Sistemes lineals i quadràtics

Carles Barceló i Vidal
Programa d'Informàtica Educativa, 1988.

1. ESPECIFICACIONS GENERALS

1.1. Temàtica

Programa per a la interpretació gràfica de les solucions d'equacions i sistemes d'equacions lineals i quadràtiques amb dues incògnites.

1.2. Nivell

BUP, COU i FP (1r i 2n grau), especialment a l'assignatura de matemàtiques. Ara bé, aquest programa és d'utilitat en qualsevol moment del desenvolupament d'una classe en el qual hom vulgui donar significació gràfica a la resolució d'una equació o d'un sistema d'equacions lineals o quadràtiques qualsevol depenent de dues incògnites.

És d'especial utilitat a l'hora de l'estudi sistemàtic dels temes Resolució d'equacions, Inequacions i sistemes de 1r curs, i Geometria mètrica plana i Còniques de 3r curs de l'actual pla d'estudis del BUP.

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

2.1. Estructura del programa

El programa està estructurat en 3 mòduls independents que en constitueixen el **Menú principal**:

- **1 Interpretació gràfica de les solucions d'equacions i sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites**.
- **2 Interpretació gràfica de les solucions d'equacions i sistemes d'equacions quadràtiques amb dues incògnites**.
- **3 Interpretació gràfica de les solucions de sistemes mixtes d'equacions quadràtiques amb dues incògnites**.
- **0 Final del programa**

Per la seva part, el **Mòdul 2** està estructurat en 6 submòduls segons el tipus d'equacions quadràtiques que hom vulgui interpretar:

- **1 del tipus $aX^2+bY^2+f=0$**
- **2 del tipus $aX^2dX+eY+f=0$**
- **3 del tipus $bY^2+dX+eY+f=0$**
- **4 del tipus $cXY+f=0$**
- **5 del tipus $aX^2+bY^2+dX+eY+f=0$**
- **6 del tipus $aX^2+bY^2+cXY+dX+eY+f=0$**
- **0 retornar al Menú principal**

Finalitzada l'execució dels **Mòduls 1** o **3**, hom retorna novament al **Menú principal**. De forma semblant, finalitzada l'execució de qualsevol dels 6 submòduls del **Mòdul 2**, el programa retorna al menú secundari d'aquest mòdul i, des del qual es pot retornar novament al **Menú principal**.

En tot moment de l'execució d'un mòdul hom retorna novament al **Menú principal** prement la tecla de funció *F2* o bé abandonar definitivament l'execució del mòdul i del programa prement la tecla de funció *F1*.
Les característiques específiques de cada un dels mòduls són les següents:

Mòdul 1

En aquest mòdul es representen exclusivament les rectes de solucions corresponents a equacions lineals del tipus $aX+bY+c=0$.

Mòdul 2

En aquest mòdul es representen gràficament les corbes de solucions corresponents a equacions quadràtiques dependents de dues incògnites.

Pel que fa referència al funcionament específic d'aquest mòdul, cal tenir en compte els següents aspectes:

a) Per tal d'ajudar a fer una primera classificació dels diferents tipus de còniques segons la forma que presenta l'expressió de l'equació quadràtica, a l'inici de l'execució d'aquest segon mòdul s'ofereix a l'usuari la possibilitat d'escollir entre 6 tipus diferents d'expressions d'equacions quadràtiques. Feta aquesta opció, totes les equacions a interpretar hauran de ser del tipus escollit. Per tant, si l'usuari vol interpretar simultàniament equacions quadràtiques de diversos tipus, haurà d'escollir l'opció 6 que recull la forma més general de l'expressió d'una equació quadràtica.

b) El programa no informa del tipus de cònica que correspon a l'equació que s'està interpretant, sinó que es limita simplement a representar-la.

c) Si la cònica es redueix a un únic punt, el programa ho comunica a l'usuari i fa una pausa obligant-lo a prémer l'espaiador per tal d'assegurar que s'ha donat compte del fet.

Mòdul 3

Aquest mòdul permet la interpretació gràfica simultània d'equacions lineals i quadràtiques.

El seu funcionament és gairebé igual al dels dos mòduls anteriors amb la particularitat que l'usuari ha d'indicar prèviament el tipus d'equació a interpretar abans de la introducció del valor dels coeficients corresponents.

Les equacions quadràtiques són tractades en la seva expressió més general. L'usuari haurà d'introduir, doncs, el valor dels 6 coeficients de l'equació.

