

Funció quadràtica (Paràboles)

M.À. de Miguel; M. Gisbert ; S. Manrique

Programa d'Informàtica Educativa, 1990.

1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

- 1.1 Títol
- 1.2 Autors
- 1.3 Tema
- 1.4 Assignatura
- 1.5 Nivell escolar
- 1.6 Coneixements previs
- 1.7 Localització
- 1.8 Noms dels fitxers

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

- 2.1 Posta en marxa
- 2.2 Opcions bàsiques
- 2.3 Diagrama estructural
- 2.4 Instruccions. Interacció

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

- 3.1 Objectius
- 3.2 Metodologia d'ús
- 3.3 Opcions i exemple d'ús

1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

1.1. Títol

FUNCIÓ QUADRÀTICA (PARÀBOLES).

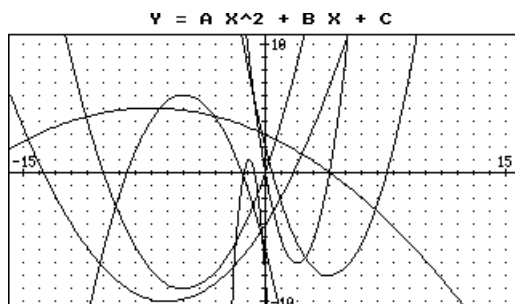
1.2 Autors

M. À. de Miguel Perez
M. Gisbert Briansó
S. Manrique Catalán

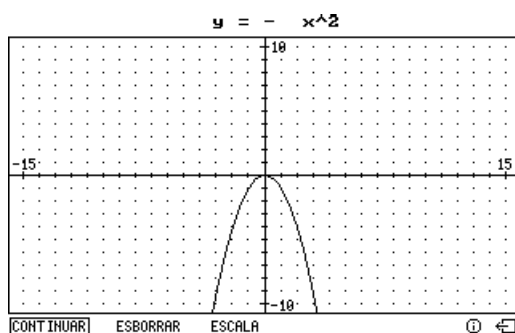
Col.labora: Grup ABAX

1.3 Tema

Aquest programa permet representar paràboles i estudiar diferents aspectes de la funció quadràtica.



Aquest estudi, permet observar la influència dels diversos paràmetres de l'equació de la paràbola sobre la seva representació en el pla. La unitat facilita l'estudi de la relació entre imatges i antiimatges d'una funció quadràtica. El programa dibuixa paràboles, ja sigui a partir dels paràmetres indicats per l'usuari, ja essent el mateix ordinador el qui, a l'atzar, els genera.



A més de dibuixar la paràbola, n'escriu l'equació.

1.4 Assignatura

Matemàtiques.

1.5 Nivell escolar

Segona etapa d'E.G.B.

Primer de B.U.P.

Primer i segon curs de F.P. I

1.6 Coneixements previs

Per començar és aconsellable conèixer els conceptes associats al pla cartesià i la seva representació gràfica, coordenades, eixos, ... El programa de totes maneres ajuda a la comprensió d'aquests conceptes.

1.7 Localització

Aquesta unitat es troba en el disc amb l'etiqueta

GRAF123 UNITAT 3

FUNCIÓ QUADRÀTICA

1.8 Noms dels fitxers

La unitat 3 està formada pels següents arxius:

Programa:

GRAFU3.EXE

Altres arxius:

PORTADA.BIN LETD U3-STANG.SCG

U3P1.SCT U3P2.SCT

Arxius de les pàgines d'ajut i documentació:

U3D1.SCT U3D2.SCT U3D3.SCT U3D4.SCT U3D5.SCT

U3D6.SCT U3D7.SCT U3D8.SCT U3D9.SCT U3D10.SCT

U3D11.SCT U3D12.SCT U3D13.SCT U3D14.SCT U3D15.SCT

2 Instruccions de funcionament

2.1 Posta en marxa

Per executar la unitat 3 es pot triar alguna de les següents tres possibilitats:

a) Disposar d'un disquet a la boca A amb tots els arxius assenyalats.

A continuació executar el programa GRAFU3.EXE

b) Copiar al disc C tots els arxius en un subdirectori.

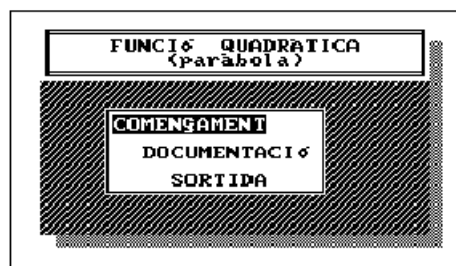
Cal accedir al subdirectori i executar el programa GRAFU3.EXE

c) Instal·lar al disc C.

