

Composició de funcions. Deformacions gràfiques.

T. Campoy Maldonado; S. Manrique Catalán; E. Cabal García
Programa d'Informàtica Educativa, 1990.

1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

- 1.1 Títol
- 1.2 Autors
- 1.3 Tema
- 1.4 Assignatura
- 1.5 Nivell escolar
- 1.6 Coneixements previs
- 1.7 Localització
- 1.8 Noms dels fitxers

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

- 2.1 Posta en marxa
- 2.2 Opcions bàsiques
- 2.3 Diagrama estructural
- 2.4 Instruccions. Interacció

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

- 3.1 Objectius
- 3.2 Metodologia d'ús
- 3.3 Opcions i exemple d'ús

1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

1.1 Títol

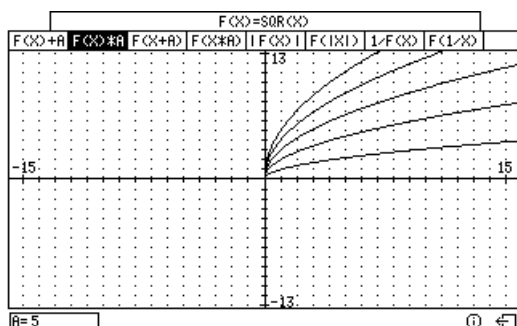
COMPOSICIÓ DE FUNCIONS.
DEFORMACIONS GRÀFIQUES

1.2 Autors

T. Campoy Maldonado
S. Manrique Catalán
E. Cabal García
Col.labora: Grup ABAX

1.3 Tema

Aquest programa permet la representació gràfica d'una funció definida en forma explícita per l'usuari, amb les possibilitats de triar l'escalat convenient i augmentar o reduir posteriorment la zona visualitzada.



El programa permet comparar de forma gràfica una funció qualsevol -denominada bàsica - $F(x)$, amb algunes de les seves deformacions:

$$F(X)+A \quad F(X)*A \quad F(X+A) \quad F(X*A) \\ |F(X)| \quad F(|X|) \quad F(1/X) \quad 1/F(X)$$

De la mateixa manera és possible comparar gràficament la funció bàsica o qualsevol deformació de les anteriors, amb una altra funció, si es desitja.

1.4 Assignatura

Matemàtiques

1.5 Nivell escolar

Segon i tercer de B.U.P. i C.O.U.

Tercer, quart i cinquè curs de F.P.

1.6 Coneixements previs

Per començar és aconsellable conèixer els conceptes associats al pla cartesià i la seva representació gràfica: coordenades, eixos,... També és aconsellable conèixer les funcions que cal representar i els conceptes associats a la representació gràfica de funcions.

Així mateix s'ha de conèixer la notació prevista pel programa per introduir expressions. (Veure apartat 2.4). A l'apartat d'instruccions i d'interacció es comenten algunes d'aquestes normes.

Per a un primer nivell d'utilització és convenient saber què és una funció, i conèixer la funció que es vol estudiar. També s'han de conèixer els conceptes relacionats amb el pla cartesià, origen i eixos de coordenades i nocions sobre domini i recorregut d'una funció.

Per a un segon nivell és convenient conèixer les funcions: trigonomètriques, exponencial, logaritme, valor absolut i arrel quadrada, ... les funcions fonamentals. Així com tenir clares les nocions sobre els números reals i el concepte de variable (la qual sempre serà designada mitjançant una X). Haver estudiat les operacions amb funcions; suma, producte, composició..., conèixer els conceptes de simetria, translació, període, amplada, i d'altres conceptes relacionats amb els aspectes gràfics d'una representació.

1.7 Localització

Aquesta unitat es troba en el disc amb l'etiqueta
GRAF123 UNITAT 5
COMPOSICIÓ DE FUNCIONS.
DEFORMACIONS GRÀFIQUES.

1.8 Noms dels fitxers

La unitat 5 està formada pels següents arxius:

Programa:

GRAFU5.EXE

Altres arxius:

PORTADA.BIN LETD U5-STANG.SCG U5P1.SCT U5P2.SCT

Arxius de les pàgines d'ajut i documentació:

U5D1.SCT U5D2.SCT U5D3.SCT U5D4.SCT U5D5.SCT

U5D6.SCT U5D7.SCT U5D8.SCT U5D9.SCT U5D10.SCT

U5I1.SCT

U5I2.SCT U5I3.SCT U5I4.SCT U5I5.SCT

U5I6.SCT

U5I7.SCT U5I8.SCT U5I10.SCT U5I11.SCT

U5I12.SCT U5I13.SCT

2 Instruccions de funcionament

2.1 Posta en marxa

Per executar la unitat 5 es pot triar alguna de les següents tres possibilitats:

a) Disposar d'un disquet a la boca A amb tots els arxius assenyalats.

