

Interpolació Polinòmica

Joaquim Castellsaguer i Guanyabens; Carles Bailo i Mompart; Carles Barceló i Vidal; Antoni Gomà i Nasarre; Ferran Ruiz i Tarragó; Joan Antoni Sellarès i Chiva

Programa d'Informàtica Educativa, 1988.

1. TEMÀTICA
2. OBJECTIUS
3. FONAMENTACIÓ TEÒRICA
4. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC
5. CONEIXEMENTS PREVIS
6. NIVELL
7. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA
8. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA
9. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT
10. NOTES SOBRE EXEMPLES

1. TEMÀTICA:

Interpolació polinòmica global d'una sèrie de dades.

2. OBJECTIUS

Es tracta de dos programes dedicats a la interpolació, aquest a la interpolació global i l'altre a les interpolacions a trossos. L'objectiu és facilitar la comprensió d'aquest concepte bàsic del càlcul numèric i fer possible el seu ús efectiu, concretat en aquest primer programa en els següents aspectes:

- Obtenir el polinomi d'interpolació d'una sèrie de dades.
- Calcular valors aproximats d'una magnitud a partir d'un conjunt discret de dades empíriques.
- Mostrar el significat gràfic de la interpolació.
- Observar les variacions produïdes en afegir noves dades o en modificar les existents.

No entra dins dels objectius del programa el comentari dels diversos mètodes de construcció del polinomi d'interpolació i el seu aprenentatge, que comporta grans dificultats de notació algebraica. Això no obstant, en un context informàtic els algorismes d'interpolació constitueixen exce lents exercicis de programació.

3. FONAMENTACIÓ TEÒRICA

Donat un conjunt de n parells $(x(i), y(i))$ de nombres reals, on tots els $x(i)$ són diferents, existeix un polinomi P de grau $n-1$ i un de sol tal que

$$P(x(i)) = y(i) \text{ per a } i=1, 2, \dots, n$$

Els parells $(x(i), y(i))$ s'anomenen dades de la interpolació i P és el seu polinomi d'interpolació global.

Gràficament l'obtenció de P correspon al traçat d'una corba analítica que passi per cadascun dels punts en què es representen les dades.

4. PLANTEJAMENT METODOLÒGIC

El context d'aquest programa és la introducció dels mètodes de l'anàlisi numèrica. Aquests, dins de l'àmbit de l'ensenyament secundari, poden estructurar-se al voltant de quatre problemes:

- El càlcul explícit dels valors numèrics de les funcions elementals o de funcions amb expressió analítica coneguda (abordable a partir de la teoria de Taylor).
- El càlcul explícit de valors numèrics de funcions tabulades i l'expressió analítica de les quals no es coneix en principi (problema de la interpolació pròpiament dit)
- La resolució aproximada d'equacions algebraiques o transcendents.
- El càlcul numèric d'integrals.

Entre aquests problemes existeixen diverses interrelacions, entre les quals cal mencionar aquí les que lliguen estretament la interpolació amb la integració numèrica i les que la situen en concurrència amb els mètodes de Taylor i que permeten d'avaluar l'adequació de cadascuna als objectius perseguits.

El problema de la interpolació té un evident parentiu amb el de l'ajust, ja que ambdós es proposen l'organització sota una forma matemàtica d'un conjunt de dades, però s'oposen en la prioritat concedida a la simplicitat de la funció i a la seva proximitat a les dades que consideren.

5. CONEIXEMENTS PREVIS

Convé que l'alumne tingui present:

- El problema de la interpolació i les situacions reals en què es presenta.
- L'existència i unicitat del polinomi d'interpolació global.
- El concepte d'extrapolació i les seves dificultats.
- Les formes bàsiques de les gràfiques de les funcions polinòmiques.

6. NIVELL

Malgrat que en la programació actual el tema de la Interpolació sigui citat tan sols a C.O.U., les seves exigències matemàtiques no són grans i permeten d'incloure'l en una introducció al Càlcul numèric feta amb anterioritat.

7. ESTRUCTURA DEL PROGRAMA

Queda reflectida en el diagrama de la figura 1, on es pot veure l'estructura bàsica del menú amb 7 opcions, els moments d'introducció de dades i les possibilitats de sortida. El final de cadascuna de les opcions porta de nou al menú principal, i permet recórrer-lo en qualsevol ordre. Quan el conjunt inicial de dades és modificat per l'execució de les opcions 5 o 6, els seus valors són conservats fins a després de la visualització de la gràfica, quan un missatge demana si volem continuar amb les dades actuals o retornar a les anteriors. En tots els casos les dades que no són elegides es perden a partir d'aquest moment.