Instal·lar el programa amb els seus arxius. A continuació accedir a l'opció corresponent dels menús que apareixen a la pantalla.

2.2 Opcions bàsiques

Un cop en marxa, el programa espera que premeu qualsevol tecla. A continuació oferirà tres opcions que permeten començar, accedir a una breu documentació o sortir.



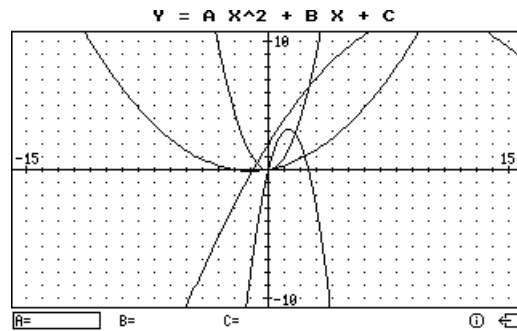
Les tres opcions surten a la pantalla així. Queda remarcada amb diferent color l'opció seleccionada. Per començar, premeu ↵, quan està seleccionada l'opció COMENÇAMENT (Vegeu la interacció apartat 2.4).

DIBUIXAR

Dibuixa la(es) paràbola(es) a partir dels paràmetres indicats per l'usuari.

Les dues possibilitats que ofereix són:

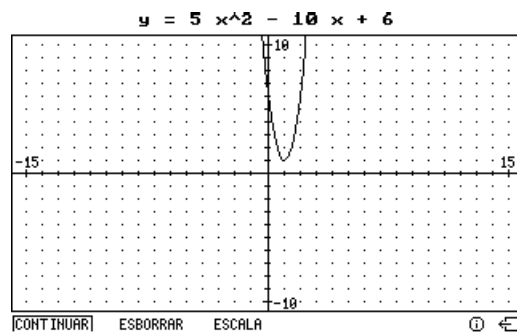
PARÀBOLES: L'ordinador ens demana els paràmetres per dibuixar una paràbola: la dibuixa i n'escriu l'equació.



FAMÍLIA DE PARÀBOLES: Permet observar l'efecte de la variació dels paràmetres de l'equació d'una paràbola.

DEMANAR.

L'usuari ha de deduir l'equació de la paràbola que és dibuixada (a l'atzar) per l'ordinador, de la qual **no** escriu l'equació fins que no li sigui demanada per l'alumne.

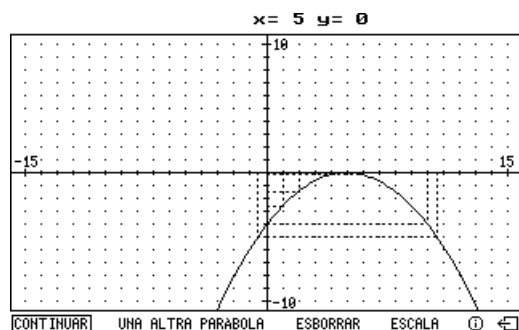


S'ha de tenir present que, per facilitar l'establiment de l'equació d'aquesta paràbola, el vèrtex de la paràbola dibuixada passa per un punt del reticle i que, si hi ha eixos, la paràbola té intersecció amb els eixos en un punt del reticle i que els valors permeten deduir fàcilment l'equació.

IMATGES-ANTIIMATGES

Es pot visualitzar la imatge o antiimatge que correspon a un valor determinat.

Dibuixa una paràbola (a l'atzar) i ens indica l'equació, mentre espera que l'usuari teclegi un valor de X o bé un valor d'Y.



A més d'aquestes opcions bàsiques, durant l'execució del programa hom ofereix en diferents moments una altra opció, l'opció d'ESCALA.

ESCALA

Abans de començar qualsevol d'aquestes opcions bàsiques, l'usuari haurà de decidir si utilitza l'escala estàndard que se li ofereix, o bé si prefereix una altra escala. No obstant, en diferents fases del programa és possible modificar l'escala que s'estigui utilitzant.

Per canviar d'ESCALA es pot fer amb les següents possibilitats:

CANVIAR

Es demanen els valors dels extrems del pla que es veurà en el monitor.