A continuació executar el programa GRAFU5.EXE

b) Copiar al disc C tots els arxius en un subdirectori.

Cal accedir al subdirectori i executar el programa GRAFU5.EXE

c) Instal·lar al disc C.

Instal·lar el programa amb els seus arxius.

A continuació accedir a l'opció corresponent dels menús que apareixen a la pantalla.

2.2 Opcions bàsiques

Un cop en marxa, el programa espera que premeu qualsevol tecla.

Ens oferirà un menú amb tres opcions que permeten començar, accedir a una breu documentació o sortir.

Les tres opcions surten a la pantalla així:

COMENÇAMENT

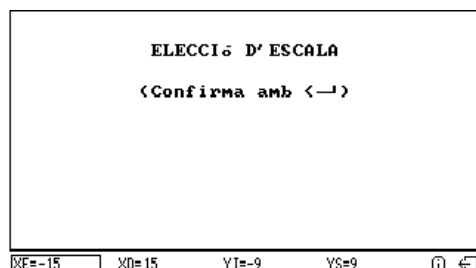
DOCUMENTACIÓ

SORTIDA

Queda assenyalada amb un color diferent una opció.

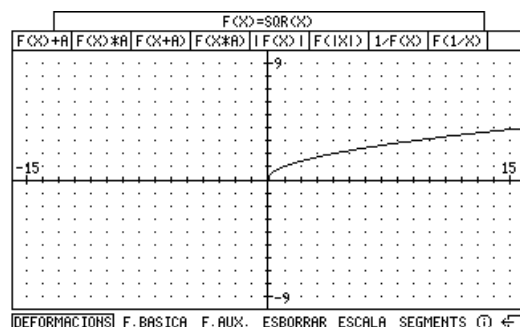
La primera és l'opció per començar, prement ↵, és activada. (Vegeu la interacció

2.4). Pregunta pel tipus d'escala i a continuació espera l'entrada d'una funció. L'objectiu bàsic i per tant l'opció bàsica del programa és la representació gràfica de funcions, i l'estudi de diferents transformacions d'aquestes funcions.



Representació gràfica de funcions.

En triar l'opció REPRESENTAR FUNCIO, el programa permet introduir una funció i, si la sintaxi és correcta, la dibuixa a la pantalla amb l'escala actual. El programa permet definir dues funcions. La primera, anomenada F, és la funció bàsica, funció que considera principal. La segona, anomenada G, és la funció considerada auxiliar.



En activar F.BASICA hom pot definir una nova funció bàsica. Igualment en activar l'opció F.AUX podem definir una nova funció auxiliar.

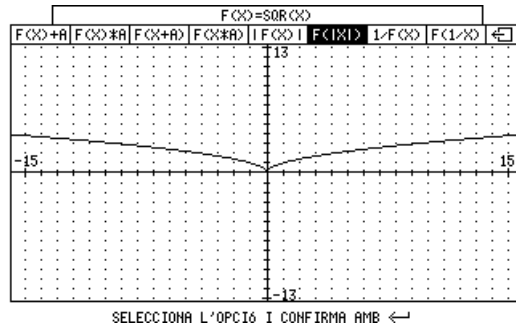
Cal introduir la funció mitjançant el teclat, tot tenint en compte que la seva sintaxi s'ha d'ajustar a les normes previstes. (Vegeu apartat 2.4).

El programa reconeix les següents funcions:

	ABS	Funció valor absolut
	ARCCOS	Funció arccosinus (Nom alternatiu: ACN)
	ARCSIN	Funció arcsinus (Noms alternatius: ARCSIN, ASN)
	ARCTAN	Funció arctangent (Noms alternatius: ATN, ARCTG)
	ARn	Funció arrel n-èsima n ha de ser un nombre enter
	COS	Funció cosinus
	EXP	Funció exponencial de base "e"
	INT	Funció part entera
	LN	Funció logaritme neperià (base e)
	LOG	Funció logarítmica de base 10
	LOGx	Funció logarítmica de base x. x ha de ser positiva.
	SGN	Funció signe (Varia entre 1, 0 i -1 en funció del signe)

de X)

SQR	Funció arrel quadrada.
SIN	Funció sinus (Nom alternatiu: SEN)
TAN	Funció tangent (Nom alternatiu TN)



Deformacions

Les modificacions que permet el programa són:

