

Representació gràfica d'una funció

S.Manrique; E. Cabal; T. Campoy

Programa d'Informàtica Educativa.

1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

- 1.1. Títol
- 1.2. Autors
- 1.3. Tema
- 1.4. Assignatura
- 1.5. Nivell escolar
- 1.6. Coneixements previs
- 1.7. Noms dels fitxers

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

- 2.1. Opcions bàsiques
- 2.2. Diagrama estructural
- 2.3. Instruccions. Interacció.

3. ASPECTES PEDAGÒGICS

ANNEX

1. CARACTERÍSTIQUES GENERALS

1.1. Títol

REPRESENTACIÓ GRÀFICA D'UNA FUNCIO.

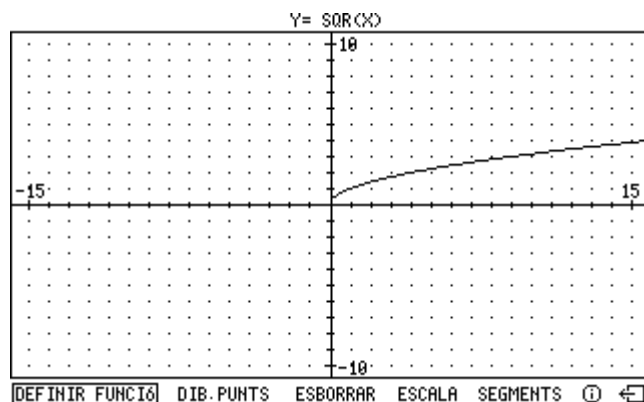
1.2. Autors

S. Manrique Catalán
E. Cabal Garcia
T. Campoy Maldonado

Col.labora: Grup ABAX

1.3. Tema

Aquest programa permet la representació gràfica d'una funció definida en forma explícita per l'usuari, amb les possibilitats de triar l'escalat convenient i augmentar o reduir posteriorment la zona visualitzada.



Aquest estudi permet observar la influència dels diversos paràmetres d'una funció i la seva representació en el pla.

La unitat facilita l'estudi de la relació entre expressions algebraiques i la seva representació gràfica així com l'estudi de la continuïtat, simetries, etc. pròpies de l'estudi de la representació gràfica d'una funció.

1.4. Assignatura

Matemàtiques.

1.5. Nivell escolar

Ensenyament secundari obligatori.

Ensenyament secundari post obligatori.

1.6. Coneixements previs

Per començar és aconsellable conèixer els conceptes associats al pla cartesià i la seva representació gràfica, coordenades, eixos, etc. També és aconsellable conèixer les funcions que s'han de representar i els conceptes associats a la representació gràfica de funcions.

Així mateix s'ha de conèixer la notació prevista pel programa per introduir expressions. (Veure apartat d'instruccions i interacció 2.3)

Per a un primer nivell d'utilització és aconsellable saber què és una funció, un polinomi i una funció polinòmica. També és aconsellable conèixer els conceptes relacionats amb el pla cartesià, origen i eixos de coordenades i tenir nocions sobre domini i recorregut d'una funció.

Per a un segon nivell és convenient estudiar les funcions trigonomètriques, exponencial, logaritme, valor absolut i arrel quadrada i tenir algunes nocions sobre els números reals i el concepte de variable (la qual sempre serà designada mitjançant una X).

1.7. Nom dels fitxers

En el disquet podeu trobar els següents arxius:

LETD	PORTADA .BIN	GRAFICA .BAT	GRAFU4 .EXE
U4-STAND .SCG	U4P1 .SCT	U4P2 .SCT	U4D1 .SCT
U4D2 .SCT	U4D3 .SCT	U4D4 .SCT	U4D5 .SCT
U4D6 .SCT	U4D7 .SCT	U4D8 .SCT	U4D9 .SCT
U4I1 .SCT	U4I2 .SCT	U4I3 .SCT	U4I4 .SCT
U4I5 .SCT	U4I6 .SCT	U4I7 .SCT	U4I8 .SCT
U4I9 .SCT	U4I10 .SCT	U4I11 .SCT	INSTAL .DAT
INSTAL .EXE	DISK .ID		

2. INSTRUCCIONS DE FUNCIONAMENT

2.1. Opcions bàsiques

Un cop en marxa, el programa espera que premeu qualsevol tecla. Ens oferirà un menú amb tres opcions que permeten començar, accedir a una breu documentació o sortir.

COMENÇAMENT
DOCUMENTACIÓ
SORTIDA

Queda assenyalada amb un color diferent una opció. La primera és l'opció per començar. (Vegeu la interacció 2.3). Pregunta pel tipus d'escala i a continuació espera l'entrada d'una funció.

L'objectiu bàsic, i per tant l'opció bàsica del programa és la representació gràfica de funcions.

REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS

En triar l'opció que representa funcions, el programa permet introduir una funció i, si la sintaxi és correcta, la dibuixa a la pantalla amb l'escala actual.

