

Geometria analítica del pla

Joan Antoni Sellarés i Chiva

Programa d'Informàtica Educativa, 1988.

1. NOM DEL PROGRAMA
2. AUTOR
3. TEMÀTICA
4. OBJECTIUS
5. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC
6. CONTEXT
7. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA
8. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA
9. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT
10. EXEMPLES

1. NOM DEL PROGRAMA

GEOMETRIA ANALÍTICA DEL PLA

2. AUTOR

Joan Antoni Sellarés i Chiva

3. TEMÀTICA

Resolució de problemes de geometria afí i euclidiana del pla.

4. OBJECTIUS

Posar a disposició dels alumnes i del professor una eina, de càlcul i gràfica, per a resoldre problemes de geometria analítica del pla.

Ajudar als alumnes a desenvolupar la intuïció geomètrica i la capacitat de construir algorismes de resolució de problemes.

5. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC

El programa, que no és ni de tipus tutorial ni d'exercitació, s'ha d'entendre com un útil de treball que proporciona potents instruments per a ajudar a resoldre problemes de geometria analítica del pla. El programa permet que l'ordinador s'usi, d'una banda, com a eina per a calcular: càlcul del punt mitjà d'un segment, de l'equació d'una recta, de la intersecció d'una recta i una circumferència,... i, d'una altra banda, com a pissarra gràfica de gran precisió i versatilitat en la qual es van dibuixant els elements geomètrics: punts, vectors, segments, rectes i circumferències que intervenen en el problema que s'està resolent.

El fet que tots els elements geomètrics que intervenen en un problema, ja siguin dades o resultats de càlculs, es vagin dibuixant a una finestra de la pantalla de l'ordinador a mesura que s'introdueixen o que s'obtenen d'un càlcul, permet assolir un dels objectius del programa: que l'alumne desenvolupi la seva intuïció geomètrica. Aquest objectiu s'aconsegueix pel fet que en tot moment l'alumne pot veure gràficament si està resolent el problema de manera apropiada o si el plantejament que ha fet és erroni. Moltes vegades és a partir de l'anàlisi dels errors, que en aquest cas es detecten a més a més de manera gràfica, que s'assoleixen determinats conceptes i mètodes d'operar i que s'arriba a trobar la solució correcta dels problemes.

Un altre dels objectius del programa, potser el fonamental, és potenciar la capacitat de l'alumne per a construir algorismes de resolució de problemes. La resolució d'un problema, en primer lloc, exigeix de l'alumne l'anàlisi i comprensió dels elements que hi intervenen: premisses, dades, incògnites i conceptes. En segon lloc, a partir de la seva capacitat de reflexió i a partir de raonaments lògics, l'alumne ha de dissenyar un pla de resolució del problema - algorisme - fent ús dels conceptes i tècniques que en cada cas consideri més convenients. Una vegada l'alumne ha elaborat un algorisme de resolució d'un problema és quan es pot utilitzar el programa per a executar, d'una manera ràpida i fiable, l'algorisme elaborat. Finalment, l'alumne ha d'examinar la solució obtinguda i, en cas necessari, fer la revisió de l'algorisme dissenyat.

6. CONTEXT

El programa es dirigeix als alumnes que estudien la geometria analítica, afí i euclidiana, del pla. Actualment la geometria afí del pla figura en el programa de Matemàtiques de segon de BUP i la geometria euclidiana del pla en el de tercer de BUP.

Donat que el programa permet resoldre problemes de geometria afí i euclidiana del pla de nivells de dificultat molt diversos, els coneixements que l'alumne ha de tenir estan en funció dels conceptes geomètrics que intervenen en els problemes que ha de resoldre.

Un ús del programa que faci servir al màxim els seus recursos de càlcul i gràfics, permet la resolució de problemes que exigeixen a l'alumne el coneixement dels conceptes de geometria afí i euclidiana que es relacionen a continuació:

- Vector lliure. Components d'un vector lliure.
- Producte escalar de dos vectors. Norma d'un vector. Vector unitari. Angle de dos vectors. Vectors ortogonals.
- Punt. Coordenades d'un punt. Punt mitjà d'un segment.
- Translació d'un punt, gir d'un punt i simètric d'un punt respecte d'una recta.
- Recta. Vectors directors i normals d'una recta. Diferents equacions d'una recta.
- Incidència i paral·lelisme de rectes. Angle de dues rectes. Rectes ortogonals.
- Distància entre dos punts. Distància entre un punt i una recta. Distància entre dues rectes.
- Mediatriu d'un segment. Bisectriu de dues rectes.
- El triangle. Tipus de triangles: rectangle, isòscels, equilàter. Baricentre, ortocentre, circumcentre i incentre d'un triangle.
- El quadrilàter. Tipus de quadrilàters: paral·lelogram, rectangle, quadrat, rombe, trapezi.
- Polígons.
- Circumferència. Equacions reduïda i general de la circumferència.
- Intersecció d'una recta i una circumferència. Intersecció de dues circumferències.
Recta exterior, secant i tangent a una circumferència.

7. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

El menú principal del programa permet SELECCIONAR una de les següents opcions:

INTRODUCCIO DADES
CALCULS
NOU PROBLEMA
ACABAR

Quan des d'algun submenú del programa es vulgui accedir al menú principal caldrà triar l'opció TORNAR MENU PRINCIPAL.

Durant l'execució del programa, a la part superior dreta de la pantalla apareix escrita l'opció del menú principal que hi ha seleccionada, i quan aquesta selecció està per fer hi apareix escrit SELECCIONAR.

Al començar la resolució d'un nou problema, i en particular al posar el programa en funcionament, es selecciona automàticament l'opció INTRODUCCIO DADES. En aquesta situació inicial, el programa requereix de l'usuari la introducció de les coordenades que s'han d'assignar als extrems inferior esquerra i superior dret de la finestra quadrada de l'esquerra de la pantalla, que anomenarem finestra gràfica, en la qual es dibuixaran tots els elements geomètrics: punts, vectors, rectes, segments i circumferències que intervindran en el problema. A la part inferior dreta de la pantalla es manté durant tota la resolució del problema informació de la finestra gràfica seleccionada. Quan són visibles, els eixos de coordenades es dibuixen a la finestra gràfica. També, per a facilitar la localització dels diferents elements geomètrics que intervenen en un problema, a la finestra gràfica s'hi dibuixa una trama quadriculada.

L'opció INTRODUCCIO DADES ofereix, per mitjà d'un submenú, les següents

possibilitats d'introduir dades:

INTR. PUNT
INTR. VECTOR
INTR. RECTA
INTR. SEGMENT
INTR. CIRCUMFERENCIA
TORNAR MENU PRINCIPAL

Tot element geomètric: punt, vector, recta, segment o circumferència que s'introdueix queda identificat pel seu nom. Dos elements del mateix tipus no poden tenir el mateix nom, però sí que poden tenir el mateix nom dos elements de tipus diferent. El nom d'un element geomètric no pot tenir més de dos caràcters. Els dos caràcters que corresponen a una mateixa lletra, en minúscula i majúscula, es consideren com a caràcters diferents.

Encara que siguin elements que en alguns casos no estan dibuixats a la finestra gràfica, el programa assigna sempre noms fixos als següents elements: O a l'origen de coordenades i U1, U2 als punts unitat dels eixos de coordenades, E1 i E2 als vectors de la base que determina el sistema de referència cartesià ortonormal, X i Y als eixos de coordenades, CU a la circumferència unitat de centre O i radi 1 i SU al segment unitat d'extrems O i U1.

Quan s'introdueixen un punt, una recta, un segment o una circumferència, es dibuixa la seva part visible a la finestra gràfica. Un vector introduït pel seu origen i el seu final es dibuixa si és totalment visible; en cas que s'introdueixin les components del vector, només es dibuixa el vector si l'usuari ho vol i si amb l'origen que aquest ha indicat és totalment visible.

A l'opció INTR. PUNT un punt s'introdueix donant el valor de les seves coordenades.

A l'opció INTR. VECTOR un vector es pot introduir donant-ne:

- les components
- l'origen i l'extrem.

A l'opció INTR. RECTA una recta es pot introduir donant-ne:

- dos punts
- un punt i un vector director
- un punt i un vector normal
- l'equació implícita
- l'equació explícita

A l'opció INTR. SEGMENT s'introdueix un segment donant els seus punts extrems.

A l'opció INTR. CIRCUMFERENCIA una circumferència es pot introduir donant-ne:

- el centre i el radi
- el centre i un punt

- tres punts
- l'equació general

Ja hem indicat que l'opció TORNAR MENU PRINCIPAL permet retornar al menú principal.