- $F(X)+A$ Aplica la funció a X calculant la seva imatge, i suma el valor d'A. És una translació paral·lela a l'eix OY.
- $F(X)*A$ Calcula el valor de la imatge de X i multiplica aquest valor per A. És una deformació de direcció l'eix OY.
- $F(X+A)$ Suma el valor d'A a X i calcula la seva imatge. És una translació paral·lela a OX.
- $F(X*A)$ Multiplica el valor d'A a X i calcula la seva imatge. Gràficament correspon a una deformació segons la direcció l'eix OX.
- $|F(X)|$ Les imatges negatives d'un valor de X són transformades en positives, les altres no canvien.
- $F(|X|)$ Dóna la imatge del valor absolut de la X. Les imatges dels valors negatius de X coincideixen amb les de valor positiu.
- $1/F(X)$ Calcula la imatge de X i després calcula el valor invers d'aquesta imatge.
- $F(1/X)$ Calcula el valor de $1/X$ i després la imatge d'aquest valor.
- A més d'aquesta opció bàsica durant l'execució del programa hom ofereix en diferents moments altres opcions com:

ESCALA

Abans de començar l'usuari haurà de decidir si utilitza l'escala estandar que se li ofereix, o bé si prefereix una altra escala. No obstant, en diferents fases del programa és possible modificar l'escala que s'estigui utilitzant. Per canviar d'ESCALA es pot fer amb les següents possibilitats:

CANVIAR

Es demanen els valors dels extrems del pla que es veurà en el monitor. Pot ser sol·licitada qualsevol regió del pla. No és imprescindible que hi estiguin inclosos els eixos. En el cas de no ser visualitzats els quatre semieixos, l'ordinador ens indica prou informació per conèixer els valors de les unitats de l'escala.

MEITATS

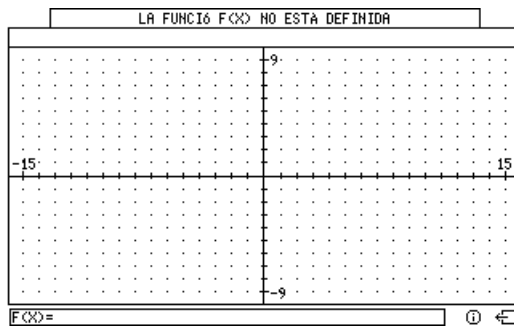
Permet visualitzar les meitats de les divisions del reticle que hi ha en pantalla; el seu objectiu és facilitar l'estudi de les gràfiques representades en un reticle on creguem que són insuficients les divisions visualitzades. Poden demanar-se els valors meitat d'un dels eixos o bé dels dos.

ESTÀNDARD

A la figura pot observar-se aquest escalat.

Els extrems d'aquesta escala són:

Eix X: -15, 15 Eix Y: -9, 9



QUADRICULAR

Aquesta opció ens permet obtenir en pantalla un reticulat on les unitats dels dos eixos siguin d'igual longitud.

Dels quatre extrems del pla s'ha d'assenyalar aquell que serà establert per l'ordinador a fi de tenir aquest reticle amb les unitats d'igual longitud en ambdós eixos. (Vegeu l'apartat 3.3)

PUNTS/SEGMENTS

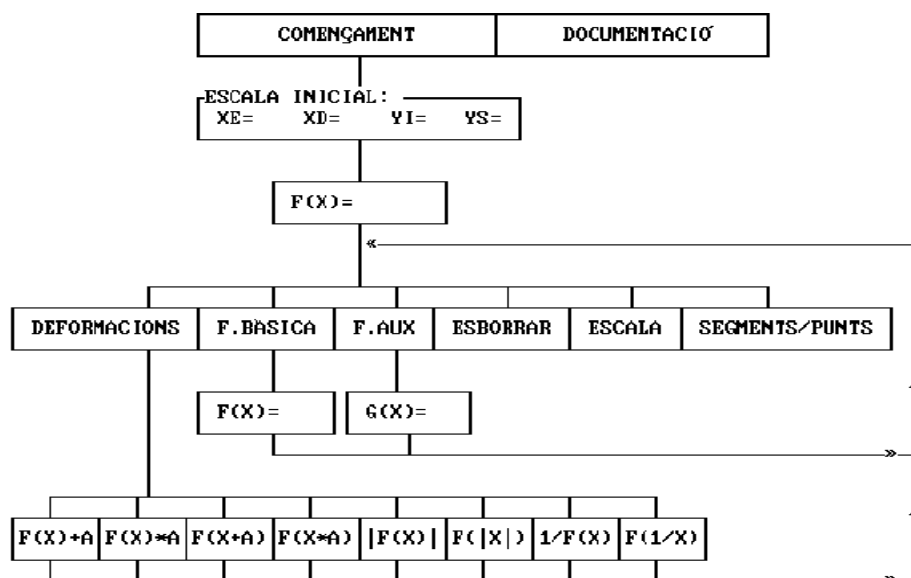
Aquesta opció commuta la forma de representació de la funció entre dues formes. En la forma PUNTS, la funció es dibuixa com una sèrie de punts (més adient per algunes funcions discontinues) i en la forma SEGMENTS, com a segments units.

