Representació de funcions en forma polar

Joaquim Castellsaguer i Guanyabens
Programa d'Informàtica Educativa, 1988.

1. ESPECIFICACIONS GENERALS

1.1 NOM DEL PROGRAMA

Representació de funcions en forma polar (nom d'arxiu POLAR.EXE)

1.2 AUTOR

Joaquim Castellsaguer i Guanyabens, formant part del Grup EIX amb Carles Bailo i Mompart, Carles Barceló i Vidal, Antoni Gomà i Nasarre, Ferran Ruiz i Tarragó i Joan Antoni Sellarès i Chiva

1.3 TEMÀTICA

Representació gràfica de corbes del pla definides a partir de les equacions paramètriques X=R(A)COS(A), Y=R(A)SIN(A), per A_[A1,A2].

1.4 NIVELL

És d'aplicació sobretot dins de l'àmbit de l'assignatura de Matemàtiques tot i que pot resultar útil per altres disciplines com ara la Mecànica i, fins i tot, el Dibuix Tècnic.

El programa és d'aplicació en qualsevol tema -sigui de B.U.P., C.O.U. o F.P. - en que resulti necessari l'estudi d'alguna corba definida en forma polar.

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

El programa consta d'un únic mòdul el qual es limita a representar gràficament en una mateixa referència polar una o més corbes, fins un màxim de 10 .

El programa es posa en marxa amb el seu nom POLAR. Per abandonar definitivament l'execució del programa cal prémer la tecla de funció F1 .

2.1 Introducció de funcions.

2.1.1 L'usuari ha d'introduir l'equació R=R(A) de la corba a representar d'acord amb les regles exposades al plec de documentació "Normes per a l'escriptura de funcions". Hom farà servir el caràcter A (o a) per simbolitzar el paràmetre angular o argument.

2.1.2 En cas d'error en la introducció de l'expressió de R(A), el programa reclamarà una nova entrada per part de l'usuari.

2.1.3 Una vegada introduïda l'expressió de R(A) l'usuari introduirà l'interval [A1,A2] de variació del paràmetre A. El programa es limita a controlar que A2 sigui major que A1.

2.1.4 Quan ha acabat la representació, l'usuari pot prolongar-la, si li sembla convenient, a un nou interval [A2,A3] de valors d'A consecutiu a l'anterior.

2.2 Tipus de representació.

2.2.1 La finestra on es representa la funció té forma circular, centrada en el pol, i en ella està traçat i graduat l'eix polar.

2.2.2 No cal preocupar-se de les qüestions relatives al domini de definició o al camp d'existència de la funció R(A). El programa es limita a representar -dins del camp d'existència de la funció restringit a l'interval [A1,A2] introduït per l'usuari- tots els punts de la corba que resultin visibles dins la finestra.

2.2.3 La representació s'efectua punt a punt. En cada punt que es representa, el programa calcula la derivada de la funció R(A) per tal d'avaluar la magnitud de l'element d'arc de la corba i, d'aquesta manera, decidir l'increment que cal donar al paràmetre A per tal que la gràfica no presenti "buits" notables que la desvirtuïn. Això fa que la representació pugui semblar lenta.
Tot i això, quan un fragment de la gràfica es desenvolupi sense una variació perceptible del paràmetre A, com en el cas de les branques asimptòtiques que passin pel pol, és possible que quedin arcs de corba sense representar.

2.2.4 El programa fa recórrer al valor del paràmetre A tot l'interval de representació [A1,A2] decidit per l'usuari, independentment de si aquells valors corresponen o no a punts de la corba visibles dins la finestra gràfica de la pantalla. Per tant, els períodes durant els quals el programa estigui considerant valors d'A corresponents a punts no visibles, pot donar la falsa impressió que el programa està aturat. Prement la tecla de funció F2 hom pot obtenir informació del valor del paràmetre A que el programa està considerant i del valor R(A) corresponent.

També té utilitat la tecla d'interrupció del dibuix F2 quan, per una inadequada elecció de l'interval de representació, el programa estigui re-dibuixant un arc de corba ja representat prèviament.
Després d'una interrupció del dibuix el programa ofereix la possibilitat de reemprendre'l en el mateix punt o d'abandonar-lo en l'estat en què es troba.

2.3 Escala de representació. Canvis d'escala i de referència.

2.3.1 El programa escull inicialment una escala de representació que assigna 25 punts de pantalla a la unitat de mesura i gradua l'eix polar de 1 en 1.