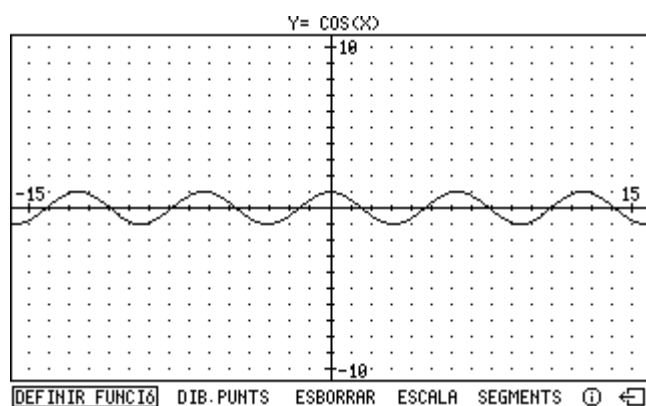
Cal introduir la funció mitjançant el teclat, tot tenint en compte que la seva sintaxi s'ha d'ajustar a les normes previstes. (Vegeu apartat 2.3).

El programa reconeix les següents funcions:

ABS	Funció valor absolut
ARCCOS	Funció arccosinus (Nom alternatiu: ACN)
ARCSIN	Funció arcsinus (Noms alternatius: ARCSIN, ASN)
ARCTAN	Funció arctangent (Noms alternatius: ATN, ARCTG)
ARn	Funció arrel n-èsima n ha de ser un nombre enter
COS	Funció cosinus
EXP	Funció exponencial de base "e"
INT	Funció part entera

LN	Funció logaritme neperià (base e)
LOG	Funció logarítmica de base 10
LOGx	Funció logarítmica de base x. x ha de ser positiva.
SGN	Funció signe (Varia entre 1, 0 i -1 en funció del signe de X)
SQR	Funció arrel quadrada
SIN	Funció sinus (Nom alternatiu: SEN)
TAN	Funció tangent (Nom alternatiu TG)

A més d'aquesta opció bàsica durant l'execució del programa hom ofereix en diferents moments altres opcions com:



DIB.PUNTS

En activar aquesta opció el programa permet dibuixar punts. S'han d'introduir les dues coordenades. Si està definida una funció i a la coordenada y es dona el valor f, representarà el punt de la funció (x, F(x)).

ESCALA

Abans de començar, l'usuari haurà de decidir si utilitza l'escala ESTÀNDARD que se li ofereix, o bé si prefereix una altra escala. No obstant, en diferents fases del programa és possible modificar l'escala que s'estigui utilitzant.

Per canviar d'ESCALA es pot fer amb les següents possibilitats.

CANVIAR

Es demanen els valors dels extrems del pla que es veurà en el monitor.

Pot ser sol·licitada qualsevol regió del pla. No és imprescindible que hi estiguin inclosos els eixos. En el cas de no ser visualitzats els quatre semieixos, l'ordinador ens indica prou informació per conèixer els valors de les unitats de l'escala.

MEITATS

Permet visualitzar les meitats de les divisions del reticle que hi ha en pantalla; el seu

objectiu és facilitar l'estudi de les gràfiques representades en un reticle on creguem que són insuficients les divisions visualitzades.

Poden demanar-se els valors meitat d'un dels eixos o bé dels dos.

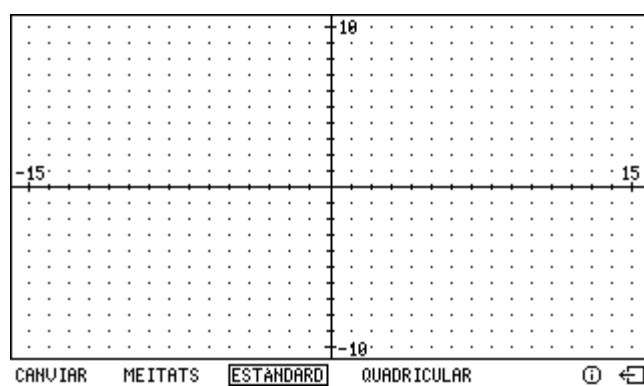
ESTÀNDARD

Els extrems d'aquesta escala són:

Eix X: -15, 15

Eix Y: -10, 10

A la figura podeu observar aquesta escala representada.



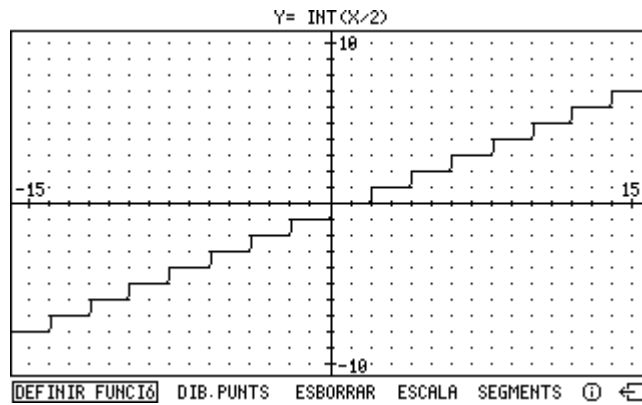
QUADRICULAR

Aquesta opció ens permet obtenir en pantalla un reticulat on les unitats dels dos eixos siguin d'igual longitud.

Dels quatre extrems del pla s'ha d'assenyalar aquell que serà establert per l'ordinador a fi de tenir aquest reticle amb les unitats d'igual longitud en ambdós eixos. (Vegeu exemples a l'apartat 3.3)

PUNTS/SEGMENTS

Aquesta opció commuta la forma de representació de la funció entre dues alternatives. En la forma PUNTS, la funció es dibuixa com una sèrie de punts (més adient per algunes funcions discontinües) i en la forma SEGMENTS, com a segments units.