L'opció CALCULS del menú principal permet, per mitjà d'un submenú, fer algun dels càlculs següents:

CALC. PUNT
 CALC. VECTOR
 CALC. RECTA
 CALC. SEGMENT
 CALC. CIRCUMFERENCIA
 CALC. METRICS
 TORNAR MENU PRINCIPAL

Igual que a l'opció INTRODUCCIO DADES, tot element geomètric: punt, vector, recta, segment o circumferència, que s'obté a l'opció CALCULS com a resultat d'un càlcul, queda identificat pel seu nom. Les regles per a l'assignació de noms als elements geomètrics que s'obtenen a l'opció CALCULS són les mateixes que s'han donat a la descripció de INTRODUCCIO DADES.

També, quan com a resultat d'un càlcul s'obté un punt, una recta, un segment o una circumferència, es dibuixa la seva part visible a la finestra gràfica. Un vector que es calcula a partir del seu origen i final es dibuixa si és totalment visible; en els casos restants, un vector només es dibuixa quan l'usuari ho vol i si amb l'origen que aquest ha indicat és totalment visible.

Sempre que s'ha de fer un càlcul en el qual hi intervenen elements geomètrics: punts, vectors, rectes, segments o circumferències que ja són coneguts, perquè s'han introduït com a dades o són resultats de càlculs previs, s'ofereix a l'usuari la possibilitat d'identificar cadascun d'aquests elements geomètrics de dues maneres diferents: donant-ne el nom o seleccionant-lo amb el cursor gràfic, assenyalant-ne un punt, en el cas que l'element geomètric sigui totalment o parcialment visible.

A l'opció CALC. PUNT, que permet calcular les coordenades d'un punt, es poden fer les subopcions següents:

- calcular el punt mitjà d'un segment.
- calcular un punt d'una recta.
- calcular un punt d'una circumferència.
- calcular el possible punt d'intersecció de dues rectes.
- calcular els possibles punts d'intersecció d'una recta i una circumferència.
- calcular els possibles punts d'intersecció de dues circumferències.

- calcular el punt simètric d'un punt respecte d'una recta.
- calcular el punt traslladat d'un punt.
- calcular el punt girat d'un punt.

A l'opció CALC. VECTOR, que permet calcular les components d'un vector, es poden fer les subopcions següents:

- calcular un vector coneguts el seu origen i final.
- calcular un vector director d'una recta.
- calcular un vector normal a una recta.
- calcular un vector ortogonal a un vector donat.
- calcular el vector unitari que té el mateix sentit que un vector donat
- calcular el vector suma de dos vectors donats.
- calcular el vector producte d'un escalar i un vector donats.

L'opció CALC. RECTA permet determinar una recta:

- coneguts dos punts.
- coneguts un punt i un vector director.
- coneguts un punt i un vector normal.
- coneguts un punt i una recta paral·lela.
- coneguts un punt i una recta perpendicular.
- com a bisectriu de dues rectes.

De la recta determinada se'n poden obtenir:

- les equacions paramètriques.
- l'equació contínua.
- l'equació implícita.
- l'equació explícita.

L'opció CALC. CIRCUMFERENCIA, que permet calcular l'equació d'una circumferència, possibilita la determinació de la circumferència donant-ne:

- el centre i el radi.
- el centre i un punt.
- tres punts.

De la circumferència determinada se'n poden obtenir:

- l'equació reduïda.
- l'equació general.

Dins de l'opció CALC. METRICS es poden fer els següents càlculs:

- calcular el producte escalar de dos vectors.
 - calcular la norma d'un vector.
 - calcular la mesura de l'angle de dos vectors o de dues rectes.
- Quan l'angle es mesura en graus el seu valor està comprès entre 0 i 180 graus, i si es mesura en radians entre 0 i π radians.
- calcular la distància entre dos punts, entre un punt i una recta o entre dues rectes.

L'opció TORNAR MENU PRINCIPAL permet retornar al menú principal.

L'opció del menú principal NOU PROBLEMA permet passar a la resolució d'un nou problema.

Finalment l'opció ACABAR del menú principal fa que s'acabi l'execució del programa.

8. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA

El caire instrumental del programa fa difícil poder donar directrius pedagògiques concretes, però no obstant això és necessari fer algunes consideracions sobre els diferents usos que el professor pot fer-ne.