2.3.2 El programa ofereix a l'usuari la possibilitat de canviar l'escala de representació mitjançant la introducció d'un factor K de canvi d'escala -enter, decimal o fraccionari- que fa que el nombre de punts de la unitat de mesura quedi multiplicat per aquest factor K . La graduació de l'eix és adaptada convenientment per tal de tenir una visió permanent de l'escala de representació en que s'està treballant. En una de les quatre cantonades de la finestra gràfica apareix indicat el valor de la graduació de l'eix polar.

2.3.3 No és possible modificar la posició del pol de forma que deixi de coincidir amb el centre de la finestra.

2.3.4 El canvi d'escala s'ofereix abans i després de la representació gràfica de qualsevol corba.

2.3.5 Després de tot canvi, es reprodueixen totes les gràfiques presents en el moment del canvi.

2.4 Representació de punts particulars.

2.4.1 L'usuari pot representar un punt qualsevol de la gràfica de la funció que en aquell moment s'està tractant mitjançant la introducció del corresponent valor de l'argument A. El programa proporciona el valor del radi R(A) i representa gràficament el punt corresponent sempre que aquest sigui visible.
No hi ha cap control de que l'argument demanat pertanyi efectivament a l'interval [A1,A2].

2.4.2 Aquesta possibilitat de representació de punts particulars s'ofereix tant abans com després de cada representació gràfica i fins i tot en el cas que, a resultes d'un canvi d'escala, hagin d'ésser representades novament totes les gràfiques.

2.4.3 Tal com s'ha comentat abans, en el decurs de la representació d'una corba, prement F2 hom obté informació sobre el valor de l'argument A que en aquell moment s'està considerant així com del valor del radi R(A) del punt corresponent. Si aquest és visible dins la finestra gràfica, és ressaltat amb la representació d'una minúscula circumferència.

2.5 Trama

El programa ofereix la possibilitat de representar una trama dins la finestra gràfica per tal de facilitar la millor localització dels punts a través de llurs coordenades. Aquest

oferiment és realitza després de cada representació gràfica i sempre i quan la trama no estigui ja representada.
La trama està formada per punts que tenen per radi cadascuna de les divisions visibles de l'eix polar i arguments múltiples de 15 graus sexagesimals.

2.6 Errors d'introducció

2.6.1 El programa realitza un control immediat dels valors numèrics i caràcters entrats per l'usuari. Si es detecta un error en la introducció, l'ordinador esborra en la pantalla el valor introduït i reclama novament la introducció del nou valor o caràcter.

2.6.2 El programa no informa del tipus d'error comés per l'usuari. Els errors més habituals que es poden cometre són:

- Entrar un caràcter diferent a l'esperat pel programa.
- Escriure incorrectament un valor numèric.
- Introduir un valor negatiu o nul del factor K de canvi d'escala.
- Prémer únicament la tecla *Retorn* com a resposta a la demanda d'entrada d'un valor numèric.

3. ASPECTES PEDAGÒGICS.

3.1 PRECISIONS CONCEPTUALS

Les coordenades polars dels punts del pla són un nombre real A (argument) i un nombre real positiu R (radi vector). Estrictament, doncs, la definició d'una funció R(A) en coordenades polars ha de tenir el recorregut inclós en els nombres reals positius.

Donada una tal R(A), les equacions X=R(A)cos(A), Y=R(A)sin(A) són les equacions paramètriques, amb paràmetre A, d'una corba del pla cartesià. Però aquestes equacions no precisen, per a llur definició, que els R(A) siguin positius i tenen sentit mentre R(A) estigui definit. La restricció a valors positius de R correspon, doncs, a la interpretació d'aquestes equacions paramètriques en termes de coordenades polars.

El programa dóna prioritat a l'aspecte paramètric sobre el polar, i admet en conseqüència valors negatius de R, amb l'objectiu de conservar l'aspecte tradicional de nombroses corbes clàssiques fàcilment descriptibles en termes de R i A.

3.2 IMPLEMENTACIÓ CURRICULAR

En l'actual pla d'estudis d'ensenyament secundari existeix un espai reservat a la introducció de les coordenades polars. Aquesta part acostuma a quedar aïllada en la ubicació què se li dóna, i com a molt pot relacionar-se amb la representació i estudi dels nombres complexos (que exigeix la introducció de l'exponencial complexa per tal de justificar plenament la connexió) i amb els conceptes de mòdul i argument d'un vector.

Dins de l'actual marc de tercer curs de Batxillerat, on el programa oficial situa les coordenades polars, hi ha altres centres d'atenció amb els què és fàcil establir relacions: es tracta de l'estudi analític de funcions, d'una banda, i de les equacions de les còniques, de l'altra. La forma polar de les còniques és un potent element unificador de les presentacions d'aquestes i constitueix, si de cas es planteja, l'únic exemple de funcions definides en forma polar que els alumnes poden veure. Aquest exemple, però, queda desvinculat de l'estudi analític que es fa només per a les funcions en coordenades cartesianes explícites Y=F(X).