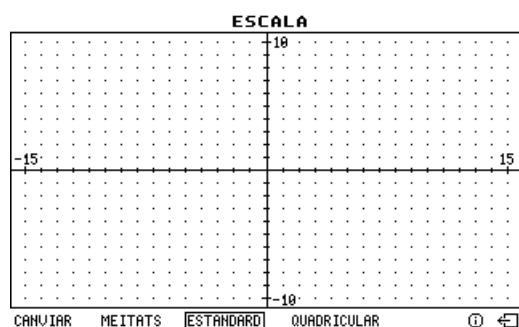
Pot ser sol·licitada qualsevol regió del pla. No és imprescindible que hi estiguin inclosos els eixos. En el cas de no ser visualitzats els quatre semieixos, l'ordinador ens indica prou informació per conèixer els valors de les unitats de l'escala (vegeu-ne alguns casos en la secció 2.3).

MEITATS

Permet visualitzar les meitats de les divisions del reticle que hi ha en pantalla; el seu objectiu és facilitar l'estudi de les gràfiques representades en un reticle on creguem que són insuficients les divisions visualitzades.

Poden demanar-se els valors meitat d'un dels eixos o bé dels dos.

ESTÀNDARD



Els extrems d'aquesta escala són:

Eix X: -15, 15

Eix Y: -10, 10

A la figura podeu veure aquest escalat.

QUADRICULAR

Aquesta opció ens permet obtenir en pantalla un reticulat on les unitats dels dos eixos siguin d'igual longitud.

Dels quatre extrems del pla s'ha d'assenyalar aquell que serà establert per l'ordinador a fi de tenir aquest reticle amb les unitats d'igual longitud en ambdós eixos.

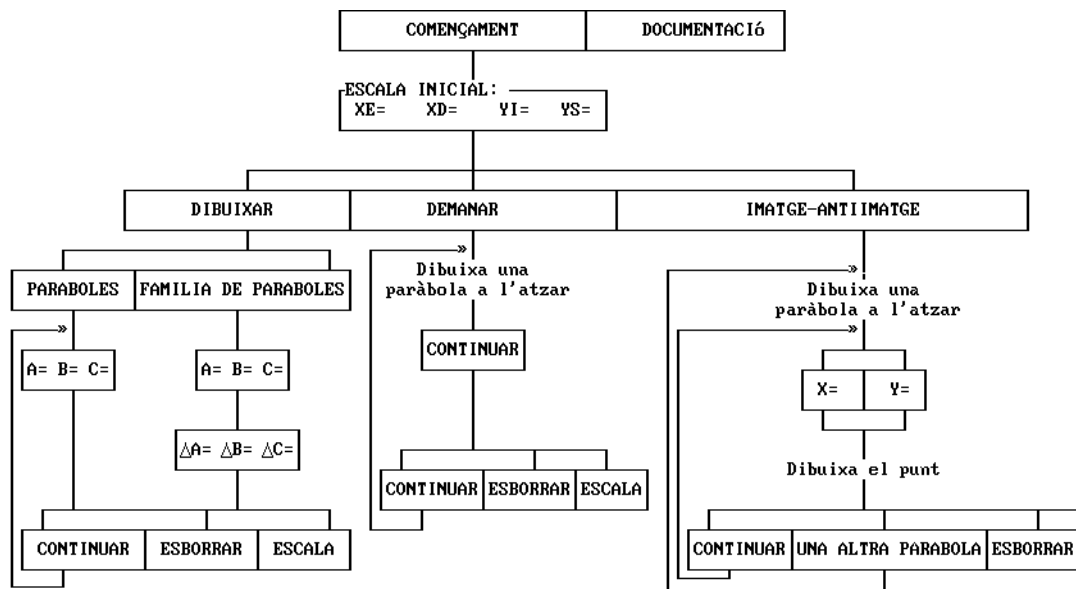
ESBORRAR

En diferents moments del programa apareix aquesta opció.

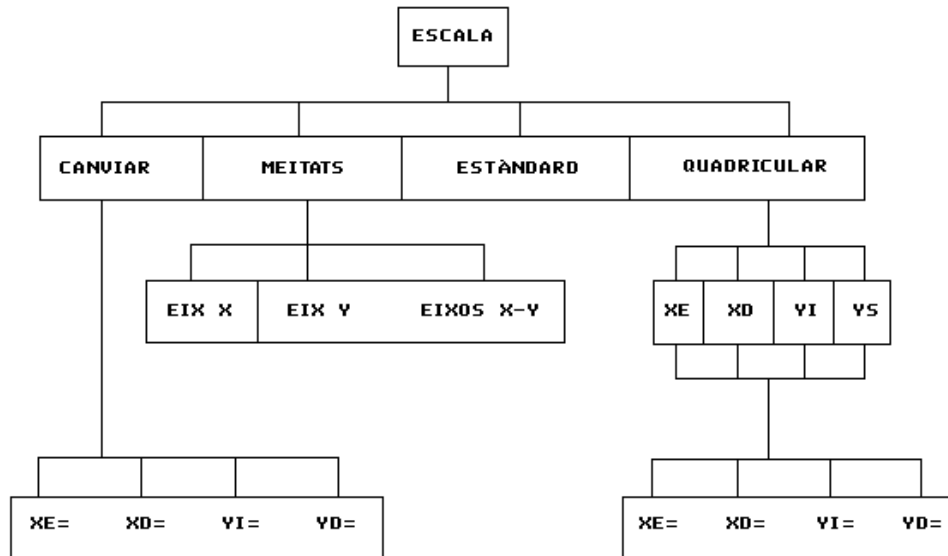
En activar-la esborra els gràfics de la pantalla i deixa els eixos i reticulat actual. (Vegeu exemples a l'apartat 3.3)

