiu per als que no siguin del domini.

A més, aquesta subrutina possibilita:

* La inclusió de funcions que el BASIC no contempla directament.

* L'entrada de funcions amb el llenguatge "usual" de les matemàtiques, és a dir, sobre tot, escriure-les evitant signes de producte i determinats parèntesis en arguments de funció, tal com ho fem en l'escriptura ordinària quan no hi ha confusió.

ELEMENTS PERMESOS EN L'ESCRIPTURA DE LA FUNCIÓ:

Podem usar en l'escriptura de la funció els següents elements:

* Parèntesis, oberts i tancats.
* Signes aritmètics: + - * / ^ amb els resultats usuals (suma, diferència, producte, quocient, potenciació) però amb les possibilitats d'omissió que s'expliquen més avall.

* La variable, escrita en majúscula o en minúscula (ja sigui X, A, T, segons ho indiqui el programa de què es tracti).

* Noms de funcions elementals amb els codis que s'expliquen seguidament. Podran anar descrites en majúscules o en minúscules.

Trigonomètriques: el sinus, escrit SIN
el cosinus, COS
la tangent, TAN o bé TG

Trigonomètriques inverses:
l'arc sinus, ASN o bé ARCSIN
l'arc tangent, ATN, ARCTG o bé ARCTAN

Hiperbòliques: sinus hiperbòlic, SINH
cosinus hiperbòlic, COSH
tangent hiperbòlica, TANH o bé TGH

Logaritme neperià: LN o bé LOG

Funció exponencial de base e: EXP o bé e^

Arrels: arrel quadrada, SQR
arrel d'índex n, ARn (n_N, n_2)
exemples: AR3, AR8, AR23, ...

Aritmètiques: part entera, INT
signe, SGN
valor absolut, ABS

L'argument de la funció no caldrà escriure'l entre parèntesis si no hi ha confusió, com s'explica més avall.

* Números en notació decimal (però, la , i la ' són admeses com a punt decimal si hom ha controlat abans l'entrada de la cadena adequadament) o científica i, a més, e i PI s'admeten entrats així (en majúscules o minúscules) perquè representen les que segurament són les dues constants més importants de les matemàtiques.

Entre un element i un altre es poden posar espais en blanc que facilitin l'escriptura... però no en mig d'un nom de funció ni, naturalment, en mig d'un número.

NORMES PER L'ESCRIPTURA DE LES FUNCIONS:

L'avaluador permet entrar la funció en una forma molt semblant a com s'escriuria a la classe o l'escriuen els textos.

Tanmateix, hi ha una limitació que no podrem pas salvar: la cadena de caràcters representativa de la funció haurà de ser escrita "en un sol nivell". No valdran subíndexs o exponents ni fraccions amb una expressió damunt de la línia i una altra a sota. És per això que es recomana emprar els parèntesis per a explicitar clarament qualsevol expressió on hi hagi possibilitat de confusió amb el signe ^ de potència.

En relació amb l'entrada de funcions en BASIC o altres llenguatges de programació, aquestes són les diferències fonamentals:

Podem ometre el signe * quan no hi hagi confusió però procurarem escriure en els productes on un factor sigui numèric aquest al davant.

Exemples:

Podem escriure 3x enlloc de 3*x, però no x3 en lloc de x*3; podem entrar 5x^3+4x^2+7x per indicar allò que en BASIC seria 5*x^3+4*x^2+7*x o també 5xsin(x) per a indicar 5*x*sin(x) i, a més ...

Podem ometre els parèntesis per a l'argument de la funció quan no hi hagi confusió.

I, doncs, podrem escriure 5x sinx per a indicar 5*x*sin(x) i, combinant tot això, podrem escriure per exemple una expressió com és ara cos4x + 7x Ln3x per a indicar allò que en BASIC escriuríem com a cos(4*x)+7*x*LOG(3*x).

Tanmateix convé aclarir que una expressió com sin x ln x s'interpreta com sin (x)*log(x) i que si hom vol entrar la funció sin (x ln x) cal emprar els parèntesis per a indicar l'argument de la funció, exactament com es faria en l'escriptura ordinària.

Podem ometre els parèntesis per a un denominador o un exponent que siguin productes.

Exemples:

No ens caldrà escriure 4/(5*x) o bé 4/5/x per a indicar *(fòrmula 1)* sinó que podrem posar 4/5x.

També podem escriure 2^xsinx per indicar 2^(x*sin(x)). Cal observar que aquesta norma "xoca" amb la que indica que la ^ té precedència envers el producte. És per això que ja anteriorment s'ha recomanat l'ús dels parèntesis si hom veu confusió quan s'usa ^. En aquest sentit serà recomanable, per evitar confusions, escriure l'expressió que ara comentem com 2^(xsinx).

Aquesta recomanació ja serà d'ús obligat per escriure una exponencial "de tres pisos": caldrà que usem els parèntesis que indiquin prioritats.

#	Pel que fa a la relació entre el signe de potència i els arguments de les funcions convé dir que si no són permeses expressions tals com sin^2x, cos^24x (i tampoc sin^2(x) o coses semblants que hom pogués imaginar) per a indicar (sin x)^2 o bé (cos4x)^2.
Ara, el càlcul de les funcions té precedència respecte la potenciació i, doncs, si escrivim sinx^2, igual com passa en BASIC, es calcularà (sin x)^2. També podrem escriure cos 4x ^2 per tal que es calculi (cos 4x)^2.

Tanmateix, com es feia en el cas de potències i productes, és possible emprar sempre que es vulgui els parèntesis per evitar confusions.