ESBORRAR

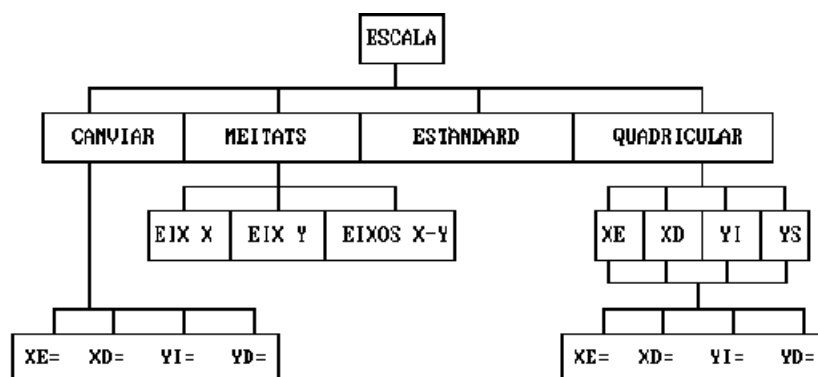
Esborra les gràfiques dibuixades i deixa només els eixos de coordenades amb l'escala actual.

2.3 Diagrama estructural

Un cop s'ha triat l'opció COMENÇAMENT el programa permet continuar tal com es detalla en el següent diagrama estructural.



El diagrama que correspon a ESCALA s'ha inclòs a continuació.



2.4 Instruccions. Interacció

A) Interacció

La interacció amb el programa segueix les característiques generals de tots el programes de GRAF123, del qual forma part.

a) Selecció d'una opció.

- Les opcions accessibles en cada instant apareixen en la part inferior de la pantalla.
- Un rectangle emmarca una d'aquestes opcions. Aquest marc pot desplaçar-se cap a la dreta mitjançant la barra espaciadora. Les tecles de moviment del cursor <-- i --> també permeten desplaçar el marc cap a l'esquerra o cap a la dreta. D'aquesta manera hom indica quina serà l'opció seleccionada.
- En prémer ↵ el programa considera seleccionada l'opció emmarcada i en prossegueix l'execució a través d'aquesta opció.

b) Informació o Ajut.

- Cada vegada que l'usuari pot interaccionar amb el programa se li ofereix

la possibilitat de sol·licitar "ajut" a través de l'opció "informació", que és representada mitjançant una "i" emmarcada per una circumferència.

- La informació proporcionada està relacionada amb la situació des de la qual es demana.

c) Sortida.

- De la mateixa manera s'ofereix la possibilitat de retrocedir a opcions anteriors. Per fer-ho cal utilitzar l'opció "sortida" que apareix a l'extrem inferior dret del monitor indicada mitjançant el símbol situat més a la dreta.

d) Entrada de valors numèrics.

Pel que fa a l'entrada de valors numèrics cal assenyalar:

- El nombre màxim de caràcters que admet és de 6.
- Només admet aquells caràcters que puguin tenir sentit en el moment de ser avaluats.
- La coma decimal s'indica mitjançant un punt (".").
- Admet fraccions. Per exemple: $5/3$, $-6/7$, etc.
- El marc indica a quina coordenada o variable s'assigna el valor introduït.
- En cas que es vulgui esborrar, pot fer-se mitjançant la tecla de retrocés. També, si es torna a una entrada quan es tecleja un valor, queda automàticament esborrat l'anterior.
- Per prosseguir l'execució del programa amb els valors introduïts, cal prémer <- quan el marc estigui sobre alguna de les variables del model.

e) Possibles errors.

Si en la pantalla no apareix la gràfica o el reticle, sense ser considerats els valors escrits, aquesta circumstància pot ser deguda a:

- La gràfica que es vol dibuixar queda fora dels límits del pla visualitzat.
- Els valors teclejats no són avaluables o no són correctes. Exemples: $5/0$, $3/$, $0./0.$, $3,2$
- Falten dades.
- El marc no es troba sobre una de les variables.
- A l'escalat del pla els extrems d'un eix s'han teclejat amb valors iguals.

B) Altres instruccions

Per introduir la funció mitjançant el teclat, s'ha de tenir en compte que la seva sintaxi s'ha d'ajustar a unes normes bàsiques.

1. Anàlisi de les expressions

El programa disposa d'un analitzador sintàctic de l'expressió que revisa la informació a mesura que hom la introdueix. Aquest control evita l'entrada d'expressions incorrectes.

Si la funció introduïda es dona per acabada quan està incompleta, el programa avisa donant l'opció de completar o abandonar el procés.