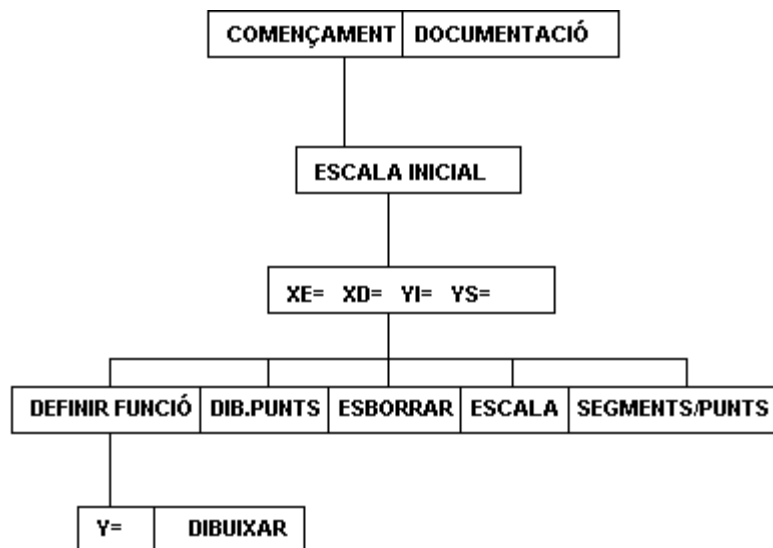
Observeu a la figura com la funció part entera en ser dibuixada a punts permet distingir clarament les discontinuïtats.

ESBORRAR

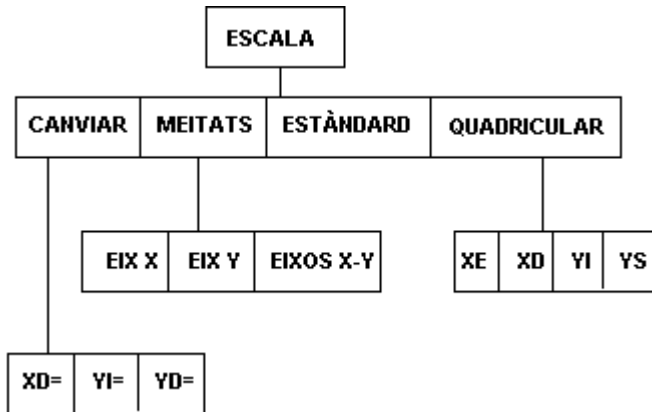
Esborra les gràfiques dibuixades i deixa només els eixos de coordenades amb l'escala actual.

2.2. Diagrama estructural

Un cop s'ha triat l'opció COMENÇAMENT el programa permet continuar tal i com es detalla en el següent diagrama estructural:



El diagrama que correspon a ESCALA s'ha inclòs a continuació per tal de fer més clar el diagrama anterior.



2.3. Instruccions. Interacció.

A) Interacció

La interacció amb el programa segueix les característiques generals de tots els programes de GRAF123, del qual forma part.

a) Selecció d'una opció.

Les opcions accessibles en cada instant apareixen en la part inferior de la pantalla.

Un rectangle emmarca una d'aquestes opcions. Aquest marc pot desplaçar-se cap a la dreta mitjançant la barra espaiadora. Les tecles de moviment del cursor \leftarrow i \rightarrow també permeten desplaçar el marc cap a l'esquerra o cap a la dreta. D'aquesta manera hom indica quina serà l'opció seleccionada.

En prémer \downarrow el programa considera seleccionada l'opció emmarcada i en prossegueix l'execució a través d'aquesta opció.

b) Informació o Ajut.

Cada vegada que l'usuari pot interaccionar amb el programa se li ofereix la possibilitat de sol·licitar "ajut" a través de l'opció "informació", que és representada mitjançant una "i" emmarcada per una circumferència.

La informació proporcionada està relacionada amb la situació des de la qual es demana.

c) Sortida.

De la mateixa manera s'ofereix la possibilitat de retrocedir a opcions anteriors. Per fer-ho cal utilitzar l'opció "sortida" que apareix a l'extrem inferior dret del monitor indicada mitjançant el símbol situat més a la dreta.

d) Entrada de valors numèrics.

Pel que fa a l'entrada de valors numèrics cal assenyalar:

El nombre màxim de caràcters que admet és de 6.

Només admet aquells caràcters que puguin tenir sentit en el moment de ser avaluats.

La coma decimal s'indica mitjançant un punt ".".

Admet fraccions. Per exemple: $5/3$, $-6/7$, etc.

El marc indica a quina coordenada o variable s'assigna el valor introduït.

En cas que es vulgui esborrar, pot fer-se mitjançant la tecla de retrocés. També, si es torna a una entrada quan es tecleja un valor, queda automàticament esborrat l'anterior.

Per prosseguir l'execució del programa amb els valors introduïts, cal prémer \downarrow quan el marc estigui sobre alguna de les variables del model.

e) Possibles errors.

Si en la pantalla no apareix la gràfica o el reticle, sense ser considerats els valors escrits, aquesta circumstància pot ser deguda a diferents raons.

