Gràfic

Carles Barceló i Vidal
Programa d'Informàtica Educativa, 1987.

1. ESPECIFICACIONS GENERALS

1.1.Nom del programa

GRÀFICA

1.2 Autors

Carles Barceló i Vidal (Grup "EIX")

1.3 Temàtica

Representació gràfica de funcions d'una variable real definides explícitament.

1.4 Assignatura(es)

És d'aplicació sobretot dins l'àmbit de l'assignatura de Matemàtiques, tot i que pot resultar útil per altres disciplines científiques a l'hora de realitzar l'estudi gràfic de determinades funcions.

1.5 Nivell escolar

El programa és d'aplicació en qualsevol tema -sigui de B.U.P., C.O.U. o F.P.- en què resulti necessari realitzar l'estudi
d'alguna funció definida de forma explícita.

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

El programa consta d'un únic mòdul que representa gràficament en una mateixa referència cartesiana una o més funcions, fins a un màxim de 10.

La pulsació de la tecla F2 permet de reiniciar l'execució del mòdul sense que calgui de cridar de nou el programa des del
sistema operatiu o des del menú principal. Per abandonar definitivament l'execució del programa cal polsar la tecla preprogramada F1.

2.1 Introducció de funcions

L'usuari ha d'introduir la funció a representar d'acord amb les regles que el BASIC imposa per a l'escriptura d'expressions algebraiques. Hom podrà usar funcions predefinides com SIN, COS, TAN, ARCSIN, ATN, EXP (o E^), LOG (o LN) així com l'expressió PI per a significar el nombre irracional ¶.

En cas d'error en la introducció de l'expressió de la funció, el programa reclamarà una nova entrada per part de l'usuari.

2.2 Tipus de representació

Les representacions gràfiques són totes del tipus "proporcional", és a dir, prenent la mateixa unitat de graduació en els dos eixos de coordenades.

No cal preocupar-se de les qüestions relatives al domini de definició o al camp d'existència de la funció. El programa es limita a representar -dins del camp d'existència de la funció- tots els punts de la seva gràfica que resultin visibles dins la finestra.

La representació s'efectua punt a punt. Això fa que la gràfica pugui presentar "buits" notables en els intervals on la funció creixi o decreixi molt ràpidament.

En cas que la gràfica d'una funció no tingués visible cap punt dins la finestra, l'usuari seria informat de tal circumstància podent tot seguit canviar l'escala de representació o de referència (vegeu apartat següent). Encara que l'usuari no decideixi fer cap d'aquests canvis, el programa "arxiva" la funció, i la té en compte a tots els efectes.

2.3 Escala de representació.canvis d'escala i referència

El programa escull inicialment una escala de representació que assigna 25 punts de pantalla -pÆxels- a la unitat de mesura i gradua els dos eixos de coordenades d'1 en 1.

El programa ofereix a l'usuari la possibilitat de canviar l'escala de representació mitjançant la introducció del factor K de canvi d'escala -enter, decimal o fraccionari- que fa que el nombre de píxels de la unitat de mesura quedi multiplicat per aquest factor K. La graduació dels eixos és adaptada convenient- ment per tal de tenir una visió permanent de l'escala de representació en què s'està treballant. En una de les quatre cantonades laterals de la finestra gràfica hi ha indicat el valor de les graduacions que apareixen en els eixos.

El programa facilita també la possibilitat de traslladar paral.lelament els eixos de coordenades a qualsevol lloc de la finestra gràfica sempre que el nou origen de coordenades romangui visible. El punt on aquest ha de ser traslladat s'indicarà donant les seves coordenades referides al sistema de referència existent en aquell moment.

Els canvis d'escala i de referència s'ofereixen abans i després de la representació gràfica de qualsevol funció

Després de qualsevol canvi, es reprodueixen totes les gràfiques presents en el moment del canvi. Si durant aquest procés de reproducció alguna de les gràfiques no resultés visible, el programa demanaria a l'usuari si vol canviar novament l'escala de representació o la referència.

2.4 Representació de punts particulars

L'usuari pot representar un punt qualsevol de la gràfica de la funció que en aquell moment s'està tractant mitjançant la introducció del valor X de l'abcissa del punt. El programa proporciona el valor de la corresponent imatge F(X) i representa gràficament el punt corresponent sempre que aquest sigui visible.

Aquesta possibilitat de representació de punts particulars s'ofereix tant abans com després de cada representació gràfica i fins i tot en el cas que, de resultes d'un canvi d'escala o de referència, hagin d'ésser representades novament totes les gràfiques.