2.2. Instruccions i comentaris de funcionament

2.2.1. Introducció de funcions

2.2.1.1. L'usuari introdueix el valor de cada un dels coeficients de l'equació a interpretar. Tot seguit el programa fa un estudi sobre la naturalesa del conjunt de solucions de l'equació. Si aquesta no té cap solució real o bé tots els punts del pla són solució de l'equació, el programa ho comunica i no la té en compte en el conjunt d'equacions a interpretar. El mateix passa si l'usuari, volent interpretar una equació quadràtica, introdueix erròniament 0 com a valor dels 3 coeficients de 2n grau de l'equació.

2.2.2. Tipus de representació

2.2.2.1. Totes les represetnacions gràfiques es realitzen sobre uns eixos graduats i centrats en la finestra gràfica.

2.2.2.2. Les representacions gràfiques són totes de tipus "proporcional", és a dir, prenent la mateixa unitat de graduació en els dos eixos de coordenades.

2.2.2.3. Les representacions s'efectuen per segments. Això fa que una gràfica pugui presentar "discontinuitats aparents" en les

2.2.3. Escala de representació. Canvi d'escala

2.2.3.1. El programa escull inicialment una escala de representació que assigna 25 punts de la pantalla a la unitat de mesura i gradua els dos eixos de coordenades de 1 en 1.

2.2.3.2. El programa ofereix a l'usuari la possibilitat de canviar l'escala de representació mitjançant la introducció d'un factor K de canvi d'escala -enter, decimal o fraccionari- que fa que el nombre de punts de l'unitat de mesura quedi multiplicat per aquest factor K. la graduació dels eixos és adaptada convenientment per tal de tenir una visió permanent de l'escala de representació amb què s'està treballant. En una de les quatre cantonades de la finestra gràfica apareix indicat el valor de les graduacions que apareixen en els eixos.

2.2.3.3. L'opció de canvi d'escala s'ofereix abans i després de la representació gràfica del conjunt de solucions de tota l'equació i també sempre que aquella no resulti visible dins la finestra gràfica.
En cas de canviar l'escala de representació, el programa reprodueix -sense intervenció de l'usuari- totes les gràfiques corresponents a les equacions interpretades fins aquell moment.

2.2.4. Trama

També s'ofereix la possibilitat de representar una trama dins la finestra gràfica per tal de localitzar més fàcilment els punts a través de llurs coordenades.

2.2.5. Representació de punts particulars

Una altra facilitat que s'ofereix a l'usuari és la possibilitat d'assenyalar punts dins la finestra gràfica. D'aquesta manera es podrà interrogar -ja sigui a priori o a posteriori- sobre el fet que determinades parelles numèriques (X, Y) siguin o no solució de l'equació que s'està interpretant. Aquesta confirmació, òbviament, s'obtindrà pel fet que la corba de solucions passi o no pel punt en qüestió. És important remarcar que el programa es limita a representar els punts indicats per l'usuari sense avaluar en cap moment si compleixen o no un a determinada equació. Si el punt a representar no fos visible dins la finestra gràfica, l'usuari seria informat d'aquest fet.

2.2.6. Introducció de valors numèrics

Tot valor numèric susceptible d'ésser manipulat algebraicament,- coeficients, paràmetres, factors de canvi d'escala...- pot ser introduït indistintament fent servir notació entera, decimal o fraccionària.

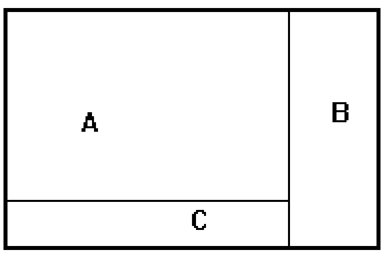
2.2.7. Errors d'introducció

El programa realitza un control immediat dels valors numèrics i caràcters entrats per l'usuari. Si es detecta un error en la introducció, l'ordinador emet un senyal acústic, esborra en la pantalla el valor introduït i reclama novament la introducció del nou valor o caràcter.

El programa no informa del tipus d'error comès per l'usuari. Els errors més habituals que es poden cometre són:
- entrar un caràcter diferent a l'esperat pel programa.
- Escriure incorrectament un valor numèric.
- Introduir un valor negatiu o nul del factor K de canvi d'escala.
- Prémer únicament la tecla *Retorn* com a resposta a la demanda d'entrada d'un valor numèric.

2.2.8. Divisió de la pantalla

A l'hora de les representacions gràfiques, el programa considera la pantalla imaginària ment dividida en 3 parts o finestres:



A) finestra gràfica o zona de representació gràfica
B) Finestra de text en la qual apareixen els textos i les preguntes a través de les quals l'usuari dialoga amb el programa.
c) Finestra de missatges permanents destinada a recordar a l'usuari la forma de sortir de l'execució del mòdul sense necessitat d'executar-lo fins al seu final.