2.3 Diagrama estructural

Un cop s'ha triat l'opció COMENÇAMENT el programa permet continuar tal i com es detalla en la pàgina següent al diagrama estructural:



El diagrama que correspon a ESCALA s'ha inclòs a continuació per tal de fer més clar el diagrama anterior.

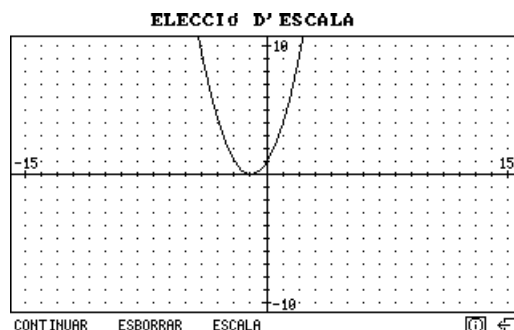


2.4 Instruccions. Interacció

La interacció amb el programa segueix les característiques generals de tots el programes de GRAF123, del qual forma part.

a) Selecció d'una opció.

- Les opcions accessibles en cada instant apareixen en la part inferior de la pantalla.
- Un rectangle emmarca una d'aquestes opcions. Aquest marc pot desplaçar-se cap a la dreta mitjançant la barra espaciadora. Les tecles de moviment del cursor <-- i --> també permeten desplaçar el marc cap a l'esquerra o cap a la dreta. D'aquesta manera hom indica quina serà l'opció seleccionada.
- En prémer ↵ el programa considera seleccionada l'opció emmarcada i en prossegueix l'execució a través d'aquesta opció.



b) Informació o Ajut

- Cada vegada que l'usuari pot comunicar-se amb el programa se li ofereix la possibilitat de sol·licitar "ajut" a través de l'opció "informació", que és representada mitjançant una "i" emmarcada per una circumferència.
- La informació proporcionada està relacionada amb la situació des de la

qual es demana.

c) Sortida.

- De la mateixa manera s'ofereix la possibilitat de retrocedir a opcions anteriors. Per fer-ho cal utilitzar l'opció "sortida" que apareix a l'extrem inferior dret del monitor indicada mitjançant el símbol situat més a la dreta.

d) Entrada de valors numèrics.

Pel que fa a l'entrada de valors numèrics cal assenyalar:

- El nombre màxim de caràcters que admet és de sis.
- Només admet aquells caràcters que puguin tenir sentit en el moment de ser avaluats.
- La coma decimal s'indica mitjançant un punt ".".
- Admet fraccions. Per exemple: $5/3$, $-6/7$, etc.
- El marc indica a quina coordenada o variable s'assigna el valor introduït.
- En cas que es vulgui esborrar, pot fer-se mitjançant la tecla de retrocés. També, si es torna a una entrada quan es tecleja un valor, queda automàticament esborrat l'anterior.
- Per prosseguir l'execució del programa amb els valors introduïts, cal prémer \downarrow quan el marc estigui sobre alguna de les variables del model.

e) Possibles errors.

Si en la pantalla no apareix la gràfica o el reticle, sense ser considerats els valors escrits, aquesta circumstància pot ser deguda.

- La gràfica que es vol dibuixar queda fora dels límits del pla visualitzat.
- Els valors teclejats no són avaluables o no són correctes. Exemples: $5/0$, $3/$, $0./0.$, $3,2$
- Falten dades
- El marc no es troba sobre una de les variables.
- A l'escalat del pla els extrems d'un eix s'han teclejat amb valors iguals.

3 Aspectes pedagògics

3.1 Objectius

L'objectiu d'aquesta unitat és:

Facilitar l'estudi de la representació de paràboles i de la funció quadràtica.

Servir d'ajut a l'explicació, permetent realitzar de forma fàcil i clara la representació d'una o varies paràboles.

Aconseguir que l'alumne entengui millor la relació entre els paràmetres i la representació gràfica de la paràbola.