En primer lloc el professor ha de tenir en compte, i per tant ha de fer-ho notar als alumnes quan convingui, que la resolució, amb l'ajuda del programa, de problemes de geometria afí i euclidiana del pla, exigeix el disseny d'algorismes de resolució que permetin trobar la solució en "forma constructiva", no essent possible la utilització d'algorismes que proporcionin la solució a partir de "condicions analítiques". Aquesta restricció fa que alguns problemes siguin de difícil solució o que no siguin resolubles amb l'ajuda del programa.

El fet que en la descripció d'objectius i en el plantejament metodològic s'hagi fet èmfasi en la importància de que, prèviament al procés de càlcul de la solució d'un problema, s'ha de dissenyar rigorosament un algorisme de resolució, no significa que es tregui importància al propi procés de càlcul.

En un primer nivell, el programa es pot fer servir perquè els alumnes puguin comprovar els resultats numèrics, però també la seva interpretació gràfica quan aquesta sigui possible, d'exercicis que serveixin per a potenciar la seva capacitat per a fer càlculs relacionats amb qüestions geomètriques: diferents equacions d'una recta, intersecció de dues rectes, angle de dues rectes, etc .

En un segon nivell el professor, a partir d'exemples prèviament seleccionats, pot fer servir el programa per a que l'alumne aprengui a: dissenyar algorismes de resolució de

problemes, analitzar els resultats de l'aplicació d'un algorisme per a determinar-ne la seva validesa, descobrir condicions redundants, descobrir condicions contradictòries, interpretar els casos que tenen més d'una solució, rebutjar solucions no desitjables, etc.

En un tercer nivell, en el qual se suposa que l'alumne ja sap dissenyar algorismes per a resoldre problemes i que domina els mètodes de càlcul que calen per a desenvolupar els algorismes que dissenya, el programa es pot fer servir per a l'obtenció efectiva, a partir d'un algorisme de resolució, de la solució d'un problema de manera ràpida i fiable.

En qualsevol cas, el programa tant es pot fer servir com a ajuda en el decurs d'una classe com perquè els alumnes hi treballin de manera individual per tal d'assolir i consolidar els seus coneixements.

Sigui quin sigui l'ús que es faci del programa, l'observació a la finestra gràfica del dibuix dels diferents elements geomètrics que intervenen en la resolució d'un problema, ha de possibilitar que l'alumne assoleixi una major comprensió d'allò que està fent, i, en cas d'haver aplicat un algorisme de resolució incorrecte, també li ha de permetre veure que la solució trobada és errònia, facilitant-li la determinació, si és que n'hi ha, dels elements geomètrics que apareixen com a resultat d'un raonament incorrecte.

Perquè el professor pugui aconseguir un rendiment òptim de la utilització del programa es necessari que prepari acuradament els exemples que farà servir. La tasca de disseny d'exemples és una feina complexa, interessant i, generalment, enriquidora per al professor.

9. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

El programa consta de 3 mòduls: GEPLA.EXE, GEPLAD.EXE, GEPLAC.EXE. Per a iniciar l'execució del programa l'usuari ha de cridar el mòdul principal GEPLA i aquest s'encarrega de gestionar les crides dels altres mòduls. En el subdirectori on hi ha guardats els programes també hi ha d'haver el programa BRUN20G.EXE.

Per a minimitzar, durant l'execució del programa, el temps d'accés als diferents mòduls i a l'arxiu, és convenient que aquests estiguin guardats a un subdirectori del disc dur (C:).

Cada vegada que s'ha d'elegir una opció d'un menú, la selecció s'ha de fer amb l'ajuda de les tecles -- , -- , | , | i de la barra espaiadora, i una vegada situats a l'opció escollida fer <CR>.

Si per equivocació s'elegeix una opció de INTRODUCCIO DADES que no és la desitjada, hi ha la possibilitat de tornar al menú de INTRODUCCIO DADES si al moment en que el programa demana el nom de l'element geomètric a introduir que

correspon a l'opció errònia es polsa la tecla ESC. Igualment, si de manera equivocada s'elegeix una opció de CALCULS que no es desitja, es pot tornar al menú de CALCULS si en el submenú corresponent al càlcul elegit equivocadament en comptes d'escollir una opció es polsa la tecla ESC. En els menús restants, si es fa una elecció d'opció equivocada no es possible esmenar l'equivocació; en aquest cas l'usuari ha de fer un càlcul diferent del que volia fer, encara que després no n'utilitzi el resultat (cal recordar que sempre es tenen els punts O, U1, U2, els vectors E1, E2, el segment SU, les rectes X, Y, i la circumferència CU) o utilitzar les tecles programades F1 i F2. La tecla F1 permet interrompre l'execució del programa en qualsevol moment i ACABAR. La tecla F2 permet, a qualsevol moment, començar la resolució d'un NOU PROBLEMA.