La limitació de la finestra de text fa que el programa controli la longitud de les expressions de les funcions que han de ser presentades en aquesta finestra. Si el programa preveu que l'expressió a escriure és massa llarga, ho comunica a l'usuari oferint-li la possibilitat d'introduir novament els valors dels paràmetres que configuren l'expressió de la funció.

És important, doncs, escollir la forma més curta d'escriure un valor numèric. així, per exemple, és preferible introduir 0.1 -o fins i tot .1- en comptes de 1/10. O bé, 9/8 en comptes de 1.125.

És possible, però, que la presència d'una situació no prevista pel programa provoqui el desbordament d'un text d'excessiva llargada de la finestra de text a la qual hauria de limitar-se. Aquesta situació no comporta l'acabament de l'execució del mòdul que pot continuar amb tota normalitat.

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

3.1. Objectius general

1r) Facilitar la clara i ràpida interpretació gràfica del conjunt de solucions d'equacions lineals i quadràtiques amb dues incògnites.
2n) Facilitar la interpretació gràfica de les solucions de sistemes lineals, quadràtics o mixtes amb dues incògnites presentant-les com els punts d'intersecció de les corbes de solucions de les equacions que intervenen en el sistema.

Un objectiu secundari és el de fer veure la relació existent entre els diferents tipus d'equacions quadràtiques i els diferents tipus de còniques.

El programa no pretén ser una eina per resoldre equacions o sistemes sinó únicament i exclusiva per interpretar-los gràficament.

3.2. Coneixements previs

L'alumne ha d'entendre prèviament que una equació amb dues incògnites té una significació pròpia i que es pot parlar, des d'un punt de vista algebraic, del conjunt de solucions d'una tal equació i que aquest conjunt admet una interpretació gràfica.

Igualment ha d'entendre el concepte algebraic de "solució" d'un sistema de 2 o més equacions amb dues incògnites com a solució comuna a totes les equacions del sistema.

L'alumne haurà d'haver abordat la discussió i la resolució algebraica de sistemes lineals amb dues incògnites.

D'igual manera convé que l'alumne hagi iniciat la resolució algebraica no sistemàtica de sistemes de 2 equacions no lineals (una d'elles lineal i l'altra quadràtica, o ambdues quadràtiques).

Si bé les equacions quadràtiques del tipus $X.Y=k$ o $X^2+Y^2=r$ admeten una fàcil interpretació gràfica, els altres tipus d'equacions quadràtiques requeriran d'un estudi previ de les còniques i de les equacions que les defineixen.

3.3. Plantejament metodològic del tema

El pla d'estudis de l'assignatura de matemàtiques de l'actual ensenyament mitjà no dedica una atenció particular a les equacions amb dues incògnites. Normalment, l'alumne és dut a resoldre directament sistemes de dues o més equacions - lineals o no- amb dues incògnites sense que se li faci parar atenció en el significat intrínsec que té una equació amb dues o més incògnites i en què vol dir una solució d'una tal equació. Així, moltes vegades, l'alumne creu que una equació amb dues incògnites no té per si una sola significació pròpia si no va acompanyada per una altra equació -també de dues incògnites- formant part d'un sistema.

En el mateix context esmentem l'habitual desorientació inicial que experimenten els alumnes davant d'expressions com p.e. "equació d'una recta" o "equació d'una corba" deguda a una manca d'insistència en els conceptes relatius a llocs geomètrics i llurs equacions implícites.

Entenem necessària l'exercitació per part de l'alumne en la interpretació gràfica de les solucions d'equacions lineals i quadràtiques. En aquest últim cas, caldrà anar graduant la complexitat de les equacions a interpretar començant per les del tipus $XY=k$ i $X^2+Y^2=r$ que resulten de fàcil interpretació gràfica, per passar en cursos posteriors a l'estudi d'equacions més complexes derivades de l'estudi de les còniques i llurs equacions.

Per altra part, l'interpretació gràfica dels sistemes es redueix normalment al cas de sistemes de dues o tres equacions lineals amb dues incògnites. D'aquesta manera l'alumne pot arribar a creure, per exemple que sistemes com ara $x-y=0$, $x^2+y^2=4$, $x.y=1$ o $x.y=3$ no poden ésser interpretats gràficament. Sistemes d'aquest tipus són fàcilment interpretables gràficament fins i tot en un nivell de 1r curs de BUP i la seva pràctica resulta d'un interès pedagògic notable en permetre a l'alumne la "visualització gràfica" d'uns resultats obtinguts algebraicament.