8. IMPLEMENTACIÓ DIDÀCTICA

El programa es pot inserir en diversos moments d'una explicació sobre el problema i mètodes de la interpolació.

Al principi, pot motivar l'interès dels alumnes pel tema tractat, presentant la seva versió gràfica que és la més vistosa i la més susceptible d'encuriosir. Un cop els alumnes coneixen el mecanisme de la interpolació, serveix per comprovar resultats obtinguts pels procediments de càlcul habitual i per observar certes particularitats no gaire satisfactòries de la interpolació polinòmica global, que passen generalment desapercebudes en una explicació convencional que sempre és molt més "regular" que la realitat.

Més endavant, els alumnes poden utilitzar el programa, especialment la seva vessant gràfica, per experimentar -fins i tot lúdicament- els efectes de la variació de dades, i també poden servir-se'n com d'una eina per a plantejar els seus propis problemes. En aquest cas caldrà que investiguin i proposin possibles fonts de dades (experiments científics, sèries temporals, etc...), recullin les dades, les preparin per al seu tractament i les dotin d'un origen i d'una escala convenients, formulin els objectius a aconseguir i interpretin les conclusions obtingudes. L'heterogeneïtat de les dades que poden intervenir fa que tot aquest procés no quedi confinat en el marc de les matemàtiques i penetri en camps disciplinaris molt diversos.

Com a exemple, tenim a la figura 2 la gràfica obtinguda per interpolació a partir de les dades percentuals de població activa en el sector de l'agricultura a Espanya entre els anys 1920 i 1983.

El programa s'inicia amb l'elecció del nombre de dades i l'entrada d'aquestes: cada dada és una parella (abscissa, ordenada) i poden introduir-se en qualsevol ordre. Convé que l'alumne porti un registre escrit de les dades, si bé en cas de dubte són accessibles acudint al punt 5 del menú.

En el menú que apareix a continuació hom troba sis opcions de treball, independents entre si, que poden combinar-se en qualsevol ordre segons l'èmfasi que vulgui donar-se a cadascuna de les idees principals.

1. Coeficients del polinomi d'interpolació

El seu interès és secundari i destinat més que res a comprovacions en casos senzills, ja que els coeficients no tenen una interpretació autònoma més enllà del segon grau. També poden introduir-se dades prèviament ajustades a una recta, una paràbola, etc. i confirmar-les per observació dels coeficients.

2 i 3. Obtenció de valors numèrics

Aquests dos punts són pràcticament idèntics, i només es distingeixen en què un proporciona les imatges de punts aïllats i l'altre, més general, permet de construir taules de valors de les quals hom tria el valor inicial, l'increment i el nombre de termes.

Amb ells s'assoleix un dels objectius primaris de la interpolació: el càlcul de valors intermedis per a una funció coneguda només per mitjà d'una taula.

Una contínua interrelació s'estableix entre aquests dos punts i la visualització gràfica del punt 4: el càlcul de valors pot anar preparant el traçat de la corba trobant alguns punts escollits i exercitant-se en la previsió dels resultats i les sorpreses que sovint comporta; d'altra banda, l'observació d'irregularitats pronunciades en la gràfica pot suggerir una investigació de la seva magnitud amb l'ajut d'aquestes dues opcions del menú.

4. Gràfica del polinomi d'interpolació

Es tracta del punt clau en el desenvolupament del programa, i s'hi creuen tots els camins d'investigació que el programa pugui proposar.

En primer lloc, permet una formulació autònoma del problema de la interpolació: obtenir una gràfica que passi per un conjunt donat de punts. Aquesta formulació general es veurà immediatament restringida: es tracta de la gràfica d'una funció. Té doncs un caràcter global que cal evidenciar a l'alumne, i que es farà més palès en el contrast amb les diverses formes d'interpolació a trossos que es presentaran en el programa a elles dedicat. Fins i tot amb aquestes restriccions les solucions són múltiples i l'exigència de que la funció sigui polinòmica és finalment la decisiva i també la responsable de les "irregularitats" de la gràfica.

L'alumne acostuma a sorprendre's d'aquestes irregularitats tan fàcils de produir i el programa ha de servir per a convèncer-lo de la seva inevitabilitat i dels motius que les ocasionen, analitzant les formes estàndard de les gràfiques polinòmiques. En aquest mateix sentit cal diferenciar clarament el problema de la interpolació i el de l'ajust; la seva comparació exemplifica la impossibilitat de conciliar la simplicitat de la funció i l'estricta acompliment de condicions de pas.