Els valors numèrics que s'introdueixen durant l'execució del programa poden donar-se en forma de nombre enter, decimal o fraccionari. A l'introduir valors numèrics: coordenades dels vèrtexs inferior esquerre i superior dret de la finestra gràfica, radi d'una circumferència, ... , el programa comprova si els valors introduïts compleixen les condicions que se'ls exigeixen, i de no complir-les són rebutjats. El programa rebutja els valors numèrics que introdueix l'usuari quan un nombre de caràcters excessiu no permet mantenir una bona presentació a la pantalla.

A l'assignar nom a un element geomètric, el programa només accepta el nom introduït si aquest nom no té més de dos caràcters i si no s'ha assignat prèviament a un altre element geomètric del mateix tipus. Igualment, quan s'ha de seleccionar un element geomètric, ja introduït o calculat, donant-ne el seu nom, el programa només accepta un nom que sigui d'un element geomètric conegut del tipus del que es selecciona.

Quan s'ha de seleccionar un element geomètric, que està dibuixat a la finestra gràfica, per mitjà del cursor gràfic, la selecció es fa assenyalant-ne un punt (procurant que no sigui molt pròxim a dos elements geomètrics del mateix tipus). Per a fer-ho s'han de tenir presents tres coses: que el desplaçament del cursor gràfic es fa per mitjà de les tecles: - , -- , | , | ; que quan el cursor gràfic és situat a la posició indicada s'ha de fer <CR> , i que la magnitud del desplaçament del cursor gràfic, que val 4 cada vegada que es comença a fer servir el cursor, es pot variar polsant la tecla d'un dels caràcters numèrics 1,...,9 , el valor de la qual passa a ser la nova magnitud del desplaçament. Si abans d'iniciar el desplaçament del cursor gràfic es polsa la tecla A el cursor es situa inicialment a la darrera posició que havia ocupat, en cas contrari es situa a la part inferior esquerra de la finestra gràfica. Durant el desplaçament del cursor gràfic, si el cursor surt per un dels costats de la finestra gràfica tornar a entrar pel costat oposat.

En el cas que un vector no es dibuixa a la finestra gràfica en el moment de la seva introducció com a dada o en el moment d'obtenir-se com a resultat d'un càlcul i que després es vol dibuixar, o en el cas que estant dibuixat es vol tornar a dibuixar però amb un origen diferent, cal tornar a introduir o tornar a calcular el vector. S'ha de tenir en compte que al tornar a introduir o calcular el vector que es vol dibuixar se li ha d'assignar un nom nou, que si es torna a introduir es pot fer donant-ne les components o l'origen i el final, i que si es torna a calcular es pot fer donant-ne l'origen i el final o multiplicant-lo per l'escalar 1.

En qualsevol moment, durant l'execució del programa, es pot obtenir un bolcat per impressora del contingut de la pantalla polsant simultàniament les tecles i PrtSc.

Cal tenir present que quan l'ordinador fa càlculs es poden produir errors d'arrodoniment a causa de la seva limitada capacitat de càlcul. D'altra banda, quan el programa ha de proporcionar resultats de càlculs: coordenades d'un punt, components d'un vector, coeficients de l'equació d'una recta, ... els dona arrodonits fins a les centèsimes.

És molt convenient que, durant la resolució d'un problema amb l'ajuda del programa, l'usuari vagi prenent nota del nom de tots els elements geomètrics i de tots els valors numèrics (coordenades d'un punt, coeficients de l'equació d'una recta, valor d'una distància, ...) amb que treballa, tant si han estat introduïts com a dades o obtinguts com a resultat d'un càlcul, per a evitar que en el moment que posteriorment els hagi de fer servir no els recordi. Donat que a la finestra gràfica no s'escriu el nom dels elements geomètrics que s'hi dibuixen, per a facilitar la seva identificació, també és convenient que l'usuari vagi fent un croquis de tot el que es va dibuixant a la finestra gràfica acompanyant cada element geomètric del nom que li ha assignat.