De la mateixa manera, hi ha situacions en les que es planteja la necessitat d'optimitzar una funció -lineal o quadràtica- depenent de dues variables , condicionada a l'acompliment d'una equació de "lligam", també de tipus lineal o quadràtic. En tals casos resulta molt il.lustrativa la discussió gràfica del problema (veure apartats 3.4.2.12 i 3.4.3.6).

Es aquesta, doncs, la idea inspiradora d'aquest programa: la de relacionar com més millor les vessants algebraica i geomètrica inherents en tot procés de resolució i discussió d'equacions i sistemes d'equacions.

3.4. Metodologia d'ús

No entrarem a detallar les diferents situacions pedagògiques en les que pot resultar d'utilitat l'aplicació de cada un dels mòduls. Ens limitarem tan sols a apuntar-ne unes quantes.

3.4.1. Mòdul 1

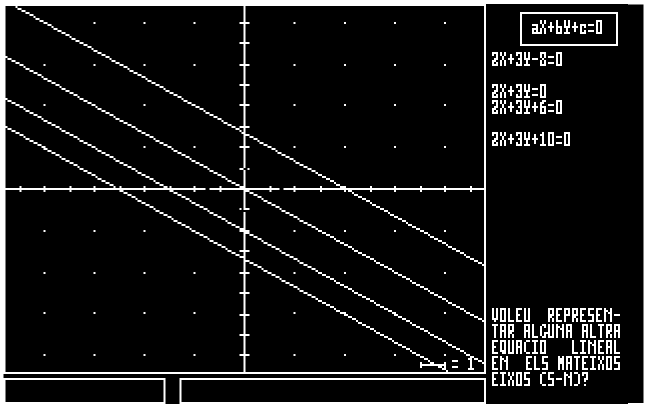
3.4.1.1. El conjunt de solucions d'una equació lineal $aX+bY+c=0$ sempre queda representar per una recta.

3.4.1.2. Les equacions =X+bY+c== (amb b><0) i aX+0Y+c=0 (amb c<>0) es representen per rectes paral.leles als eixos.

3.4.1.3. Si dues equacions lineals tenen els 3 coeficients proporcionals, llurs respectives rectes de solucions són coincidents.

3.4.1.4. Si els coeficients de X i Y de dues equacions són proporcionals i els termes independents no guarden la mateixa proporció, les respectives rectes de solucions són paral.leles no coincidents.

figura 1



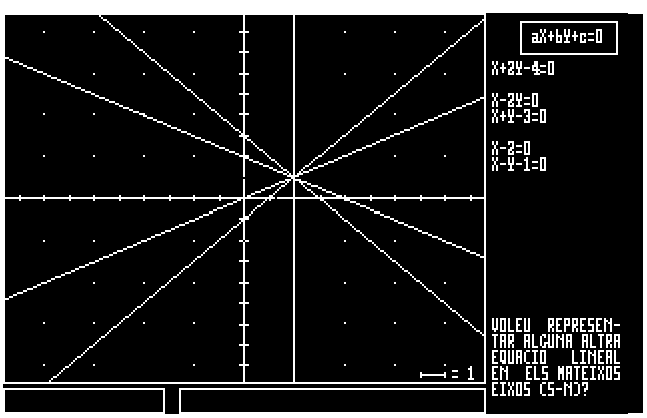
3.4.1.5. Determinació d'una equació lineal de la que en coneixem dues solucions. Aquesta situació és equivalent a la determinació d'una equació de la recta que passa per dos punts predeterminats del pla.

3.4.1.6. La solució d'un sistema de dues equacions lineals amb 2 incògnites ve representada per les dues coordenades del punt d'intersecció de les respectives rectes de solucions.

3.4.1.7. Discussió gràfica de la compatibilitat d'un sistema de 2 equacions lineals amb 2 incògnites.

3.4.1.8. Partint de dues equacions lineals"independents", tota "combinació lineal" d'aquestes, és una altra equació lineal que te entre les seves solucions la solució comuna de les dues equacions inicials (aquesta propietat justifica l'aplicació del mètode de "reducció " per a la resolució de sistemes lineals). Aquest fet pot ésser ratificat de forma gràfica veient com totes les rectes de solucions de les equacions que es van obtenint com a combinació lineal de les dues equacions inicials passen totes pel punt d'intersecció de les rectes de solucions d'aquestes últimes.