Els caràcters alfabètics poden ser teclejats en majúscules o minúscules. A la pantalla sempre apareixen en majúscules.

2. Normes d'introducció de la funció

Constants. Poden tenir fins a sis xifres. S'ha de fer servir el "." per senyalar on comencen els decimals. Els nombres positius han d'introduir-se sense el signe "+". Existeixen dues constants definides: E i PI. L'entrada de constants numèriques segueixen els mateixos criteris

que a la resta d'entrades de nombres.

Variables. El nom de la variable independent és "X"

Operadors aritmètics. Els operadors aritmètics són:

+ suma * producte
- diferència / divisió ^ potència

S'ha d'indicar sempre l'operador (inclòs el del producte: "*")

3. Parèntesis.

Els parèntesis canvien la prioritat de les operacions. L'argument d'una funció ha d'anar entre parèntesis.

4. Prioritat en les operacions.

La prioritat correspon a aquella que va indicada entre parèntesis. En segon lloc es realitzarien les operacions de potència, i a continuació el producte i la divisió, que tenen el mateix nivell de prioritat d'esquerra a dreta. Finalment en l'últim esglaó, la suma i la resta. Si hi ha més d'un operador del mateix nivell es realitzen les operacions d'esquerra a dreta.

5. Deformacions.

En activar aquesta opció pots realitzar diferents transformacions de la funció definida com a bàsica. Les transformacions possibles apareixen a la part superior a la segona línia de la pantalla, emmarcades en un rectangle.

Després d'activar aquesta opció el cursor passa a la línia superior i està a l'espera d'acceptar una opció o sortir. Si l'opció escollida demana un valor numèric la interacció retorna a la línia inferior de la pantalla i el programa espera un valor.

3 Aspectes pedagògics

3.1 Objectius

L'objectiu didàctic fonamental d'aquest programa és servir de suport i ajut en els temes relacionats amb la representació gràfica de funcions, i la transformació de funcions, comparant les gràfiques.

Un cop assimilada la relació existent entre l'expressió algebraica d'una funció i la seva representació gràfica en un pla cartesià, el programa permet observar, de manera gràfica, les deformacions que pot tenir la gràfica d'una funció quan s'afegeixen modificacions, ja en la variable independent (X), ja en la variable dependent (Y).

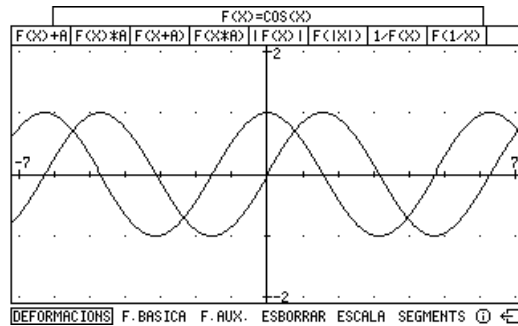
La finalitat de tot això és poder treure conclusions "a posteriori" de com afecta a una funció la introducció de modificacions en les seves variables.

Objectius més concrets dintre del mateix tema poden ser:

- Poder estudiar les funcions i les seves transformacions gràcies a la facilitat amb què s'aconsegueix la representació.
- Obtenir una més gran exactitud en la representació que la que s'obté a la pissarra.
- Estudiar intervals i zones específiques d'una funció i de la seva transformada gràcies als canvis d'escala.
- Predir i comprendre la influència que tenen sobre la gràfica d'una funció els valors dels diversos paràmetres. Estudiar la funció i la relació amb la seva

representació en el pla.

- Comparar dues funcions i veure les seves relacions gràfiques.



Estudiar la noció d'escala, i a partir de l'opció d'ESCALA altres conceptes com el d'intersecció de la funció amb els eixos, determinades discontinuïtats, ...

3.2 Metodologia d'ús

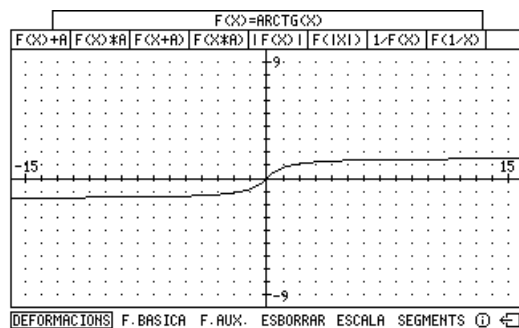
Creiem convenient dirigir l'alumne al començament davant de l'ordinador. Per fer-ho, suggerim que l'alumne posseeixi una petita documentació.

Cal fer notar que el programa com els altres programes del paquet GRAF123, no treu cap conclusió, sinó que aquesta és una feina a realitzar per part del professor o de l'alumne, segons el tipus d'utilització.