Per a no fer una reserva innecessària de memòria, s'ha limitat el nombre d'elements geomètrics de cada tipus que es poden fer servir en la resolució d'un problema, de manera que siguin suficients per a la majoria de problemes que es poden resoldre. Aquest nombre màxim d'elements, per a cada un dels diferents tipus, és de: 30 per als punts, 10 per als vectors, 10 per a les rectes, 10 per als segments i 10 per a les circumferències.

10. EXEMPLES

EXEMPLE 1

D'un rombe ABCD se'n coneixen els vèrtexs $B=(5,2)$ i $D=(-1,4)$, i se sap que els costats BC i DA són paral·lels a la recta $r: 2x+y-3=0$. a) Trobeu els vèrtexs A i C. b) Calculeu l'angle que formen els costats AB i AD.

ANÀLISI:

El vèrtex A es pot obtenir fent la intersecció de la recta ME mediatriu del segment BD i de la recta s que passa pel vèrtex D i és paral·lel a la recta r.

El vèrtex C es pot calcular tenint en compte que el punt mitjà M de la diagonal BD també és el punt mitjà de la diagonal AC.

Per a calcular l'angle que formen els costats AB i AD, es pot calcular l'angle que formen els vectors AB i AD.

ALGORISME:

Introducció_dades:

Introduir punt B=(5,2)

Introduir punt D=(-1,4)

Introduir recta R: $2x+y-3=0$

(veure figura 1)

Càlculs:

Calcular M punt mitjà segment extrems B i D

Calcular V vector d'origen B i final D

Calcular mediatriu ME segment BD: recta per punt M i vector ortogonal V

Calcular vector director U de la recta R

Calcular recta S que conté costat DA: recta per punt D i vector director U

Calcular punt_A: intersecció rectes ME i S

(veure figura 2)

Calcular vector T d'origen A i final M

Calcular punt_C: traslladat punt M per translació vector T

Calcular segments AB, BC, CD i DA (obtenció dibuix rombe)

(veure figura 3)

Calcular vector W1 d'origen A i final B

Calcular vector W2 d'origen A i final D

Calcular angle_costats_AB_i_AD: angle vectors W1 i W2

(veure figura 4)