La gràfica que es vol dibuixar queda fora dels límits del pla visualitzat.

Els valors teclejats no són avaluables o no són correctes. Exemples: $5/0$, $3/$, $0./0.$, $3,2$

Falten dades

El marc no es troba sobre una de les variables.

A l'escalat del pla, els extrems d'un eix s'han teclejat amb valors iguals.

B) Altres instruccions

Introduint la funció mitjançant el teclat, s'ha de tenir en compte que la seva sintaxi s'ha d'ajustar a unes normes bàsiques.

a) Anàlisi de les expressions

El programa disposa d'un analitzador sintàctic de l'expressió que revisa la informació a mesura que hom la introdueix. Aquest control evita l'entrada d'expressions incorrectes.

Si la funció introduïda es dona per acabada quan està incompleta, el programa avisa, donant l'opció de completar o abandonar el procés.

Els caràcters alfabètics poden ser teclejats en majúscules o minúscules. A la pantalla sempre apareixen en majúscules.

b) Normes d'introducció de la funció

Constants. Poden tenir fins a 6 xifres. S'ha de fer servir el "." per senyalar on comencen els decimals. Els nombres positius han d'introduir-se sense el signe "+". Existeixen dos constants definides: E i PI. L'entrada de constants numèriques segueixen els mateixos criteris que a la resta d'entrades de nombres.

Variables. El nom de la variable independent és "X"

Operadors aritmètics. Els operadors aritmètics són:

- + suma
- * producte
- diferència
- / divisió
- ^ potència

S'ha d'indicar sempre l'operador (inclòs el del producte: "*")

c) Parèntesis.

Els parèntesis canvien la prioritat de les operacions. L'argument d'una funció ha d'anar entre parèntesis.

d) Prioritat en les operacions.

La prioritat correspon a aquella que va indicada entre parèntesis. A continuació la potència, el producte i la divisió totes dues al mateix nivell. Finalment en l'últim esglaó la suma i la resta. Si hi ha més d'un operador del mateix nivell, es realitzen les operacions d'esquerra a dreta.

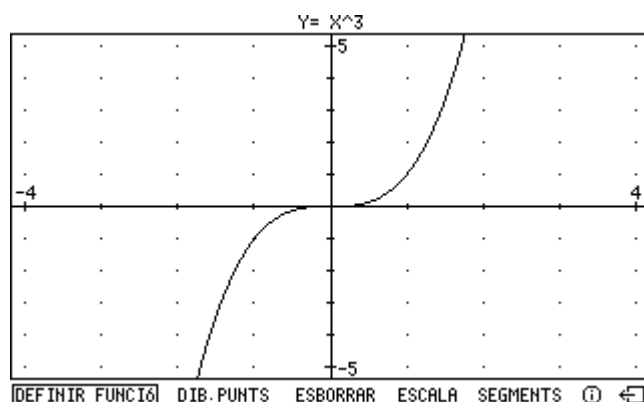
3. ASPECTES PEDAGÒGICS

3.1. Objectius

L'objectiu didàctic fonamental d'aquest programa és servir de suport i ajut en els temes relacionats amb la representació gràfica de funcions.

Aquest ajut pot realitzar-se ja essent utilitzat a través de les explicacions del tema,

ja com a mitjà de comprovació de diferents representacions gràfiques.



Objectius més concrets dintre del mateix tema poden ser:

Que l'alumne arribi a relacionar l'expressió algebraica d'una funció amb la seva representació gràfica (si més no per a funcions polinòmiques de fins a grau tres).

Poder estudiar més funcions gràcies a la facilitat amb què s'aconsegueix la representació.

Insistir en certes funcions especials (valor absolut de x , arrel quadrada de x , e elevat a x ...) que incorpora el programa.

Obtenir una més gran exactitud en la representació que la que s'obté a la pissarra.

Estudiar intervals i zones específiques d'una funció donada gràcies als canvis d'escala.

Predir i comprendre la influència que tenen sobre la gràfica d'una funció els diversos paràmetres. Estudiar la funció i la relació amb la seva representació en el pla.

Comparar dues funcions i veure les seves relacions gràfiques com les funcions exponencial i logarítmica.

Un altre aspecte que es pot cobrir parcialment en aquest programa és l'estudi local d'una funció.

De la mateixa manera, un altre aspecte no menys interessant és utilitzar aquest programa per interpretar diferents fenòmens físics que puguin expressar-se mitjançant una funció