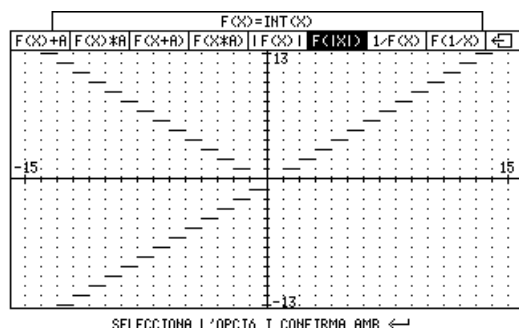
La seva utilització representa una sèrie d'avantatges respecte al mateix treball realitzat en el paper o a la pissarra: la facilitat amb què s'aconsegueixen les representacions gràfiques de les funcions, les seves transformacions i els recursos de què disposa gràcies als canvis d'escalat que permet.

Aquest ajut pot realitzar-se ja essent utilitzat a través de les explicacions del tema, ja com a mitjà de comprovació de diferents representacions gràfiques, o de les seves transformacions.

El programa pot servir d'introducció de les funcions elementals, com a comprovació de les gràfiques realitzades a classe: si són correctes, què passa si es modifica l'escala, .. (La unitat 4 està dedicada més intensament a l'estudi d'aquests aspectes).



Hom pot representar una funció, modificar els paràmetres i veure l'efecte que produeixen.



El programa permet dibuixar moltes funcions del mateix tipus i per tant familiaritzar-se amb la seva gràfica. La representació d'una mateixa funció modificant els seus paràmetres permetrà estudiar la seva influència en la seva gràfica. Aspectes concrets d'utilització d'algunes de les possibilitats d'ús d'aquest programa:

Es proposa començar a representar les funcions polinòmiques (primer les lineals, després les quadràtiques i així successivament fins al grau que es consideri oportú). Després, ampliar-ho a les funcions elementals (exponencials, logarítmiques, trigonomètriques, valor absolut, etc.).

I amb cada funció realitzar l'estudi de totes les transformacions ofertes al menú superior, i amb diferents valors pel paràmetre A.

Hom suggereix la utilització i la representació gràfica de dues funcions simultàniament per comparar la seva gràfica com és el cas de les funcions inverses, la suma de dues funcions, ...

Es poden utilitzar per a l'estudi local d'una funció, estudiant el què i el com de les variacions dels seus paràmetres; modificar l'escala i obtenir una més gran exactitud en aquest estudi.

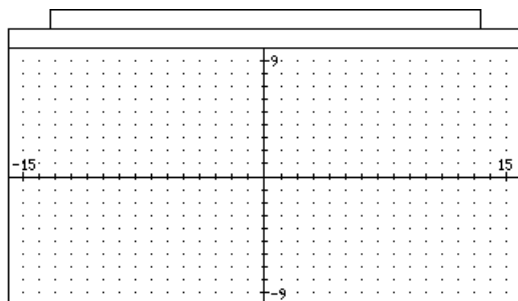
ESCALA

La utilització de l'opció d'ESCALA, permet representar una gràfica en diferents escales, visualitzar diferents zones del pla, incrementar el nombre de divisions senyalades en la pantalla, etc.

Aquesta opció permet fer observar el diferent aspecte que pot tenir una mateixa gràfica segons els valors de l'escala.

També la modificació de l'escala a conveniència, pot ajudar a assimilar conceptes relatius a escala, pla cartesià, coordenades cartesianes, representació en un pla, ...

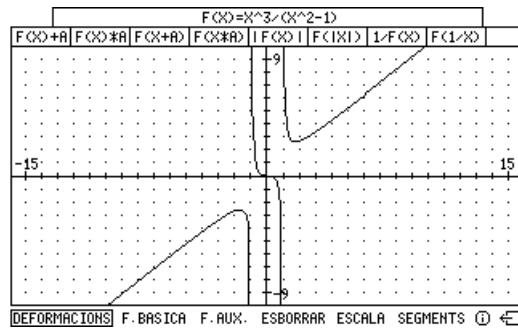
Didàcticament sembla més correcte començar treballant amb escales que mantinguin la proporció entre les unitats dels eixos.



3.3 Opcions i exemple d'ús

A continuació es proposen alguns exemples de possible utilització del programa. La interacció amb l'ordinador és la mateixa en els diferents exemples.

- Una vegada que el programa està en marxa, trieu l'opció de COMENÇAMENT.
- Apareix una pantalla que dóna opció a modificar l'escala. Si no coneixeu quin és el millor interval per definir la funció accepteu l'escala estàndar.
- A continuació, apareix un requadre perquè introduïu una funció principal, una vegada que això s'ha produït premeu ↵, i es dibuixa la funció a la pantalla.