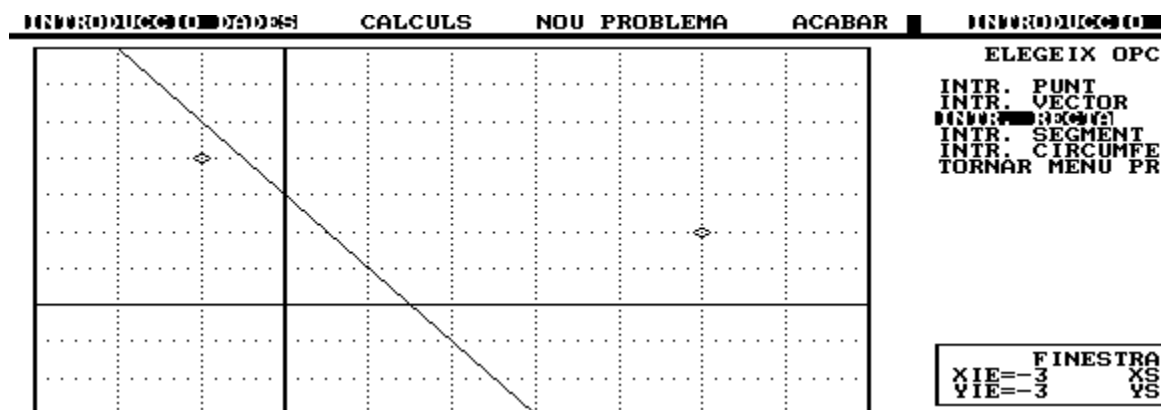


Figura 1

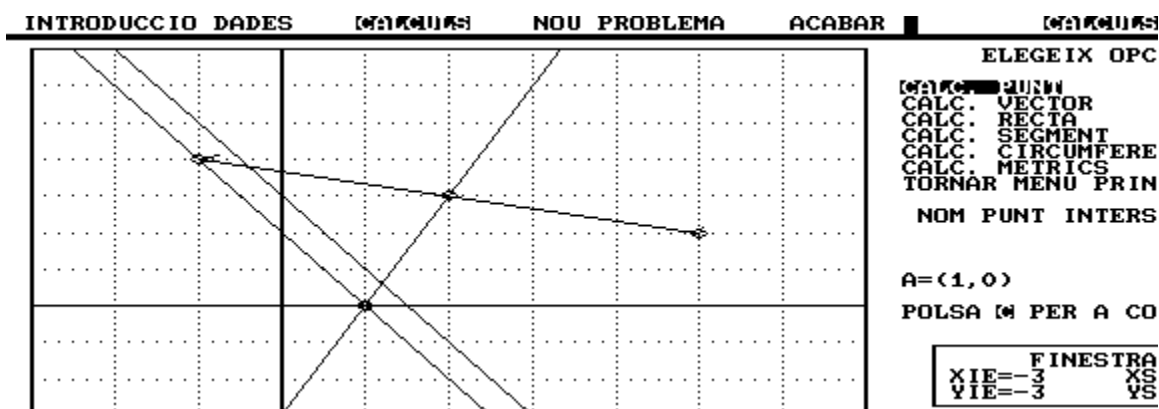


Figura 2

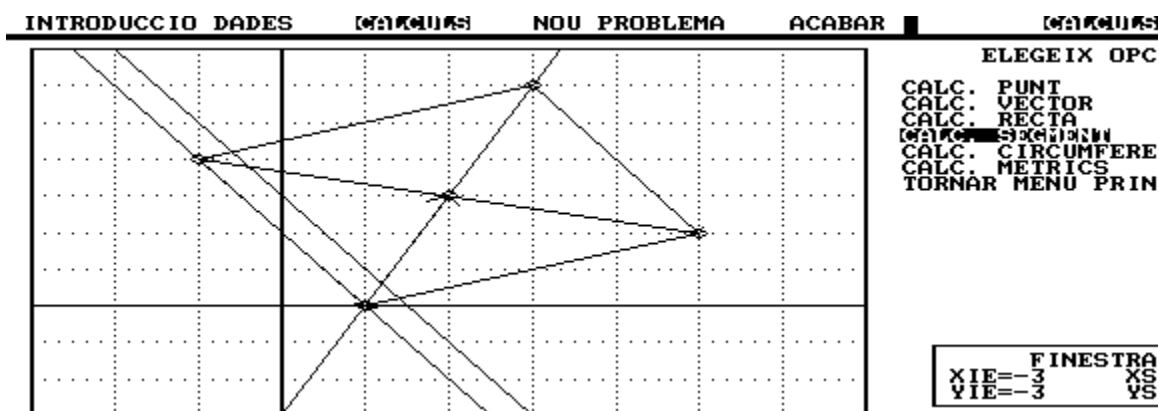


Figura 3

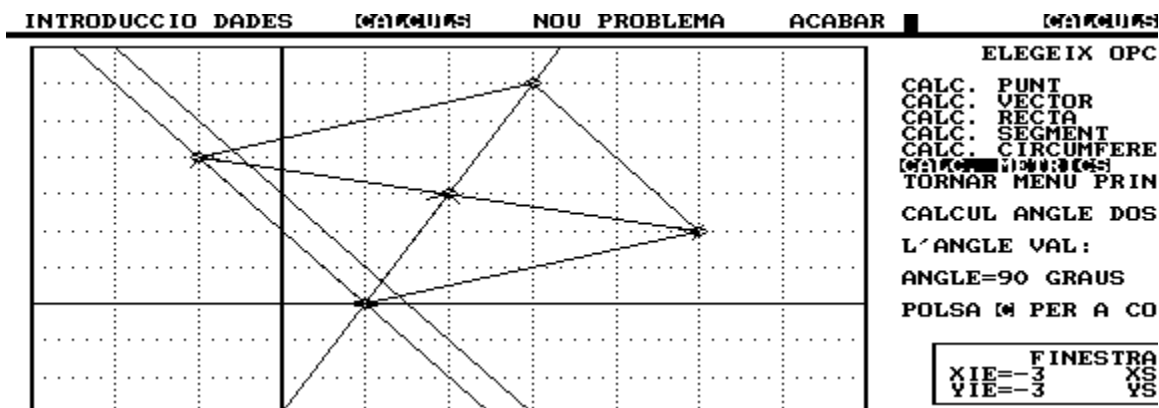


Figura 4

EXEMPLE 2

D'un triangle ABC, rectangle en A, se'n coneixen els vèrtexs $B=(-2,-1)$ i $C=(4,1)$, i hom sap que el vèrtex A pertany a la recta $r: x-2y+4=0$. Calculeu el vèrtex A (dues solucions).