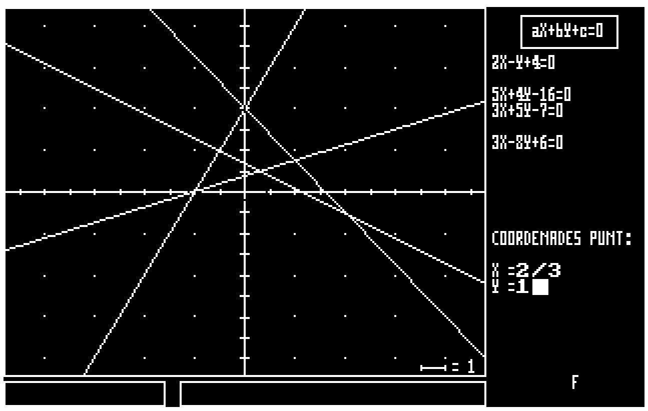
figura 2



3.4.1.9. Discussió gràfica de la compatibilitat d'un sistema de 3 equacions lineals amb dues incògnites.

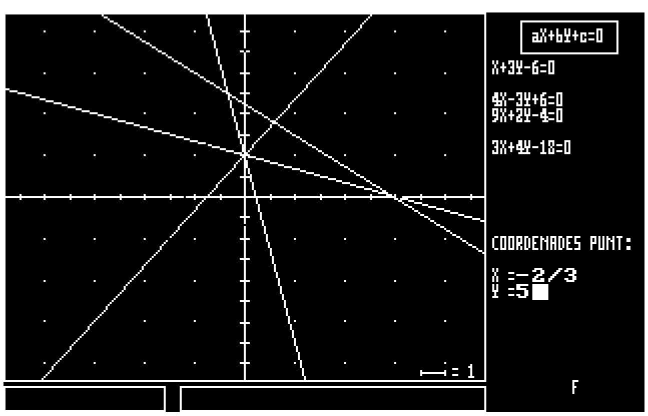
3.4.1.10. Si bé no ha estat dissenyat per a tal fi, aquest mòdul és també d'aplicació a l'hora de presentar en pantalla situacions diverses de geometria analítica del pla en les que es fa necessària una representació gràfica acurada de punts i rectes. En aquests casos la pantalla substitueix la clàssica pissarra i estalvia al professor la utilització de guixos de colors per tal de diferenciar les rectes intervinents en la representació. En la figura 3 es mostra com les 3 medianes d'un triangle es tallen en el seu baricentre.

figura 3



En la figura 4 es presenta l'ortocentre d'un triangle com el punt on es tallen les seves 3 altures (la distorsió de les còpies fetes amb impressora fa que les altures no es vegin perpendiculars a llurs respectius costats).

figura 4



3.4.2. Mòdul 2

3.4.2.1. Interpretació gràfica de les solucions d'equacions tipus $X^2+Y^2=r$.
Es tracta de que els alumnes arribin a comprendre com aquestes equacions tenen per corbes de solucions circumferències centrades en l'origen de coordenades. És convenient començar interpretant gràficament equacions com ara $X^2+Y^2=25$ o $X^2+Y^2=50$ que admeten vàries solucions enteres que els alumnes podran assenyalar en

pantalla abans de procedir a la representació gràfica de la circumferència de solucions corresponent.
Es podrà tractar també el cas particular $X^2+Y^2=0$ interrogant prèviament els alumnes sobre quina creuen que serà la gràfica corresponent a aquesta equació. la posterior representació confirmarà o no les respostes donades per aquells.

3.4.2.2. Interpretació gràfica de les solucions d'equacions del tipus X.Y=k.
De forma similar al cas anterior es tracta que, de la representació gràfica de ls corbes de solucions de múltiples equacions d'aquest tipus, l'alumne en derivi que aquelles sempre seran hipèrboles amb els eixos de coordenades com asímptotes.
És important que abans de les primeres representacions l'alumne busqui diverses solucions de l'equació que s'està tractant i les assenyali en la pantalla per tal d'adquirir una primera idea de com serà la corba de solucions.
És convenient fer veure a l'alumne la influència del signe de k en la posició de la hipèrbola respecte dels eixos. Hom podrà tractar el cas particular X.Y=0 fent primerament que el programa representi la gràfica de solucions i qüestionant tot seguit la fiabilitat del programa davant l'aparent "contradicció" de la representació obtinguda. És d'esperar que els alumnes trobin per ells mateixos la resposta a tal situació.

3.2.2.3. Interpretació gràfica de les solucions de sistemes del tipus: X.Y=k, $X^2+Y^2=r$.
L'alumne ha de començar resolent algebraicament sistemes d'aquest tipus per a diversos valors de r i k de manera que se li presentin totes les possibilitats:

- 4 solucions (p.e., r=5 i k=2);
- 2 solucions (p.e., r=8 i k=4);
- cap solució (p.e. r=2 i k=4).