2.5 Trama

El programa ofereix la possibilitat de representar una trama dins la finestra gràfica per tal de facilitar la millor localització dels punts a través de llurs coordenades. Aquest oferiment es realitza després de cada representació gràfica i sempre que la trama no estigui ja representada.

2.6 Errors d'introducció

El programa realitza un control immediat dels valors numèrics i caràcters entrats per l'usuari. Si es detecta un error en la introducció, l'ordinador emet un senyal acústic, esborra a la pantalla el valor introduït i reclama la introducció del nou valor o caràcter.

El programa no informa del tipus d'error comès per l'usuari. Els errors que més habitualment es cometen són:

- Entrar un caràcter diferent a l'esperat pel programa.
- Escriure incorrectament un valor numèric.
- Introduir un valor negatiu o nul del factor K de canvi d'escala.
- Polsar únicament la tecla RETORN com a resposta a la demanda d'entrada d'un valor numèric.

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

3.1 Objectius

L'únic objectiu que persegueix el programa és el de facilitar la representació gràfica clara i acurada de qualsevol funció real de variable real definida explícitament.

3.2 Coneixements previs

L'únic requeriment és la familiarització amb les representacions gràfiques de funcions reals definides explícitament i amb la forma d'escriure les expressions algebraiques d'acord amb les normes del llenguatge BASIC.

3.3 Metodologia d'ús

En tractar-se d'un programa que està pensat més com una eina d'ajuda en un moment determinat que no pas per a desenvolupar un tema en concret del currículum escolar, no es pot parlar d'una metodologia específica del seu ús a classe. Per aquest motiu, aquest apartat es limita a presentar algunes situacions concretes i diverses en les quals l'aplicació del programa pot resultar profitosa.

3.3.1 Estudi i representació de funcions

És, per descomptat, l'aplicació més evident del programa. A l'hora de representar una funció hom pot començar escollint una escala de representació petita per tal d'obtenir una visió "llunyana" de la gràfica i, d'aquesta manera, tenir una primera idea del comportament general de la funció. Tot seguit hom podrà augmentar l'escala de representació i, si cal, canviar la posició de l'origen de coordenades i d'aquesta manera aconseguir diferents visions més locals de la gràfica de la funció (figs 0 i 1).

3.3.2 Estudi comparatiu de gràfiques

Moltes vegades resulta necessari fer un estudi comparatiu entre les característiques de les gràfiques de dues o més funcions. La possibilitat que ofereix el programa de tenir representades simultàniament a la pantalla fins a 10 funcions, pot facilitar enormement aquestes comparacions.

A la figura 2 es presenta la representació gràfica simultània de les funcions exponencials de bases e, 2, 1.5, 1.25, 1, 0.8, 2/3, 0.5 i 1/e.

A la figura 3 estan representades simultàniament les funcions $y=e^x$, $y=1.25^x$, i llurs inverses y=ln(x) i $y=\log_{1.25}(x)$ per tal de posar en evidència la seva simetria respecte a la bisectriu del 1r-3r quadrants.

3.3.3 Interpretació gràfica de la resolució d'equacions

Moltes vegades ens veiem obligats a resoldre equacions de les quals, a priori, resulta difícil saber si tenen o no tenen solucions, quin és el nombre d'aquestes i com es distribueixen sobre la recta real. En tal cas, una representació gràfica pot ajudar enormement a clarificar les idees.

A la figura 4 es presenta un estudi gràfic previ a la resolució de l'equació polinòmica

$0.5*X^4+1.15*X^3-0.05*X^2+1.61*X-1.55=0$

que mostra clarament que té només dues solucions reals compreses entre 2 i 3 una , i entre 0 i 1 l'altra. Un estudi més local, permet de calcular el valor aproximat de les dues arrels (figs 5 i 6).

A la figura 7 s'ha fet una representació gràfica simultània de les funcions y=cos(x) i y=tg(x) per tal de tenir una primera idea de les solucions de l'equació trigonomètrica cos(x)=tg(x). Així s'observa ràpidament que una primera solució x_0 és compresa entre 0 i 1, i que les altres solucions s'obtenen a partir de x_0 sumant-hi múltiples enters de 2.

La figura 8 presenta les gràfiques de y=sin(x) i y=ln(x) per tal d'aconseguir una primera aproximació sobre la naturalesa de les solucions de l'equació sin(x)=ln(x). Se'n pot derivar ràpidament que l'equació tindrà només una solució x_0 i que aquesta serà compresa entre 2 i 2.5 .