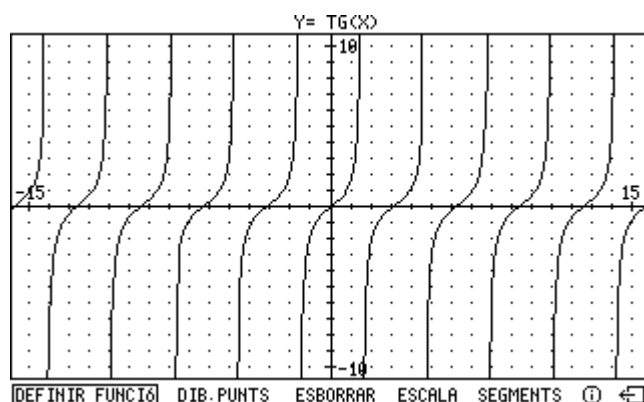
Estudiar la noció d'escala, i a partir de l'opció d'ESCALA altres conceptes com el

d'intersecció de la funció amb els eixos, determinades discontinuïtats,

3.2. Metodologia d'ús

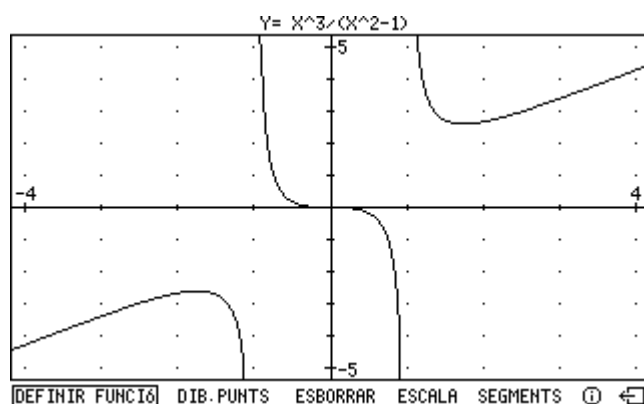
Creiem convenient dirigir l'alumne al començament davant de l'ordinador. Per fer-ho, suggerim que l'alumne posseeixi una petita documentació.

El programa pot servir d'introducció de les funcions elementals. L'estudi de les seves característiques, els punts de discontinuïtat, la intersecció amb els eixos, ...



Hom pot representar una funció, modificar els paràmetres que la defineixen i veure l'efecte que produeix aquest canvi a la seva gràfica. Normalment el que es fa en multiplicar, considerar el valor absolut, ... és una operació amb la funció (composició de funcions). (La unitat 5 està dedicada a l'estudi d'aquest aspecte).

També es pot utilitzar com a comprovació de les gràfiques realitzades a classe; si són correctes, analitzar la influència de l'escala, etc.



El programa permet dibuixar moltes funcions del mateix tipus i per tant familiaritzar-se amb la seva gràfica. La representació d'una mateixa funció modificant els seus paràmetres permetrà estudiar la seva influència en la gràfica.

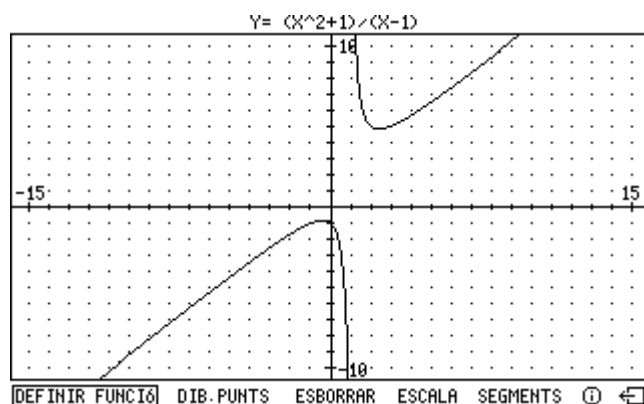
Aspectes concrets d'utilització d'algunes de les possibilitats d'ús d'aquest programa:

Es proposa començar a representar les funcions polinòmiques (primer les lineals, després les quadràtiques i així successivament fins al grau que es consideri oportú). Després, ampliar-ho a les funcions elementals (exponencials, logarítmiques, trigonomètriques, valor absolut, etc.).

Hom recomana que, un cop efectuada la representació, es faci un estudi de la relació existent entre la variable independent (X) i la variable dependent (Y), així com l'estudi de quin pot ser el domini i el recorregut (per a això s'utilitzarà en cas necessari l'opció ESCALA).

Es pot utilitzar per a l'estudi local d'una funció, màxims, mínims, punts d'inflexió (es podrà utilitzar l'opció d'ESCALA a fi de reduir l'escala i obtenir una més gran exactitud en aquest estudi).

En les funcions discontinües es pot estudiar quin tipus de discontinuïtat posseeix la funció.



Hom suggereix la utilització i la representació gràfica de dues funcions simultàniament per comparar la seva gràfica com és el cas de les funcions inverses, la suma de dues funcions, ...

ESCALA

La utilització de l'opció d'ESCALA, permet representar una gràfica en diferents escales, visualitzar diferents zones del pla, incrementar el nombre de divisions senyalades en la pantalla, etc.

Aquesta opció permet fer observar el diferent aspecte que pot tenir una mateixa gràfica segons els valors de l'escala.

També la modificació de l'escala a conveniència, pot ajudar a assimilar conceptes relatius a escala, pla cartesià, coordenades cartesianes, representació en un pla, ...

Didàcticament sembla més correcte començar treballant amb escales que mantinguin la proporció entre les unitats dels eixos.

3.3. Opcions i exemple d'ús

A continuació es proposen alguns exemples de possible utilització del programa. El procés de comunicació amb l'ordinador és el mateix que a continuació es proposa en els diferents exemples.

Una vegada que el programa està en marxa, trieu l'opció de COMENÇAMENT, prement quan estigui senyalada aquesta opció.