Després de la resolució de cada sistema caldrà fer l'oportuna interpretació gràfica comparant les posicions de la circumferència i de la hipèrbola corresponents.

figura 5

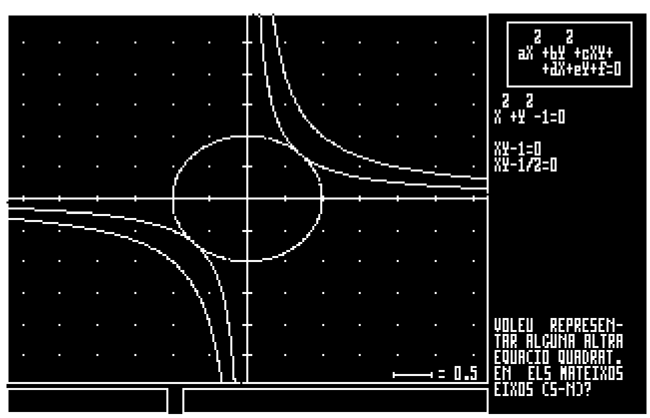
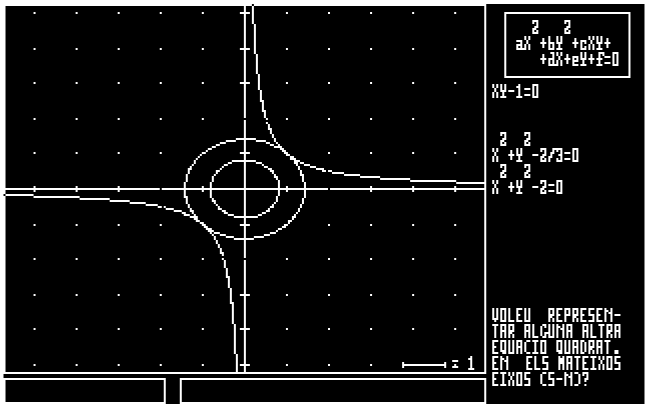


figura 6



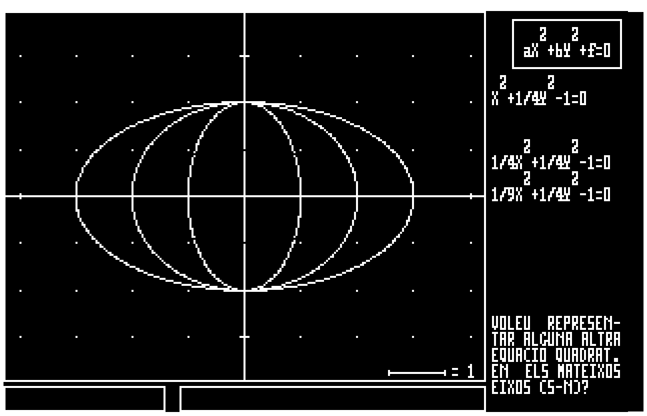
Posteriorment es podrà invertir aquest ordre començant amb la interpretació gràfica del sistema a resoldre i passant posteriorment a la seva resolució algebraica efectiva. Efectuada aquesta, es corroborarà l'exactitud dels càlculs assenyalant en pantalla els punts corresponents a les solucions obtingudes.
Pot resultar també interessant considerar els casos "anòmals" en que r i/o k són iguals a zero.

3.4.2.4. Estudi de la correspondència existent entre el valor dels coeficients de l'equació general d'una circumferència i la gràfica d'aquesta.

3.4.2.5. Estudi de la posició relativa entre dues o més circumferències.

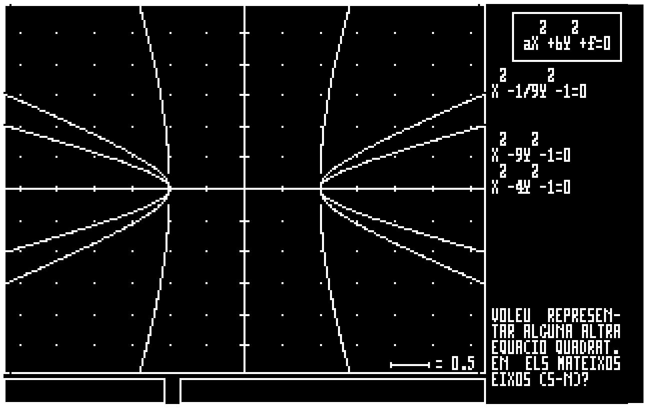
3.4.2.6. Influència del valor dels paràmetres a i b de l'equació $X^2/a+Y^2/b=1$ en la forma de ls corresponents el.lipses.

figura 7



3.4.2.7. Influència del valor dels paràmetres a i b de les equacions $X^2/a-Y^2/b=1$ i $Y^2/b-X^2/a=1$ en la forma de les corresponents hipèrboles.

figura 8



Relació entre les gràfiques d'hipèrboles conjugades.