3.3.4 Interpretació gràfica de la derivada d'una funció

3.3.4.1. Per tal de reforçar el concepte de derivada d'una funció en un punt com a pendent de la recta tangent corresponent, pot resultar útil començar representant la funció, en un entorn "ample" del punt per, tot seguit, fer un "zoom" que ens presenti la gràfica local de la funció en un entorn molt més reduït. D'aquesta manera la corba esdevindrà pràcticament una recta que es pot identificar amb la recta tangent a la corba en el punt en qüestió.
L'avaluació gràfica del pendent d'aquesta "recta", serà una primera aproximació del valor de la derivada de la funció en el punt.

Així, per exemple, a través de la figura 9, es pot fer palès com el valor de la derivada de la funció $y=x^3-x$ en el punt x=0 val -1.

3.3.4.2. Un altre aspecte que tot sovint és font de confusió entre els alumnes, és el relatiu

a l'anul.lació de la derivada en un punt.
En una aplicació errònia del sentit de la implicació, l'alumne creu moltes vegades que una funció estrictament creixent o decreixent en un punt ha de tenir la derivada necessàriament de signe positiu o negatiu. L'aplicació del programa a l'estudi gràfic local en el punt x=0 de funcions com ara y=0.5*x , $y=-0.5*x^2$, $y=2*x^2$ i $y=-2*x^3$ pot contribuir a desfer aquests equívocs (fig 11).

3.3.4.3. De la mateixa manera, la representació gràfica local en un entorn del punt x=0 de funcions com ara y= ^{3} x (vegeu figura 12) o y= ^{5} x pot ajudar a dissipar l'error també habitual de suposar que la no derivabilitat implica necessàriament l'absència de recta tangent.

3.3.4.4. Apuntem finalment que la representació local de funcions implicant valors absoluts (vegeu figura 13) ajuda enormement a l'adquisició del concepte de derivades laterals d'una funció en un punt.

La necessitat que els eixos de coordenades estiguin sempre presents dins la finestra gràfica, obliga que totes aquestes interpretacions gràfiques de la derivada s'hagin de realitzar necessàriament en el punt x=0 o en punts molt propers.

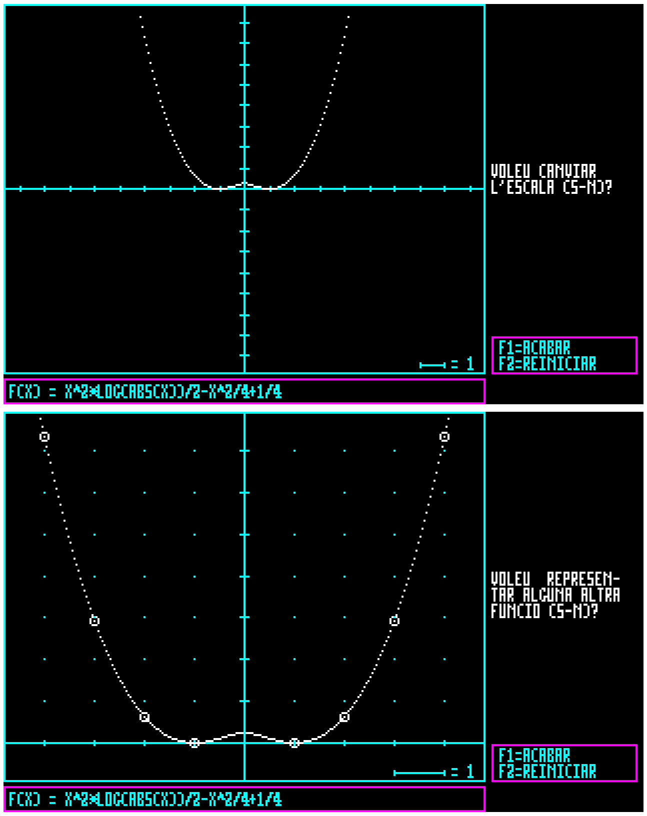
3.3.5. Interpretació gràfica d'alguns límits funcionals

La possibilitat de representació gràfica d'una funció en un entorn molt reduït del punt x=0 pot servir per a "visualitzar" alguns límits funcionals quan x-»0 i d'aquesta manera ajudar a la comprensió del concepte de límit (vegeu figures 14 i 15) aplicat a l'estudi del lim x*sin (1/x), i (figura 16) aplicat a
x-»0
l'estudi del lim $x*(\log(x))^2$
x-»0