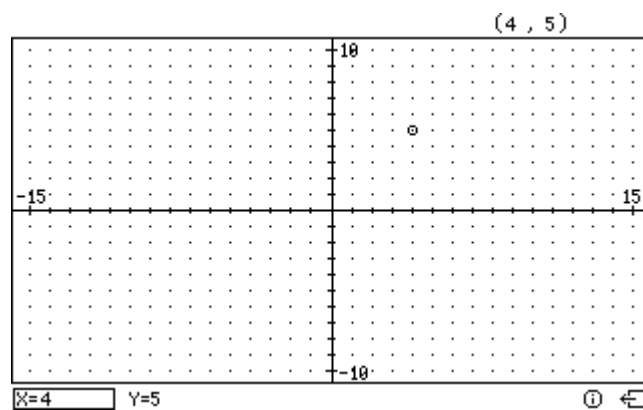
Apareix una pantalla que dóna opció a modificar l'escala. Si no coneixeu quin és el millor interval per definir la funció accepteu l'escala estàndard.

Representació de punts

En començar el programa i activar l'opció de dibuixar punts el programa espera l'entrada de valors. Els valors (X,Y) que s'introdueixen corresponen a un punt del reticle.

Es pot observar com queda remarcant el punt amb una circumferència de centre els valors entrats.

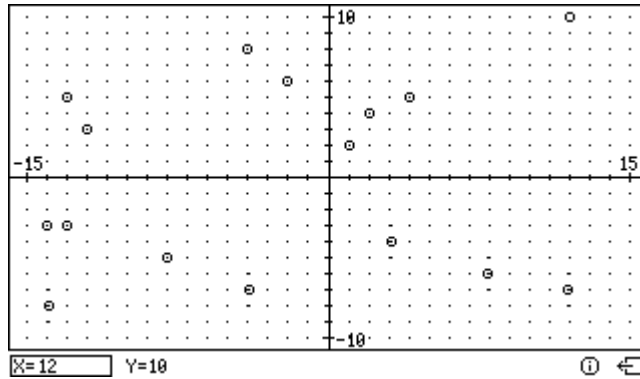
El punt és (4,5)



Característiques dels punts segons el quadrant on estan situats.

Es pot observar que els eixos divideixen el pla cartesià en quatre zones, cada una d'aquestes zones s'anomena quadrant.

Els punts es situen per tota la superfície.



Però amb quin criteri?

Estudieu la relació entre el valor de X (positiu, zero, negatiu) i la situació del punt.

Quins són els valors que es situen sobre l'eix OX?

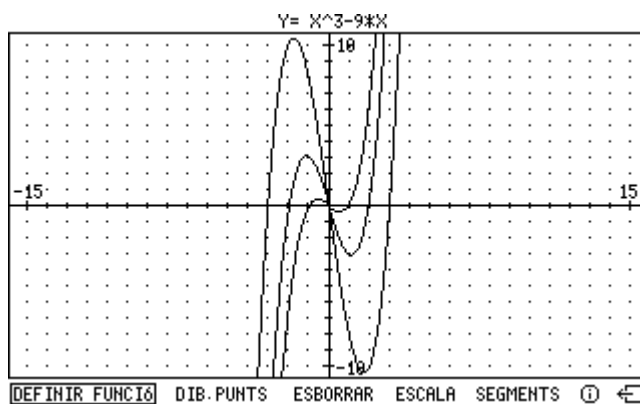
Si Y és positiva quina és la situació del punt?

Quin serà el valor del punt situat a la intersecció dels eixos.

Representació gràfica d'una funció

A continuació, en el requadre que surt per introduir una funció es defineix la funció principal.

Una vegada que la funció és dibuixada a la pantalla podeu adaptar l'escala, estudiar els punt més significatius, o dibuixar una segona funció, etc.



Representació gràfica de funcions polinòmiques.

Una primera funció o grup de funcions podrien ser funcions polinòmiques de tercer grau. Observeu com varia la gràfica en canviar el coeficient que multiplica a X.

Les tres gràfiques representades en la figura són:

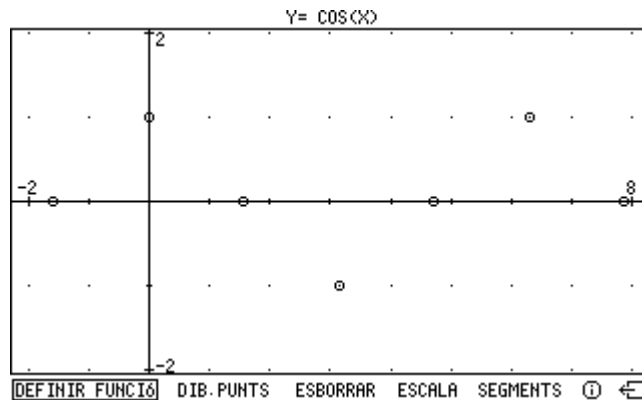
$$y = x^3 - x$$

$$y = x^3 - 4x$$

$$y = x^3 - 9x$$

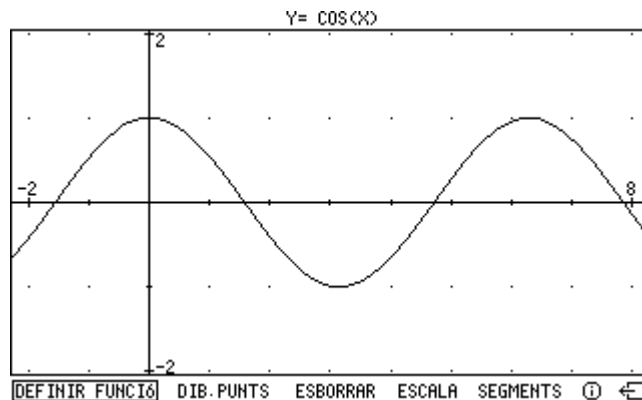
Representació gràfica d'una funció

En l'estudi d'una funció i la seva representació gràfica, es defineixen alguns valors representatius. Aquests valors corresponent a punts per on passa la funció.