Si s'ha passat per les opcions 5 o 6 es presentarà l'ocasió de comparar les gràfiques corresponents als dos conjunts de dades. Aquesta comparació ha d'instruir l'alumne en l'alta inestabilitat de la interpolació polinòmica, deguda precisament al seu caràcter global, que pot fer repercutir qualsevol modificació en regions de la gràfica molt allunyades d'allà on s'ha produït.

Tenim dos exemples d'aquest fenomen en la seqüència d'il·lustracions 3, 4 i 5, d'una banda, i en la figura 6 d'una altra.

La delicada dialèctica regularitat-estabilitat quedarà més evidenciada en el programa "Interpolació a trossos", on figura com a tema central.

5. Modificació d'una dada

Presenta les dades actuals i demana la modificació que hom desitgi, i que es permet només quant a l'ordenada. Un ús consecutiu i múltiple d'aquesta opció permet modificar més d'una ordenada i corregir algun error comès en l'entrada de les dades.

6. Augment del nombre de dades

Permet d'afegir les dades que hom vulgui sense ultrapassar, juntament amb les anteriors, el nombre de 20. Un pas previ pel punt 2 ajuda a triar les noves dades més properes o allunyades del que correspondria amb les existents, segons es desitgi.

9. INSTRUCCIONS I COMENTARIS DE FUNCIONAMENT

El programa es posa en marxa escrivint el seu nom INTPOL.

El nombre de dades està limitat a 20 per les restriccions que imposa la pantalla a la presentació del conjunt de les dades i la saturació que amb tal nombre es produeix ja a les gràfiques. També cal tenir en compte la inestabilitat que la complexitat dels càlculs produeix fins i tot en avaluacions numèriques senzilles, i que pot desconcertar més d'una vegada. Aquesta fita pot ésser fàcilment reduïda i és convenient que, en la pràctica, el nombre de dades no sigui gran, car el temps d'execució dels algorismes és proporcional al seu quadrat.

Les gràfiques apareixen referides a dos segments graduats de forma diferent per a abscisses i ordenades, per tal que puguin utilitzar-se en la major part de situacions reals, on corresponen a ordres de magnitud molt diferents. Els punts que representen les dades de la interpolació sempre són visibles i estan especialment ressaltats; però la gràfica pot quedar parcialment fora del camp de dibuix i llavors, si es creu convenient, pot reduir-se fins a fer-se visible. També pot augmentar-se, si hom vol estudiar més detalladament algun fragment de gràfica. En aquest cas hom perdrà, generalment, la visió d'alguna de les dades.

El canvi d'escala és factible per a abscisses i ordenades separatament, i tant si en pantalla hi ha una gràfica com si n'hi ha dues, i pot reiterar-se.

L'algorisme de Lagrange és utilitzat arreu del programa per als càlculs numèrics, excepte en el càlcul dels coeficients del polinomi d'interpolació. Aquest es fa pel mètode dels coeficients indeterminats, que porta a la resolució d'un sistema d'equacions lineals. La matriu d'aquest sistema és del tipus de Vandermonde i això comporta restriccions en la magnitud de les dades que hi intervenen, per tal de prevenir la superació de la capacitat de l'ordinador.

10. NOTES SOBRE EXEMPLES

En una explicació purament matemàtica les dades poden triar-se arbitràriament. Pot ésser

interessant començar amb dues i anar-ne afegint progressivament mitjançant l'opció 6.

La presentació gràfica serà millor si a les abscisses extremes no els corresponen ordenades extremes.

L'oscil·lació de la gràfica acostuma a ésser menys pronunciada si la correspondència abscisses-ordenades és monòtona i augmenta com més infraccions hi hagi a la monotonia, si bé el resultat concret és difícilment previsible i el professor haurà de dur els exemples suficientment preparats. Els conjunts de dades que poden produir més oscil·lació són els que presenten una dada bruscament separada d'una pauta simple, i els que obeeixen a configuracions del tipus part entera.