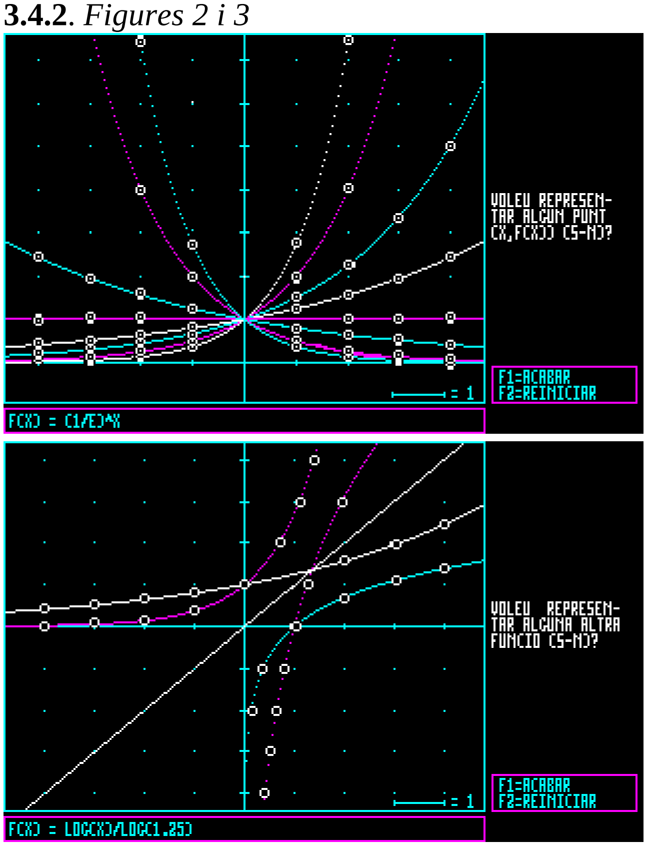
Un concepte que tot sovint l'alumne considera poc intuïtiu és el relatiu a l'estudi dels infinitèsims equivalents. la represen- tació gràfica pot ajudar enormement a clarificar aquest concepte. A les figures 17,18 i 19 es pot apreciar la "superposició" de les gràfiques de les funcions f(x)=sin(x) i g(x)=x en un entorn del punt x=0 .