Es pretén iniciar i/o consolidar conceptes que han estat desenvolupats a classe com per exemple els següents:

- Vèrtex.
- Eix de simetria.
- Intersecció amb els eixos.
- Concavitat, convexitat.
- Funció.
- Funció quadràtica.
- Imatge-antiimatge.

- Trinomi de segon grau.
- Equació de segon grau.
- Equació de la paràbola.
- Relació equació-funció-gràfica.

Per exemple de manera més específica:

- Predir i comprendre la influència que tenen sobre la paràbola els diversos paràmetres.
- Comprovar què tenen en comú les paràboles que tenen el mateix valor de C o d'A.

Practicar i realitzar exercicis sobre:

- Les diferents formes d'expressar una paràbola, i la seva representació gràfica.
- La manera d'establir l'equació d'una paràbola a partir de diverses dades com per exemple, a partir del vèrtex i la intersecció amb els eixos.
- La relació existent, en la funció quadràtica, entre imatge i antiimatge.

Estudiar la funció quadràtica i la relació amb la seva representació en el pla.

Estudiar la noció d'escala i, a partir de l'opció d'ESCALA, altres conceptes com el de concavitat d'una paràbola, i l'escala dels eixos; utilitzant diverses escales per a una mateixa paràbola.

De la mateixa manera es pot aprofitar per assenyalar aspectes relacionats amb les equacions i inequacions de segon grau.

- Inequació de segon grau.
- Relació inequació-funció associada-representació gràfica.

3.2 Metodologia d'ús

Creiem convenient dirigir l'alumne al començament davant de l'ordinador. Per fer-ho, suggerim que l'alumne posseeixi una petita documentació. Una primera proposta fa referència a la utilització de l'ordinador com a "pissarra electrònica", per a **dibuixar** amb els avantatges que se'n poden derivar.

Variar els diferents paràmetres i observar l'efecte d'aquesta variació ja que es van dibuixant les diverses paràboles proposades.

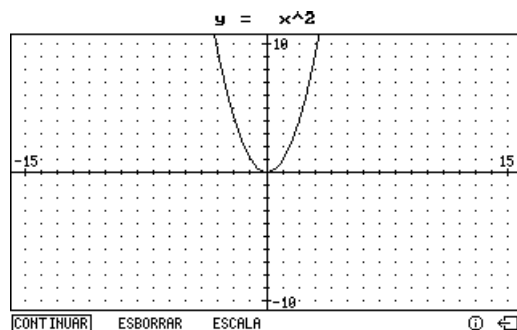
Creiem que és aconsellable que, en les primeres sessions, les dades que s'utilitzin siguin enteres, i que l'escala utilitzada sigui fàcilment interpretable. Alguns casos d'interès didàctic que es presenten en utilitzar l'opció que dibuixa són, entre d'altres:

- Paràboles que passen per l'origen.
- Equació d'una paràbola i la relació amb la seva gràfica.
- La influència dels paràmetres A, B i C
- Realitzeu aquest exercici: Donats els paràmetres de l'equació, predir els punts d'intersecció amb els eixos. Després, comproveu el càlcul en dibuixar aquesta paràbola.

A manera d'orientació el tema podria exposar-se de la forma següent:

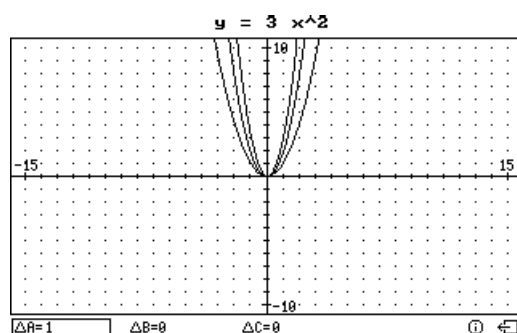
Comenceu per dibuixar la paràbola:

$$y = x^2$$



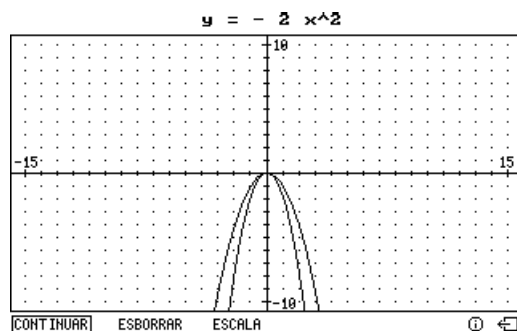
I analitzeu la influència del paràmetre A, el coeficient que acompanya a x^2 .