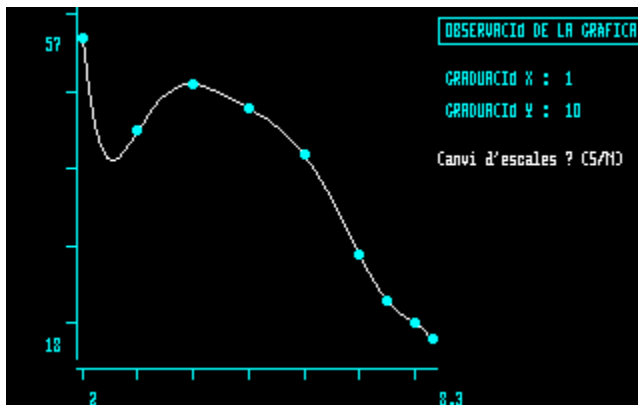


figura 2

Percentatges de població activa corresponents a l'agricultura a Espanya entre els anys 1920 i 1983. Les dades són:

1920.....	57%
1930.....	45%
1940.....	51%
1950.....	48%
1960.....	42%
1970.....	29%
1975.....	23%
1980.....	20%
1983.....	18%

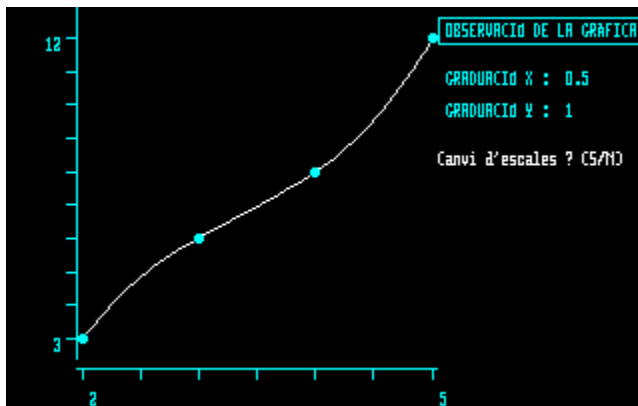


figura 3
 Interpolació sobre les dades (2,3), (3,6), (4,8) i (5,12)

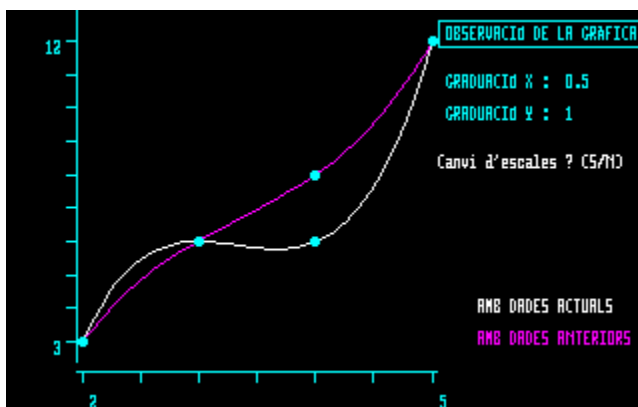


figura 4
 Modificació de la gràfica anterior al canviar (4,8) per (4,6)

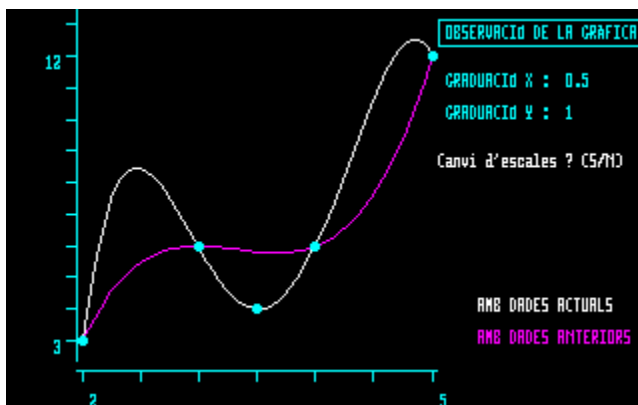


figura 5
 Modificació de la gràfica anterior a l'afegir la dada (3.5,4)

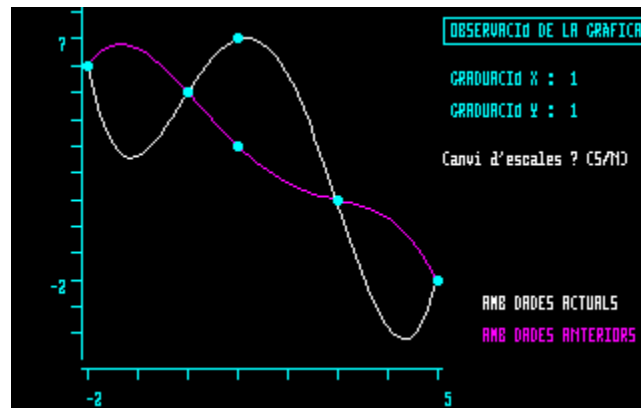


figura 6

Un canvi: $(-2,6)$, $(0,5)$, $(1,3)$, $(3,1)$ i $(5,-2)$ al posar $(1,7)$