3.4 Figures

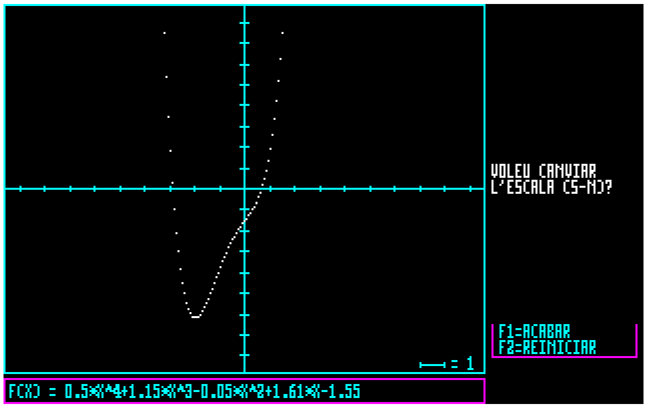
3.4.1. *Figures 0 i 1*

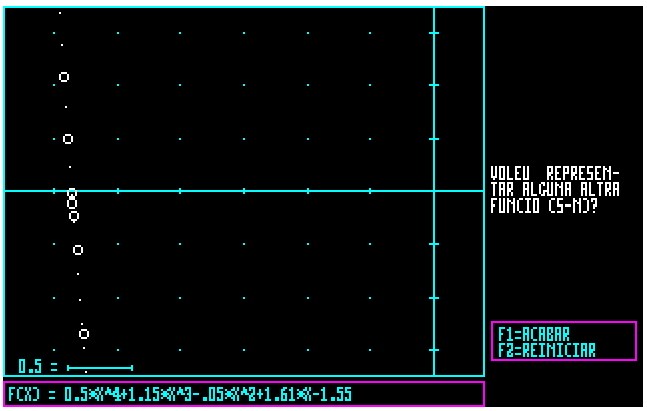


3.4.2. *Figures 2 i 3*

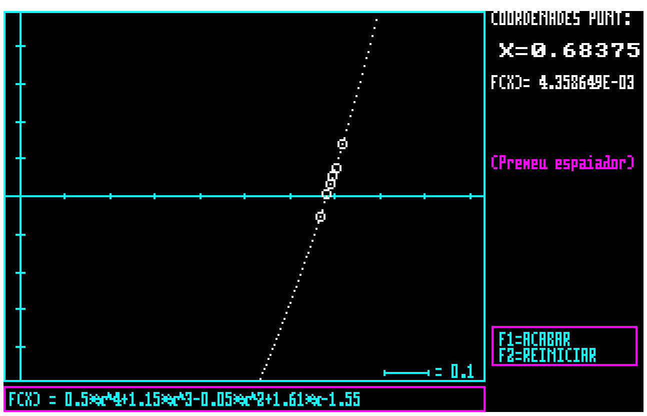


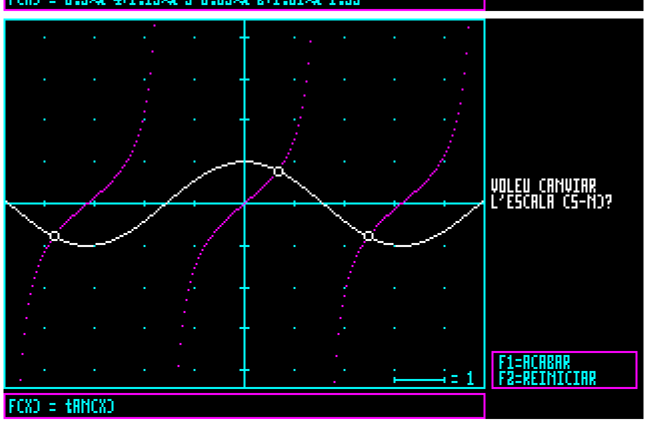
3.4.3. *Figures 4 i 5*



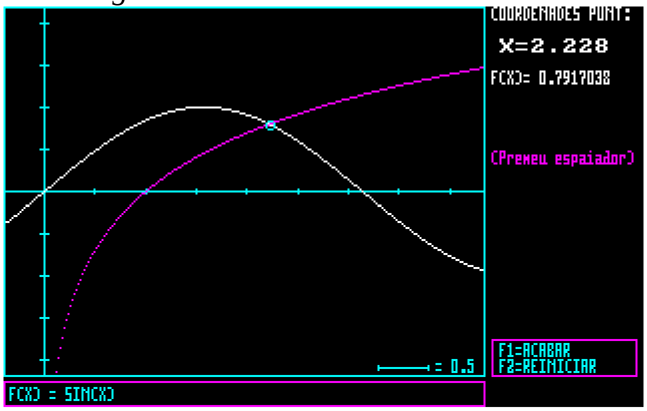


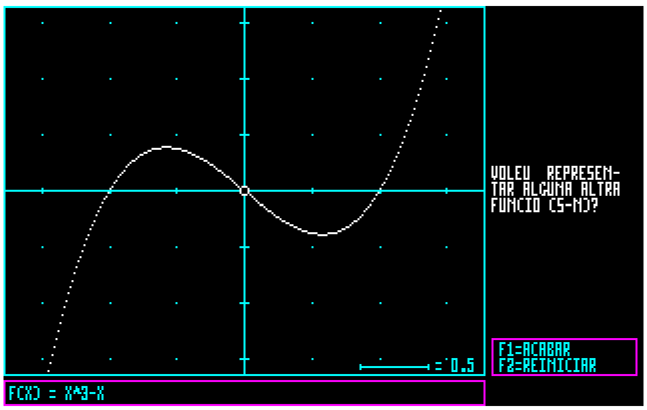
3.4.4. *Figures 6 i 7*



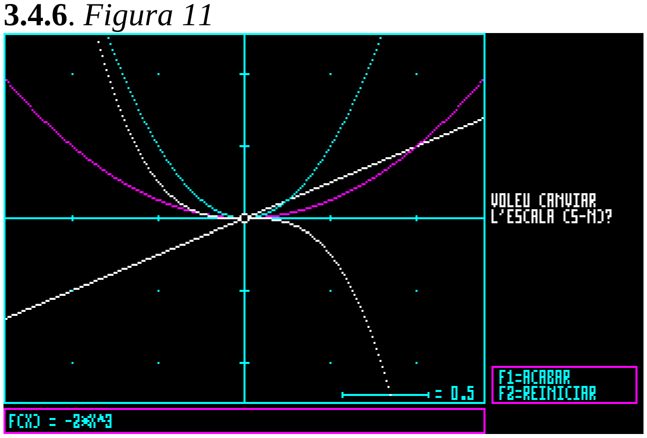


3.4.5. *Figures 8 i 9*

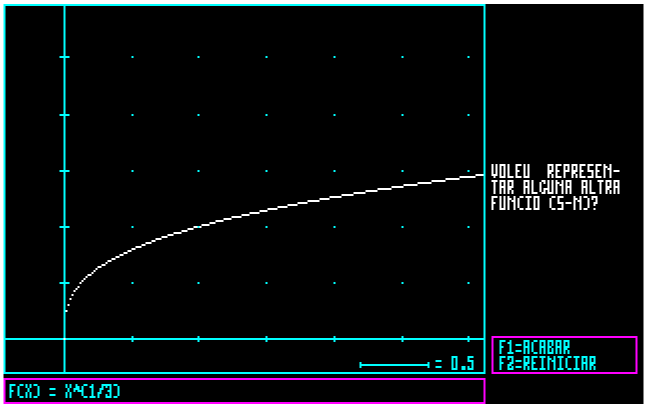


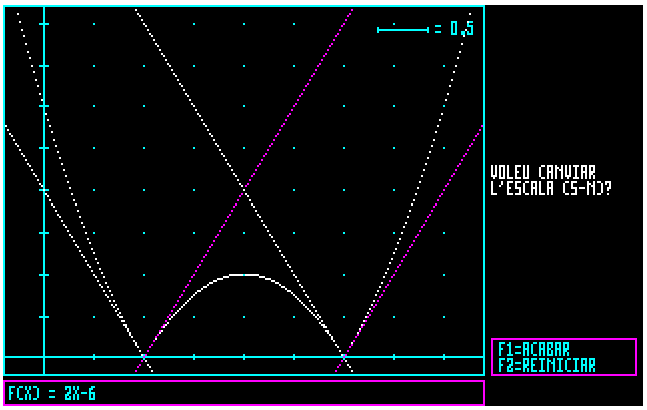


3.4.6. *Figura 11*

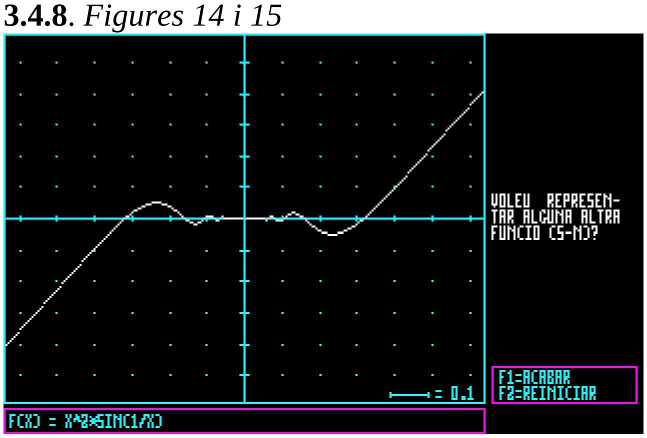


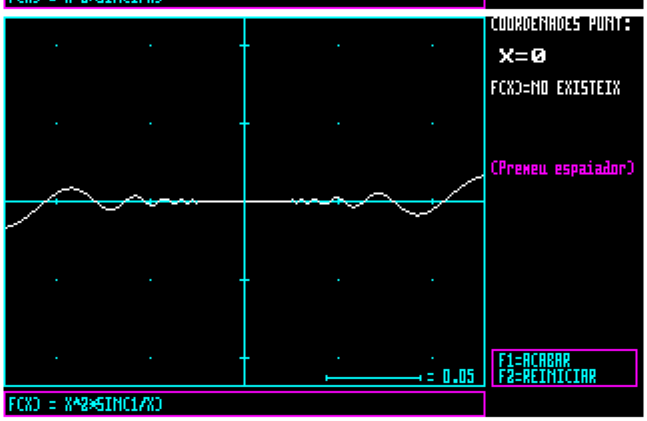
3.4.7. *Figures 12 i 13*



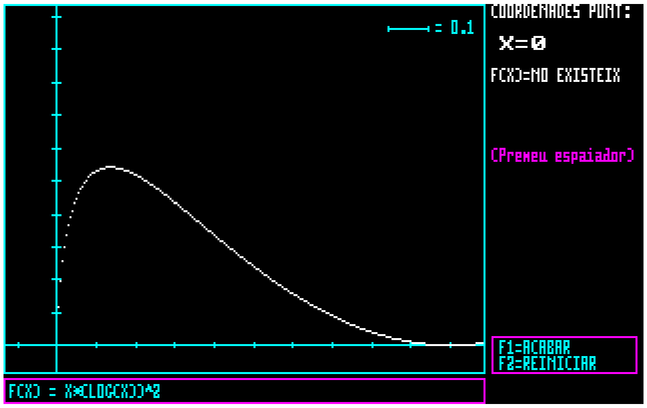


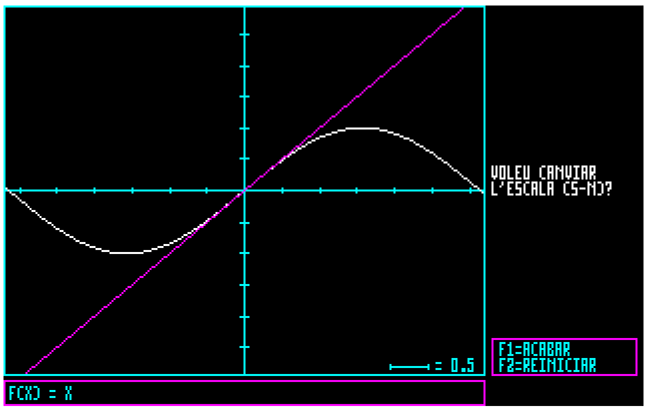
3.4.8. *Figures 14 i 15*