- Cas $y = 2 x^2$
- Cas $y = 3 x^2$
- Cas $y = 4 x^2$



L'alumne pot observar la major o menor concavitat de les diferents paràboles i com depèn del valor d'A.

Seguidament analitzeu la influència del signe del paràmetre "A" a la gràfica.



- Cas $y = -2 x^2$
- Cas $y = -3 x^2$

A continuació podeu estudiar la variació del paràmetre C i la intersecció amb l'eix Y.

- Cas $y = x^2$.
- Cas $y = x^2 + q$
($q = 1, 2, 3 \dots -1, -2, -3, \dots$)
- Cas $y = -x^2$
- Cas $y = -x^2 + q$
($q = 1, 2, 3 \dots -1, -2, -3, \dots$)

També podeu estudiar la posició del vèrtex a partir dels valors dels paràmetres

B i C.

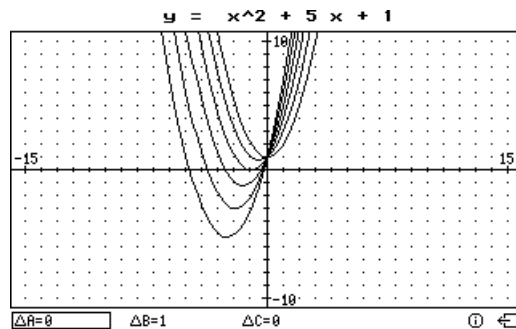
Fixeu el valor de p i representeu les paràboles:

$$y = (x - p)^2$$

$$y = -(x - p)^2$$

després varieu el valor de q .

$$y = -(x - p)^2 + q$$



Desenvolupeu el binomi, per tal d'obtenir els valors dels paràmetres corresponents.

Una segona proposta d'utilització fa referència a la possibilitat de partir del dibuix d'una paràbola i intentar esbrinar la seva equació. A l'opció de DEMANAR, l'ordinador dibuixa una paràbola (a l'atzar), de la qual **no** ens n'escriu l'equació fins que no li sigui demanada per l'alumne. D'aquesta manera es disposa del temps necessari per deduir-la.

La manera de dibuixar la gràfica permetrà insistir en la relació del vèrtex, les interseccions amb els eixos i l'equació de la paràbola. Els alumnes poden relacionar la gràfica i la seva equació, i deduir-la.

Una altra opció consisteix a estudiar la funció, les nocions d'**imatge** i **antiimatge**. A l'opció corresponent l'ordinador dibuixa una paràbola (a l'atzar) i ens n'indica l'equació, mentre espera que l'usuari teclegi un valor de X o bé un valor d' Y .

Apareixerà en pantalla el valor de X i d' Y . A més, aquestes coordenades seran assenyalades en el reticle amb línia discontinua.

Pot tenir especial interès didàctic l'estudi de la relació de la imatge d'un valor per la funció quadràtica i la seva representació al pla.

ESCALA

La utilització de l'opció d'ESCALA, permet representar una gràfica en diferents escales, visualitzar diferents zones del pla, incrementar el nombre de divisions senyalades en la pantalla, etc.

Aquesta opció permet fer observar el diferent aspecte que pot tenir una mateixa paràbola segons els valors de l'escala. També la modificació de l'escala a conveniència pot ajudar a assimilar conceptes relatius a escala, pla cartesià, coordenades cartesianes, representació en un pla, ...

Didàcticament sembla més correcte començar treballant amb escales que mantinguin la proporció entre les unitats dels eixos.

3.3 Opcions i exemple d'ús

Representació de paràboles.

a) Dibuixar la paràbola $y=x^2$

Una vegada que el programa està en marxa.

- Trieu l'opció de COMENÇAMENT, prement \downarrow quan estigui senyalada aquesta opció.

Apareix una pantalla que dóna opció a modificar l'escala estàndard.

- Accepteu l'opció d'ESCALA ESTÀNDARD, i a continuació,
- Accediu a l'opció de DIBUIXAR amb el requadre a l'opció de DIBUIXAR prement \downarrow .

Una vegada triada aquesta opció podeu accedir a dibuixar.

- Accediu a l'opció de dibuixar paràboles amb el requadre a l'opció de PARÀBOLES. Premeu \downarrow .

Entrada de paràmetres. Per dibuixar la paràbola de coeficient $A = 1$ i de coeficients B i C zero, escriurem els valors adequats.

- Heu d'introduir doncs els valors d' A , B , i C .

$$A=1 \quad B=0 \quad C=0$$

Després confirmarem els valors. L'ordinador haurà de presentar-nos la paràbola sol·licitada i, a més, n'escriurà l'equació.