En aquest cas els valors corresponent a punts de X múltiples de $\pi/2$.

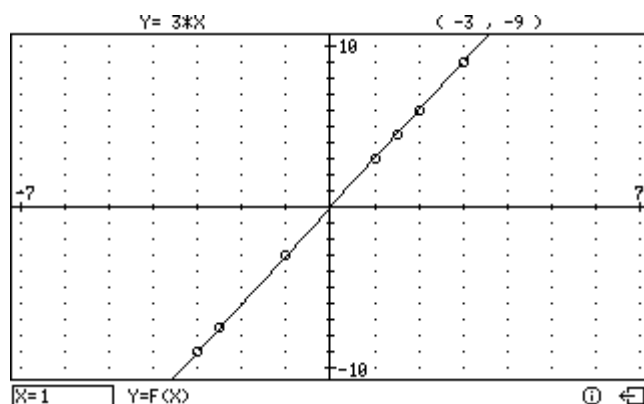
Es poden veure com aquests punts indiquen la gràfica de la funció, a més de coincidir amb els punts d'intersecció amb els eixos, i els màxims i mínims de la funció.



Representació de punts d'una funció

A partir de tenir definida una funció, i d'un valor per X es poden obtenir un punt de la funció, l'entrada al valor corresponent a Y serà f.

En el cas de la figura es pot estudiar el pendent de la recta

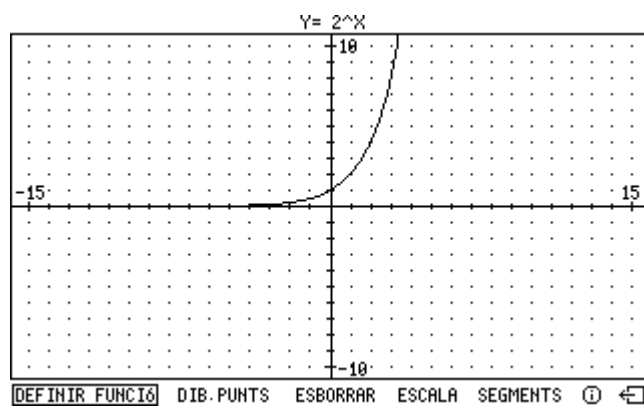


Representació gràfica de funcions elementals.

L'estudi de l'anàlisi matemàtica requereix conèixer totes les funcions anomenades elementals.

A la figura de la pàgina anterior pot observar-se la funció $y = 2x$

L'alumne pot observar quin és el comportament d'aquesta funció.



I respondre a qüestions com aquestes:

Domini de la funció:

Recorregut de la funció:

Intersecció amb els eixos:

És contínua ?

Quina és l'imatge de l'1 ?

És creixent ?. En tot el domini ?

Què succeeix a mesura que X creix ? Creix de la mateixa manera Y ?

Pot l'Y ser 0?

Calculeu el valor de les imatges: 0.2, 0.1, 2

Dibuixeu la funció auxiliar $Y = (1/2)X$ i expliqueu què observeu. És creixent ?

Quin és el punt d'intersecció entre les dues gràfiques.

Esborreu totes dues funcions i dibuixeu les següents funcions comparant-les.

$$Y = 2X ; Y = 3X$$

Què s'observa ?

De la mateixa manera es poden estudiar la resta de funcions elementals i plantejar qüestions que puguin servir de guia i ajut.

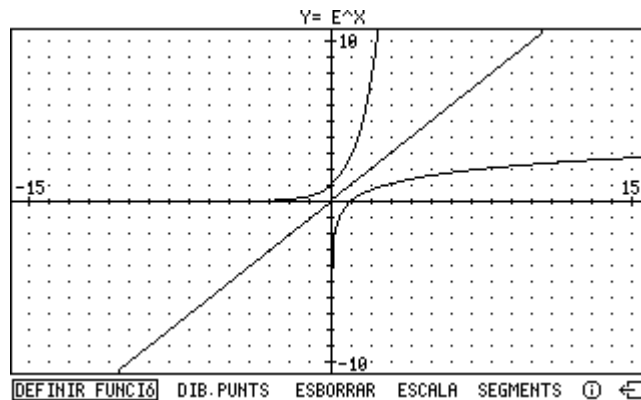
Funcions inverses.

Les possibilitats gràfiques del programa permeten comparar dues funcions inverses.

En estudiar gràficament les funcions exponencial i logarítmica, l'alumne respondrà a algunes qüestions.

Dibuixeu la funció $Y = \text{EXP}(X)$.

Dibuixeu la funció $Y = \text{LN}(X)$



Són creixents o decreixents ?

Tenen intersecció aquestes funcions ?