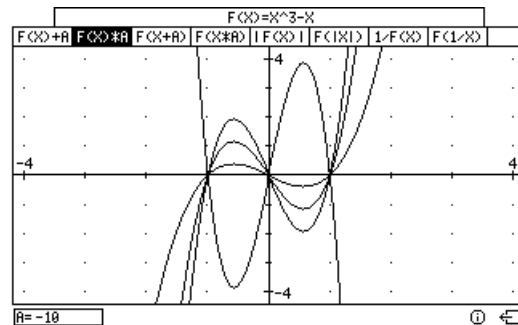


- Una vegada que la funció és dibuixada a la pantalla podeu accedir al menú de les deformacions situat a la línia superior, adaptar l'escala, estudiar els punts més significatius, o dibuixar una segona funció, ...

A continuació alguns exemples amb les imatges que els acompanyen poden il·lustrar com fer servir el programa. Hem dedicat especial atenció a la funció sinus per tenir un fil conductor durant alguns dels exemples.

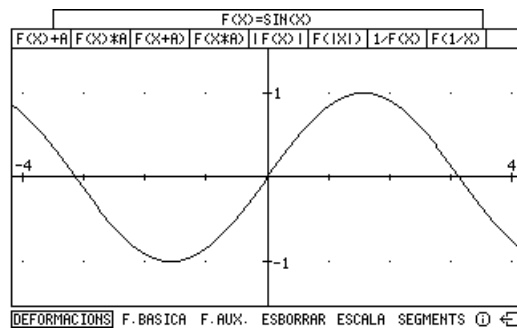
Variacions sobre la funció cúbica.

- Activeu l'opció F.BÀSICA i entreu la funció polinomi $y = x^3 - x$.



Observeu els màxims i mínims locals de la funció.

- Activeu l'opció que permet realitzar les deformacions.
- Activeu la transformació que multiplica el valor de $f(x)$ per un paràmetre a : $F(X) * A$.
- Doneu el valor 2 a l'A.
- Repetiu el procés amb diferents valors d'A:
3, -2, .5 ...
- Estudieu els valors màxims i mínims de les noves funcions, i els punts d'interseccions amb els eixos.



Interseccions de la funció sinus amb l'eix X. (Utilitza l'opció d'escala).

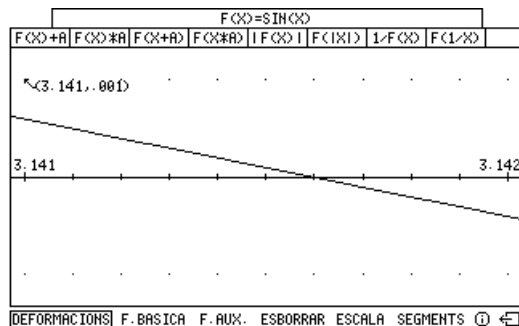
- Activeu l'opció de F.BÀSICA
- Entreu la funció sinus.
- Modifiqueu l'escala fins aconseguir obtenir un valor (aproximat) de la intersecció positiva més petita. Observeu l'escala de la figura.

Aquest valor té alguna cosa en comú amb el nombre pi?

Esbrineu quin és el valor de la següent intersecció.

Deduïu la relació entre els dos valors.

Feu una proposta sobre quin serà el valor de la següent intersecció i comproveu-ho.

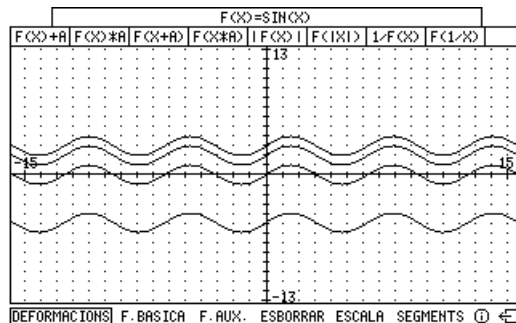


Aquesta funció és una funció periòdica?. Quin és el seu període?.

Translació d'una funció segons l'eix Y.

Una sessió podria ser la dedicada a la translació de funcions, a l'exemple de la figura la funció sinus.