Podeu observar com a continuació, després de dibuixar la paràbola, ens dóna l'opció d'escollir; per dibuixar més paràboles premeu l'opció de CONTINUAR. Si la pantalla està plena de paràboles la podeu esborrar mitjançant l'opció ESBORRAR.

b) Estudi de la modificació de la gràfica d'una paràbola en modificar el coeficient A de la paràbola.

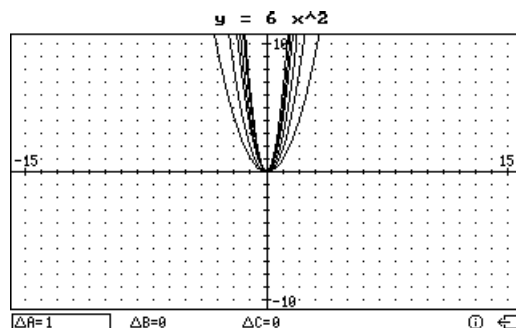
Pretenem obtenir un feix de paràboles que passen pel punt $(0,0)$.

- Doneu l'opció de SORTIDA fins arribar a la línia de menú que distingeix entre dibuixar paràboles i família de paràboles.
- Activeu l'opció de FAMÍLIA DE PARÀBOLES.

A continuació demana l'equació d'una paràbola.

- Doneu els valors:

$$A=1 \quad B=0 \quad C=0$$



Un cop dibuixada podem modificar el coeficient d' A , B o C . A l'exemple que segueix modifiquem només l' A .

$$\Delta A=1 \quad \Delta B=0 \quad \Delta C=0$$

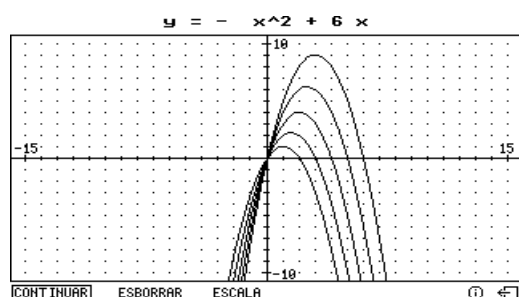
A continuació el programa representa la paràbola $y=2x^2$.

- Activant l'opció de CONTINUAR i confirmant els increments d' A , B i C es van dibuixant les diferents paràboles, $y = 3x^2$; $y = 4x^2$; formant un feix de paràboles que en aquest cas passen per l'origen.

Si esborrem la pantalla i repetim el procés però modificant ara només C ,

obindrem paràboles o famílies de paràboles amb el mateix valor d'A (concavitat) que tenen interseccions en diferents punts de l'eix Y.

c) Influència del paràmetre B a la gràfica de la funció.



El procés és semblant al cas anterior però en aquest cas l'increment de B és 1 i els de A i C són 0.

Podeu observar com varia la gràfica i més específicament en les interseccions amb els eixos de coordenades.

A la figura està representada una família de paràboles, l'última de les dibuixades és la paràbola

$$y = -x^2 + 6x$$

Estudi de l'equació d'una paràbola segons la seva gràfica.

Premeu l'opció de sortida fins al menú d'opcions bàsiques.

- Activeu l'opció bàsica de DEMANAR paràboles.

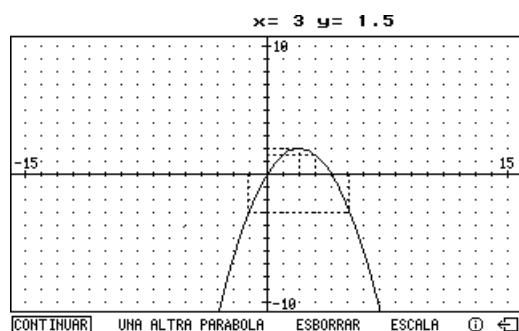
L'ordinador dibuixa una paràbola a l'atzar. No ens en mostra l'equació.

Això permet que l'usuari estudiï la seva equació. La paràbola passa per punts del reticle, amb equacions possibles de deduir.

- El programa queda a l'espera d'activar CONTINUAR. En prémer ↵, el procés que segueix és l'escriptura de l'equació.

Estudi de la imatge o de l'antiimatge d'una funció quadràtica.

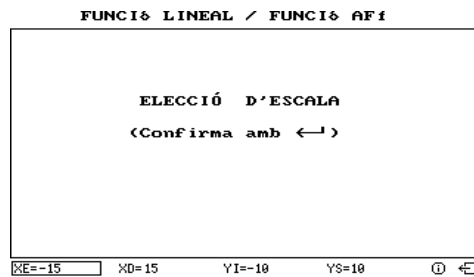
Dibuix d'una paràbola. En activar l'opció IMATGE-ANTIIMATGE l'ordinador dibuixa una paràbola (a l'atzar) i ens mostra la funció corresponent. Espera que indiquem un valor de X o bé d'Y (en l'exemple posem X=3). Indicarà en els eixos els valors de la imatge i de l'antiimatge i escriu els seus valors.