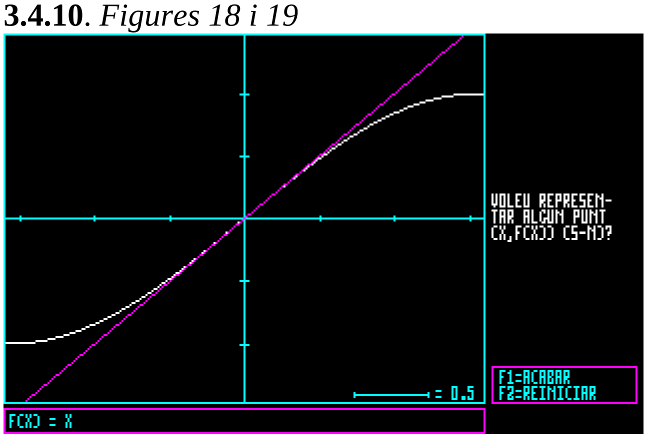


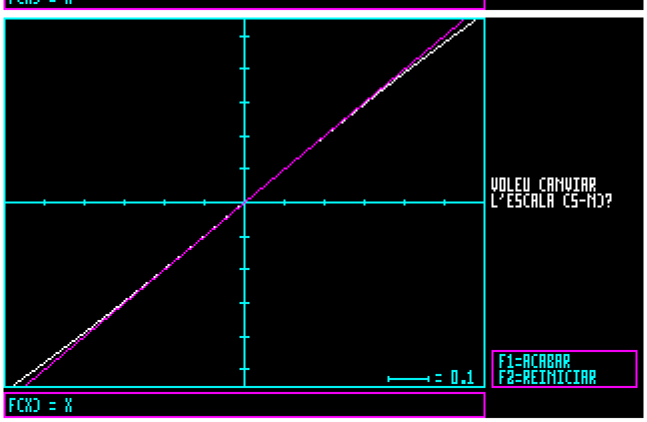
3.4.9. *Figures 16 i 17*





3.4.10. *Figures 18 i 19*





4. ANEX: Normes d'introducció de funcions per teclat

Alguns dels programes del grup EIX (FUNCDER, ITER, PARAMETR, GRAFICAC i POLAR) i el programa DERIVA inclouen una subrutina específica d'avaluació de funcions entrades des de teclat. Aquesta subrutina permet entrar una funció com una cadena de caràcters (string) en un programa BASIC i calcular els seus valors numèrics per als valors de la variable que siguin del domini o poder rebre un missatge explicatiu per als que no siguin del domini.

A més, aquesta subrutina possibilita:

* La inclusió de funcions que el BASIC no contempla directament.

* L'entrada de funcions amb el llenguatge "usual" de les matemàtiques, és a dir, sobre tot, escriure-les evitant signes de producte i determinats parèntesis en arguments de funció, tal com ho fem en l'escriptura ordinària quan no hi ha confusió.

ELEMENTS PERMESOS EN L'ESCRIPTURA DE LA FUNCIÓ:

Podem usar en l'escriptura de la funció els següents elements:

* Parèntesis, oberts i tancats.
* Signes aritmètics: + - * / ^ amb els resultats usuals (suma, diferència, producte, quocient, potenciació) però amb les possibilitats d'omissió que s'expliquen més avall.

* La variable, escrita en majúscula o en minúscula (ja sigui X, A, T, segons ho indiqui el programa de què es tracti).

* Noms de funcions elementals amb els codis que s'expliquen seguidament. Podran anar descrites en majúscules o en minúscules.