ANÀLISI:

A un triangle rectangle el punt mitjà M de la hipotenusa equidista dels 3 vèrtexs del triangle, per tant el punt M és el centre de la circumferència c circumscrita al triangle rectangle. El radi de la circumferència c val la meitat de la longitud de la hipotenusa del triangle.

Com que el vèrtex A ha d'ésser de la recta r i de la circumferència c , A s'obté intersectant r i c .

ALGORISME:

Introducció_dades:

Introduir punt $B=(-2,-1)$
Introduir punt $C=(4,1)$
Introduir segment S d'extrems B i C
Introduir recta $R: x-2y+4=0$
(veure figura 5)

Càlculs:

Calcular punt mitjà M del segment S
Calcular radi r de la circumferència C : calcular distància entre els punts M i B
Calcular circumferència C : centre M i radi r
Calcular punts $A1$ i $A2$: intersecció de la recta R i la circumferència C
Calcular segments $K1$ pels punts $A1$ i B , i $K2$ pels punts C i $A1$ (obtenció dibuix triangle)
Calcular segments $L1$ pels punts $A2$ i B , i $L2$ pels punts C i $A2$ (obtenció dibuix triangle)
(veure figura 6)

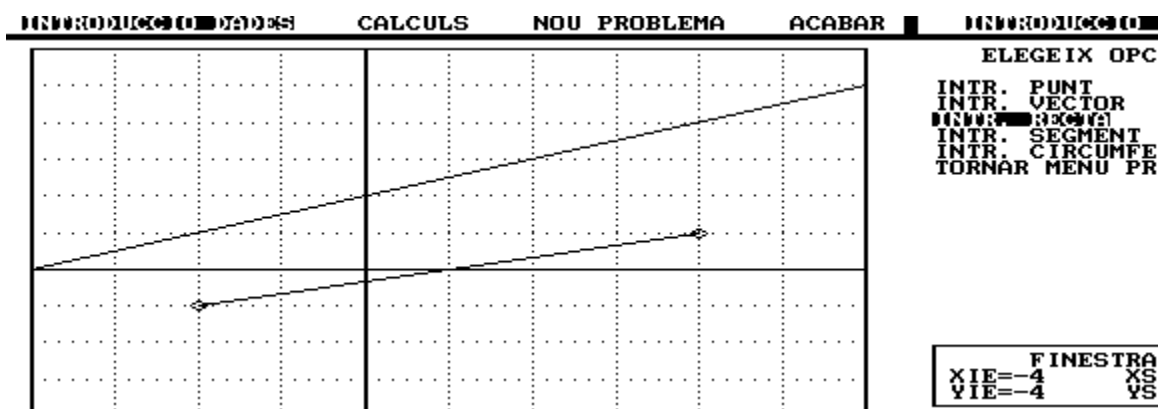


Figura 5

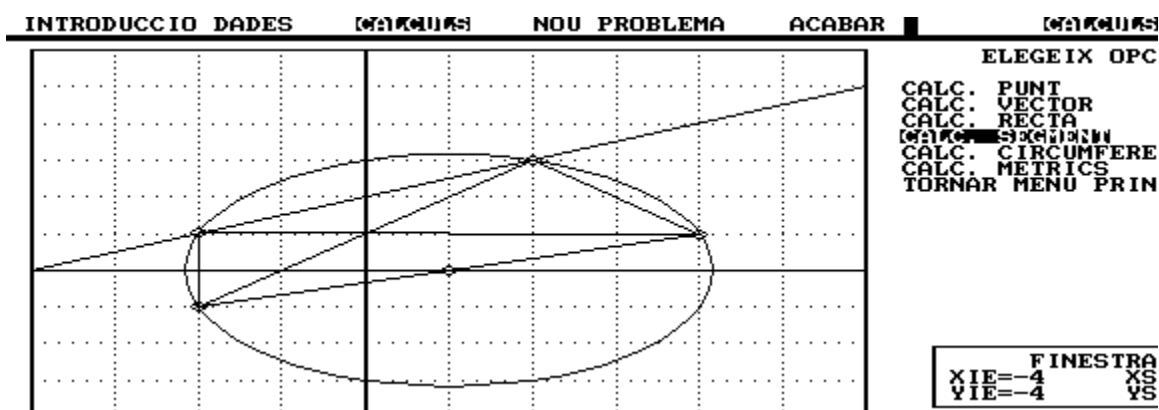


Figura 6