Modificació de l'escala

Aquesta opció no és una opció bàsica però pot estar motiu d'estudi en sí mateixa, començant fent exercicis sobre el tema de l'escalat sense dibuixar cap paràbola.

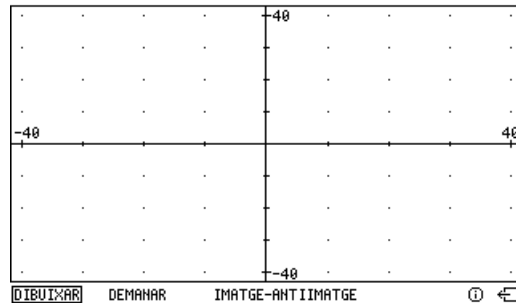
L'opció de COMENÇAMENT, ens permet definir la primera escala.



Si s'està d'acord amb la que s'ofereix (denominem estàndard a la que ofereix el programa la primera vegada), s'haurà de prémer ←. Si es vol escalar el pla amb altres valors, podem introduir-los aquí. No obstant, també és factible canviar d'escala durant el programa.

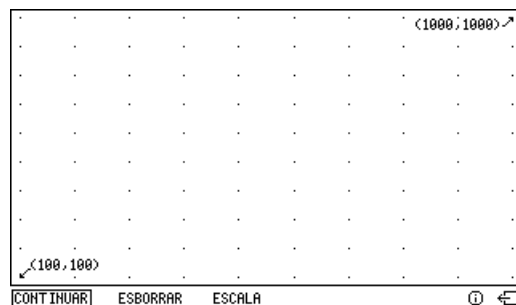
L'escala que denominem estàndard que correspon als valors d'alguns dels exemples anteriors permet veure a la pantalla els dos eixos i és proporcional la relació entre les unitats de l'eix X i Y.

Per modificar l'escala durant el programa hom ha d'escollir l'opció d'ESCALA. Podem canviar d'escala, per exemple, la corresponent a la figura següent.



XE=-40 XD=40 YI=-40 YS=40

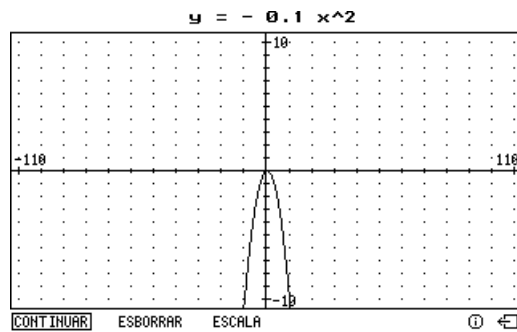
Podem escalar el pla en les formes més variades. No cal que apareguin els quatre semieixos.



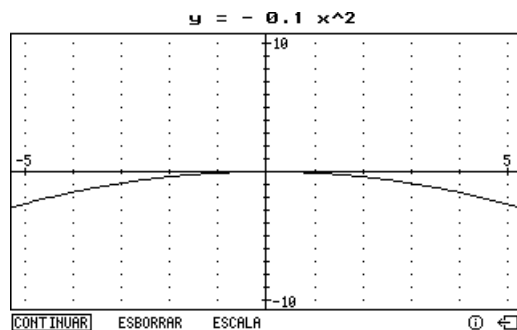
Fins i tot pot establir-se el cas en què no hi hagi eixos. En aquests casos els punts extrems del reticle són retolats amb els valors que els corresponen.

Opció ESCALA

Mitjançant l'ús de l'opció ESCALA és possible representar una paràbola en diversos valors d'escala, o bé visualitzant parts diferents del pla. Per exemple, la mateixa paràbola $y = -0.1 x^2$ la presentem en dues situacions.



Es pot observar com la proporció dels eixos influeix en la manera com es veu la paràbola a la pantalla.



Aquest programa permet representar rectes i estudiar diferents aspectes de la funció afí.

Graf123

- N. Títol
- 1 La recta real i el pla cartesià.
- 2 Funció afí. Rectes.
- 3 Funció quadràtica. Paràboles.**
- 4 Representació gràfica d'una funció.
- 5 Composició de funcions. Deformacions gràfiques.
- 6 Resolució gràfica d'equacions.
- 7 El pla vectorial.
- 8 L'espai vectorial.