Trigonomètriques:	el sinus, escrit	SIN
	el cosinus,	COS
	la tangent,	TAN o bé TG
Trigonomètriques inverses:		
	l'arc sinus,	ASN o bé ARCSIN
	l'arc tangent,	ATN, ARCTG o bé ARCTAN
Hiperbòliques:	sinus hiperbòlic,	SINH
	cosinus hiperbòlic,	COSH
	tangent hiperbòlica,	TANH o bé TGH
Logaritme neperià:		LN o bé LOG
Funció exponencial de base e:		EXP o bé e^

Arrels: arrel quadrada, SQR
arrel d'índex n, ARn (n_N, n_2)
exemples: AR3, AR8, AR23, ...

Aritmètiques: part entera, INT
signe, SGN
valor absolut, ABS

L'argument de la funció no caldrà escriure'l entre parèntesis si no hi ha confusió, com s'explica més avall.

* Números en notació decimal (però, la , i la ' són admeses com a punt decimal si hom ha controlat abans l'entrada de la cadena adequadament) o científica i, a més, e i PI s'admeten entrats així (en majúscules o minúscules) perquè representen les que segurament són les dues constants més importants de les matemàtiques.

Entre un element i un altre es poden posar espais en blanc que facilitin l'escriptura... però no en mig d'un nom de funció ni, naturalment, en mig d'un número.

NORMES PER L'ESCRIPTURA DE LES FUNCIONS:

L'avaluador permet entrar la funció en una forma molt semblant a com s'escriuria a la classe o l'escriuen els textos.

Tanmateix, hi ha una limitació que no podrem pas salvar: la cadena de caràcters representativa de la funció haurà de ser escrita "en un sol nivell". No valdran subíndexs o exponents ni fraccions amb una expressió damunt de la línia i una altra a sota. És per això que es recomana emprar els parèntesis per a explicitar clarament qualsevol expressió on hi hagi possibilitat de confusió amb el signe ^ de potència.

En relació amb l'entrada de funcions en BASIC o altres llenguatges de programació, aquestes són les diferències fonamentals:

Podem ometre el signe * quan no hi hagi confusió però procurarem escriure en els productes on un factor sigui numèric aquest al davant.

Exemples:

Podem escriure 3x enlloc de 3*x, però no x3 en lloc de x*3; podem entrar 5x^3+4x^2+7x per indicar allò que en BASIC seria 5*x^3+4*x^2+7*x o també 5xsin(x) per a indicar 5*x*sin(x) i, a més ...

Podem ometre els parèntesis per a l'argument de la funció quan no hi hagi confusió.

I, doncs, podrem escriure 5x sinx per a indicar 5*x*sin(x) i, combinant tot això, podrem escriure per exemple una expressió com és ara cos4x + 7x Ln3x per a indicar allò que en BASIC escriuríem com a cos(4*x)+7*x*LOG(3*x).

Tanmateix convé aclarir que una expressió com sin x ln x s'interpreta com sin (x)*log(x) i que si hom vol entrar la funció sin (x ln x) cal emprar els parèntesis per a indicar l'argument de la funció, exactament com es faria en l'escriptura ordinària.

Podem ometre els parèntesis per a un denominador o un exponent que siguin productes.

Exemples:

No ens caldrà escriure 4/(5*x) o bé 4/5/x per a indicar *(fòrmula 1)* sinó que podrem posar 4/5x.

També podem escriure 2^xsinx per indicar 2^(x*sin(x)). Cal observar que aquesta norma "xoca" amb la que indica que la ^ té precedència envers el producte. És per això que ja anteriorment s'ha recomanat l'ús dels parèntesis si hom veu confusió quan s'usa ^. En aquest sentit serà recomanable, per evitar confusions, escriure l'expressió que ara comentem com 2^(xsinx).

Aquesta recomanació ja serà d'ús obligat per escriure una exponencial "de tres pisos": caldrà que usem els parèntesis que indiquin prioritats.

Pel que fa a la relació entre el signe de potència i els arguments de les funcions convé dir que si no són permeses expressions tals com $\sin^2 x$, $\cos^2 4x$ (i tampoc sin^2(x) o coses semblants que hom pogués imaginar) per a indicar (sin x)^2 o bé (cos4x)^2.
Ara, el càlcul de les funcions té precedència respecte la potenciació i, doncs, si escrivim sinx^2, igual com passa en BASIC, es calcularà (sin x)^2. També podrem escriure cos 4x ^2 per tal que es calculi (cos 4x)^2.

Tanmateix, com es feia en el cas de potències i productes, és possible emprar sempre que es vulgui els parèntesis per evitar confusions.