Certament, el tractament analític de les funcions en coordenades polars ha estat tant de temps descurat que molts professors de matemàtiques es troben mancats de la mínima "flaire" que els orienti davant d'una equació R=R(A). Totes les qüestions de domini, periodicitat, valors extrems, asímptotes, etc. necessiten un replantejament en aquesta nova situació. El programa no pretén ensenyar aquest tema; tan sols vol ser una eina que permeti l'experimentació i l'exploració en aquest camp per tal d'adquirir més familiaritat amb els fenòmens que s'hi produeixen.

3.3 OBJECTIU GENERAL

L'únic objectiu que persegueix el programa és el de facilitar la representació gràfica clara i acurada de qualsevol corba plana definida paramètricament.

3.4 CONEIXEMENTS PREVIS

L'únic requeriment és la familiarització amb el concepte de coordenades polars i amb la forma d'escriure les funcions i expressions algebraiques.

3.5 METODOLOGIA D'ÚS

En tractar-se d'un programa que està pensat més com una eina d'ajuda en un moment determinat que no pas per desenvolupar un tema en concret del currículum escolar, no es pot parlar d'una metodologia específica del seu ús a classe.

4. EXEMPLES

Recta $y=mx+n$	R=n/(sin(a)-m*cos(a))	0,pi
Cercle $x^2+y^2=m$	R=m	0,2*pi
E lipse $x^2/m^2+y^2/n^2=1$	R=(n^2/m)/(1+e*cos(a))	0,2*pi
Hipèrbola $x^2/m^2-y^2/n^2=1$	R=(n^2/m)/(1-e*cos(a))	0,2*pi
Cissoide de Diocles	R=tan(a)*sin(a)	0,pi
Estrofoide de Barrow	R=cos(2*a)/cos(a)	0,pi
Trisectriu de MacLaurin	R=sin(3*a)/sin(2*a)	0,pi
Lemniscata de Bernoulli	R=sqr(cos(2*a))	0,2*pi
Concoides	R=m+n/cos(a)	0,2*pi
Cargols de Pascal	R=m+n*cos(a)	0,2*pi
Cardioide	R=1+cos(a)	0,2*pi
Deltoide		R=2*sin(a)+sin(2*a) 0,2*pi
Cocleoide	R=sin(a)/a	0,2*pi
Quadratriu	R=a/sin(a)	0,2*pi
Nefroide	R=sqr(1+3*(sin(a))^2)	0,2*pi
Roses de Grandi de k pètals (k imparell)	R=cos(k*a)	0,pi
Roses de Grandi de k	R=cos(k/2*a)	0,2*pi

pètals (k parell)		
Espiral d'Arquímedes	R=a	
Espiral de Fermat	R=sqr(a)	
Espiral hiperbòlica	R=1/a	
Lituus	R=1/sqr(a)	-6,6

5. ANEX: Normes d'introducció de funcions per teclat

Alguns dels programes del grup EIX (FUNCDER, ITER, PARAMETR, GRAFICAC i POLAR) i el programa DERIVA inclouen una subrutina específica d'avaluació de funcions entrades des de teclat. Aquesta subrutina permet entrar una funció com una cadena de caràcters (string) en un programa BASIC i calcular els seus valors numèrics per als valors de la variable que siguin del domini o poder rebre un missatge explicatiu per als que no siguin del domini.

A més, aquesta subrutina possibilita:

* La inclusió de funcions que el BASIC no contempla directament.

* L'entrada de funcions amb el llenguatge "usual" de les matemàtiques, és a dir, sobre tot, escriure-les evitant signes de producte i determinats parèntesis en arguments de funció, tal com ho fem en l'escriptura ordinària quan no hi ha confusió.

ELEMENTS PERMESOS EN L'ESCRIPTURA DE LA FUNCIÓ:

Podem usar en l'escriptura de la funció els següents elements:

* Parèntesis, oberts i tancats.
* Signes aritmètics: + - * / ^ amb els resultats usuals (suma, diferència, producte, quocient, potenciació) però amb les possibilitats d'omissió que s'expliquen més avall.

* La variable, escrita en majúscula o en minúscula (ja sigui X, A, T, segons ho indiqui el programa de què es tracti).

* Noms de funcions elementals amb els codis que s'expliquen seguidament. Podran anar descrites en majúscules o en minúscules.