- Activeu l'opció de F.BÀSICA i definiu la funció sinus.
- Activeu l'opció de DEFORMACIONS, el cursor passa a la línia superior.
- Activeu la primera de les opcions: $F(X)+A$

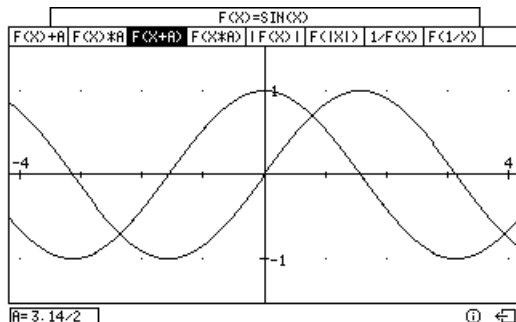


Pot observar-se que si la transformació aplicada correspon a: $F(X)+A$, variant A , la gràfica de la funció és la mateixa de la funció bàsica però s'ha modificat el seu emplaçament segons el valor d' A . D'aquestes imatges pot deduir-se la relació de la deformació i el vector de translació.

Relació entre les gràfiques de les funcions sinus i cosinus.

Coneixent les gràfiques de les funcions sinus i cosinus la pregunta que podem realitzar és: Podem realitzar una transformació de la gràfica de la funció sinus i obtenir la funció cosinus?.

- Després d'esborrar la pantalla activeu l'opció F.BÀSICA per poder introduir la funció.
- Teclegeu la funció que voleu estudiar, en aquest cas $SIN(X)$



- Premeu ↵.
- Activeu l'opció de F.AUX que correspon a la funció auxiliar i definiu la funció cosinus que correspon a la funció $COS(X)$.

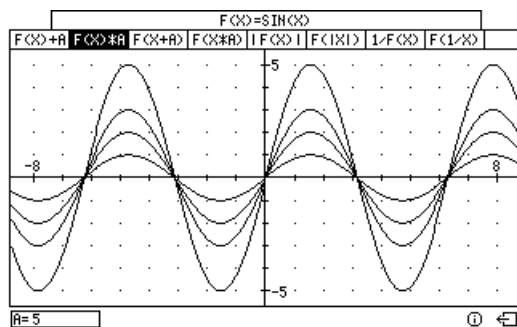
Observeu que entre les dues funcions la diferència és una translació paral·lela a l'eix X . Ara heu d'esbrinar quin és el valor d' A a la deformació corresponent: $F(X+A)$.

- Accediu al menú de les deformacions activant l'opció DEFORMACIONS.
- Activeu la segona de les deformacions, la que correspon a $F(X+A)$.
- Heu d'estudiar al valor d' A que realitza aquesta translació. Utilitzeu l'exercici referent a l'intersecció de la funció sinus amb l'eix X .

Estudi de l'amplitud de la funció sinus.

Els valors de les imatges de la funció $\sin(x)$ estan entre -1 i 1. El valor màxim és 1. Què passarà si multipliquem la imatge de la funció per un valor?. A quina transformació del menú correspon?.

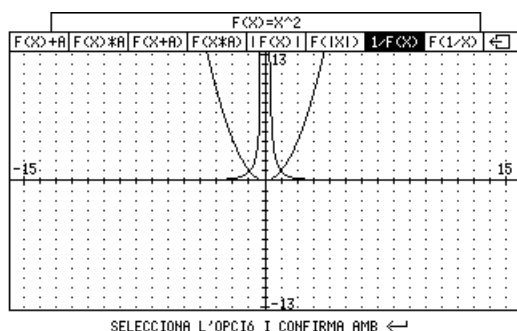
- Després d'esborrar la pantalla activeu les opcions de transformacions.
- Activeu la deformació que correspon a: $F(X)*A$.
- Doneu diferents valors al paràmetre A .



Observeu què passa.

Creixement i decreixement d'una funció i de la seva funció inversa per la multiplicació.

- Accediu a l'opció que us permet introduir una nova funció bàsica.
- Feu que la funció bàsica sigui $y = x^2$.



Aquesta funció és una paràbola, que és creixent i decreixent segons l'interval del domini considerat.

- Activeu l'opció de les deformacions.
- Activeu l'opció corresponent a la deformació que dona la inversa $1/F(X)$ per la multiplicació.

Compareu què succeeix amb les dues funcions, els intervals de creixement i decreixement de les dues funcions, la seva concavitat, ... Realitzeu un estudi més detallat en un entorn del punt zero.

El programa permet comparar de forma gràfica una funció qualsevol -denominada bàsica - $F(x)$, amb algunes de les seves deformacions:

$$\begin{array}{cccc} F(X)+A & F(X)*A & F(X+A) & F(X*A) \\ |F(X)| & F(|X|) & F(1/X) & 1/F(X) \end{array}$$

Graf123

N. Títol

- 1 La recta real i el pla cartesià.
- 2 Funció afí. Rectes.
- 3 Funció quadràtica. Paràboles.
- 4 Representació gràfica d'una funció.
- 5 Composició de funcions. Deformacions gràfiques.
- 6 Resolució gràfica d'equacions.

- 7 El pla vectorial.
- 8 L'espai vectorial.

Software Educatiu III
Programa d'Informàtica Educativa