3.4.2.8. Influència del valor i del signe del paràmetre k de l'equació X.Y=k en la forma i posició de les corresponents hipèrboles equilàteres.

3.4.2.9. Influència del valor dels paràmetres a, b i c de les equacions $Y=a.X^2+b.X+c$ i $X= a.Y^2+b.Y+c$ en la forma i posició de les corresponents paràboles.

3.4.2.10. Discussió gràfica entre el nombre de punts d'intersecció entre dues còniques.

3.4.2.11. Representació gràfica de còniques a partir de les seves equacions no referides necessàriament als seus eixos principals.

3.4.2.12. Interpretació gràfica de situacions en les que cal optimitzar una funció quadràtica de dues variables que està condicionada a l'acompliment d'una equació de "lligam" també de tipus quadràtic. Un exemple d'enunciat d'aquest tipus podria ser el següent:
"D'entre tots els quadrilàters rectangles de diagonal igual a 1 trobeu les dimensions del que té àrea màxima".

La seva resolució comporta l'optimització de la funció f(x,y)=x.y -essent x i y les dues dimensions del rectangle- subjecte a l'equació de lligam $x^2+y^2=1$ i a les desigualtats $x>=0$ i $y>=0$.(figura 5)

La resolució d'aquest problema pot acompanyar-se amb una interpretació gràfica de la situació plantejada. Prenent novament com a eina de treball l'Opció 6 d'aquest Mòdul 2, hom podrà començar representant en l'escala K=2, les solucions de l'equació $x^2+y^2=1$.
Tot seguit es tracta de fer comprendre als alumnes que cal cercar el valor positiu màxim del paràmetre a de manera que la branca positiva de la hipèrbola de solucions de l'equació x.y=a talli efectivament l'anterior circumferència de solucions. Hom pot començar representant les solucions l'equació x.y-1/4=0 i interpretar el significat de les dues solucions corresponents als dos punts d'intersecció de la branca positiva de la hipèrbola amb la circumferència. Es recalcarà la significació del paràmetre 1/4 de la hipèrbola com a àrea del rectangle.
Seguidament, la representació gràfica de les solucions de l'equació x.y=1 i l'absència

de punts d'intersecció de la corresponent hipèrbola amb la circumferència ha de portar els alumne a treure com a conseqüència la inexistència de rectangles d'àrea 1 i la diagonal també igual a 1.
Finalment cal esperar que els alumnes arribin de forma natural a la necessitat de cercar el valor del paràmetre a de manera que la hipèrbola sigui tangent a la circumferència. Aquest valor d'a correspondrà al valor màxim que pot tenir l'àrea del rectangle i gràficament resulta evident que correspon al cas en que x=y.

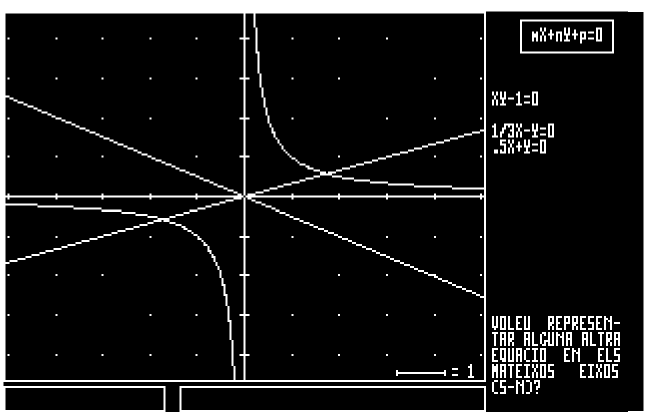
Uns altres exemples semblants a aquest i que admeten també una fàcil interpretació gràfica, són els següents:
- d'entre tots els quadrilàters rectangles d'àrea 1, buscar les dimensions del que té una diagonal de longitud mínima.(figura 6)

- d'entre tots els triangles rectangles d'àrea 1, buscar les dimensions del que té una hipotenusa de longitud mínima .
- d'entre tots els triangles rectangles inscrits en una el.lipse d'equació $X^2/4+Y^2=1$, buscar les dimensions d'aquell que té àrea màxima.