Trigonomètriques: el sinus, escrit SIN
el cosinus, COS
la tangent, TAN o bé TG

Trigonomètriques inverses:
l'arc sinus, ASN o bé ARCSIN
l'arc tangent, ATN, ARCTG o

bé ARCTAN

Hiperbòliques: sinus hiperbòlic, SINH
cosinus hiperbòlic, COSH
tangent hiperbòlica, TANH o bé TGH

Logaritme neperià: LN o bé LOG

Funció exponencial de base e: EXP o bé e^

Arrels: arrel quadrada, SQR
arrel d'índex n, ARn (n_N, n_2)
exemples: AR3, AR8, AR23, ...

Aritmètiques: part entera, INT
signe, SGN
valor absolut, ABS

L'argument de la funció no caldrà escriure'l entre parèntesis si no hi ha confusió, com s'explica més avall.

* Números en notació decimal (però, la , i la ' són admeses com a punt decimal si hom ha controlat abans l'entrada de la cadena adequadament) o científica i, a més, e i PI s'admeten entrats així (en majúscules o minúscules) perquè representen les que segurament són les dues constants més importants de les matemàtiques.

Entre un element i un altre es poden posar espais en blanc que facilitin l'escriptura... però no en mig d'un nom de funció ni, naturalment, en mig d'un número.

NORMES PER L'ESCRIPTURA DE LES FUNCIONS:

L'avaluador permet entrar la funció en una forma molt semblant a com s'escriuria a la classe o l'escriuen els textos.

Tanmateix, hi ha una limitació que no podrem pas salvar: la cadena de caràcters representativa de la funció haurà de ser escrita "en un sol nivell". No valdran subíndexs o exponents ni fraccions amb una expressió damunt de la línia i una altra a sota. És per això que es recomana emprar els parèntesis per a explicitar clarament qualsevol expressió on hi hagi possibilitat de confusió amb el signe ^ de potència.

En relació amb l'entrada de funcions en BASIC o altres llenguatges de programació, aquestes són les diferències fonamentals:

Podem ometre el signe * quan no hi hagi confusió però procurarem escriure en els productes on un factor sigui numèric aquest al davant.

Exemples:

Podem escriure 3x enlloc de 3*x, però no x3 en lloc de x*3;

podem entrar 5x^3+4x^2+7x per indicar allò que en BASIC seria 5*x^3+4*x^2+7*x o també 5xsin(x) per a indicar 5*x*sin(x) i, a més ...

#	Podem ometre els parèntesis per a l'argument de la funció quan no hi hagi confusió.

I, doncs, podrem escriure 5x sinx per a indicar 5*x*sin(x) i, combinant tot això, podrem escriure per exemple una expressió com és ara cos4x + 7x Ln3x per a indicar allò que en BASIC escriuríem com a cos(4*x)+7*x*LOG(3*x).

Tanmateix convé aclarir que una expressió com sin x ln x s'interpreta com sin (x)*log(x) i que si hom vol entrar la funció sin (x ln x) cal emprar els parèntesis per a indicar l'argument de la funció, exactament com es faria en l'escriptura ordinària.

#	Podem ometre els parèntesis per a un denominador o un exponent que siguin productes.

Exemples:

No ens caldrà escriure 4/(5*x) o bé 4/5/x per a indicar *(fòrmula 1)* sinó que podrem posar 4/5x.

També podem escriure 2^xsinx per indicar 2^(x*sin(x)). Cal observar que aquesta norma "xoca" amb la que indica que la ^ té precedència envers el producte. És per això que ja anteriorment s'ha recomanat l'ús dels parèntesis si hom veu confusió quan s'usa ^. En aquest sentit serà recomanable, per evitar confusions, escriure l'expressió que ara comentem com 2^(xsinx).

Aquesta recomanació ja serà d'ús obligat per escriure una exponencial "de tres pisos": caldrà que usem els parèntesis que indiquin prioritats.

#	Pel que fa a la relació entre el signe de potència i els arguments de les funcions convé dir que si no són permeses expressions tals com sin^2x, $cos^2 4x$ (i tampoc sin^2(x) o coses semblants que hom pogués imaginar) per a indicar (sin x)^2 o bé (cos4x)^2.
Ara, el càlcul de les funcions té precedència respecte la potenciació i, doncs, si escrivim sinx^2, igual com passa en BASIC, es calcularà (sin x)^2. També podrem escriure cos 4x ^2 per tal que es calculi (cos 4x)^2.

Tanmateix, com es feia en el cas de potències i productes, és possible emprar sempre que es vulgui els parèntesis per evitar confusions.