3.4.3. Mòdul 3

3.4.3.1. Interpretació gràfica de les solucions de sistemes del tipus: aX+bY=c, X.Y=k. Es tracta de que l'alumne interpreti gràficament la o les solucions obtingudes en la resolució algebraica de sistemes d'aquest tipus. Caldrà començar prenent l'equació lineal del sistema en la forma Y=m.X per tal de poder interpretar gràficament el coeficient m com el pendent de la recta de solucions i, d'aquesta manera poder decidir a priori el nombre de solucions del sistema en funció dels signes de m i k.

figura 9

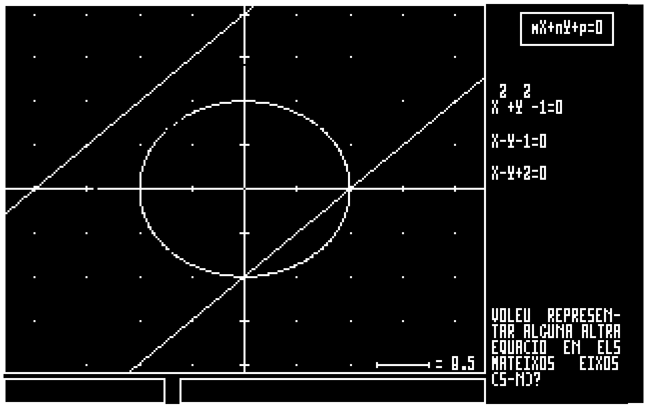


Es podrà continuar amb sistemes tals que l'equació lineal sigui del tipus Y=m.X+n.

3.4.3.2. Interpretació gràfica de les solucions de sistemes del tipus: aX+bY=c, $X^2+Y^2=r$.
De forma similar al cas anterior caldrà començar amb equacions lineals del tipus Y=m.X per passar posteriorment a les de tipus Y=m.X+n comprovant algebraicament i gràfica com el pendent m de la recta de solucions no té cap mena d'influència en el

nombre de solucions del sistema que depèn únicament del valor del paràmetre n (ordenada a l'origen de la recta de solucions).

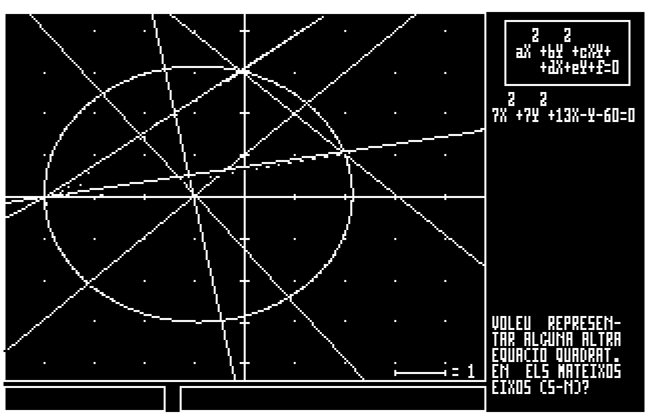
figura 10



3.4.3.2. Posició relativa d'una recta respecte d'una circumferència.
Donada una circumferència C i un punt exterior P hom pot estudiar com varia la posició relativa respecte de la circumferència C a l'anar considerant diferents valors del pendent m del feix de rectes que passen per P. Igualment, donada una circumferència C i una direcció fixa indicada per un vector v, hom pot estudiar com varia la posició relativa del feix de rectes paral.leles de direcció v al variar la seva ordenada a l'origen.

3.4.3.4. Diferents formes de determinació d'una circumferència.
En aquest cas el mòdul és aplicable si, a l'igual que en 3.4.1.10., el monitor s'entén com la "pissarra" on es van representant gràficament els diferents elements geomètrics - punts, rectes i circumferències- implicades en la situació a tractar.

figura 11



En la figura es representa la circumferència que passa per tres punts prèviament donats.

3.4.3.5. Posició relativa d'una recta respecte d'una cònica.
En particular, el cas d'una hipèrbola i les seves asímptotes, la representació de diverses

hipèrboles amb les mateixes asímptotes, etc.

3.4.3.6. Interpretació gràfica de situacions en les que cal optimitzar una funció quadràtica condicionada a l'acompliment d'una equació de lligam de tipus lineal (o a l'inrevés).

Exemples d'enunciats plantejant situacions d'aquest tipus poden ser:

- de tots els quadrilàters rectangles d'àrea 1, trobar el dimensions d'aquell que té perímetre mínim.
- de tots els quadrilàters rectangles de perímetre 4, trobar les dimensions d'aquell que té àrea màxima.
- de tots els quadrilàters rectangles inscrits en una circumferència de radi 2, trobar les dimensions d'aquell que té perímetre màxim.
- de tots els quadrilàters rectangles inscrits en una el.lipse $X^2/4+Y^2=1$, trobar les dimensions d'aquell que té perímetre màxim.

figura 12