Calcula les imatges d'1 amb les dues funcions.

Tenen aquestes funcions alguna relació gràfica, són simètriques per una recta ?

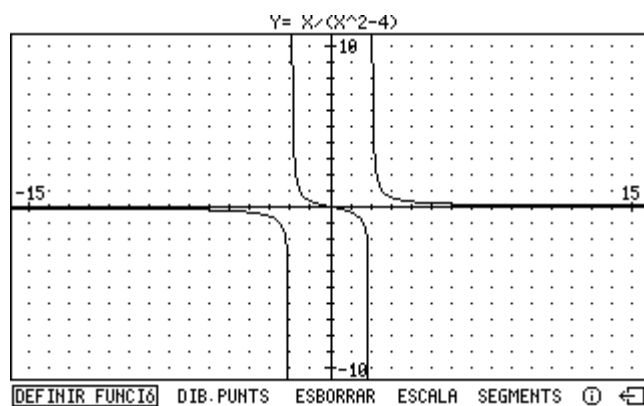
Dibuixeu la recta $y = x$ i comproveu la simetria d'aquestes dues gràfiques.

Estudi d'una funció i les seves discontinuïtats.

La funció:

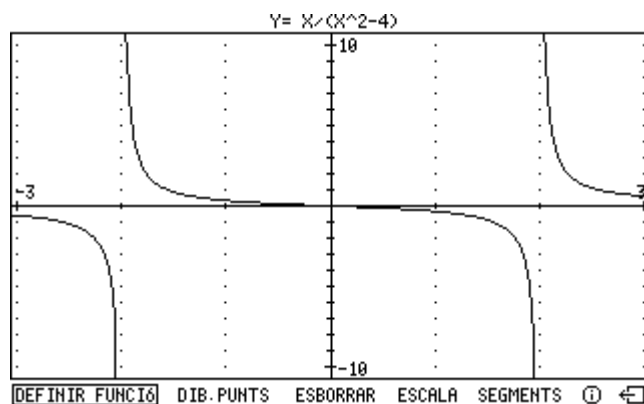
$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

que apareix a la figura següent, pot servir d'exemple per a estudiar les discontinuïtats d'una funció.



Fent servir l'escala i modificant-la convenientment estudeu per quins valors del domini l'Y s'aproxima a l'infinit.

Recordeu que si és necessari podeu modificar la forma de dibuixar a punts en lloc de segments.

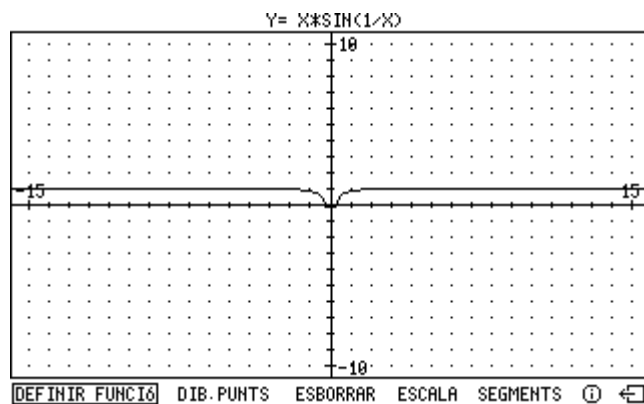


Utilització de l'opció d'ESCALA amb la funció $y = x \cdot \sin(1/x)$.

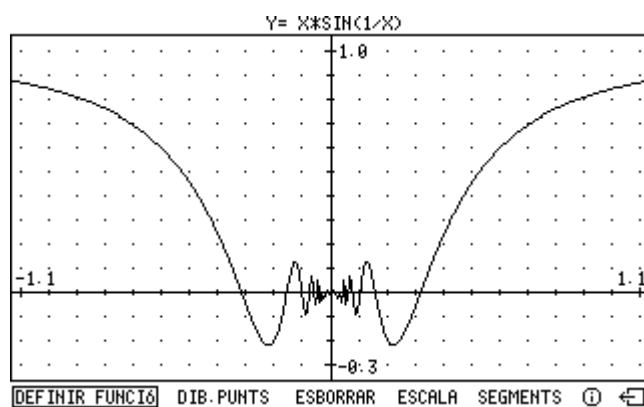
Com exemple d'aquesta utilització pot ser una funció contínua que permeti observar l'escalat.

Observeu la gràfica de la funció:

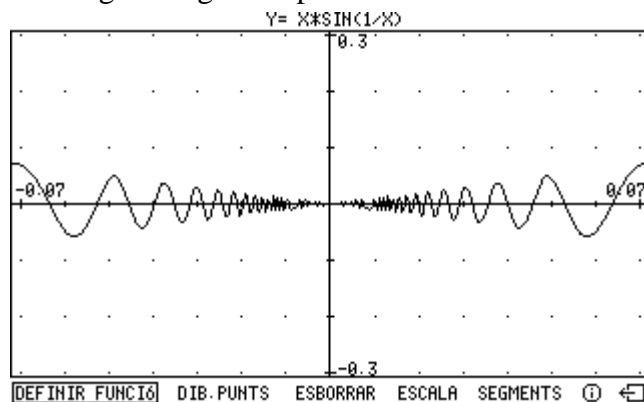
$$y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$



Si es volgués examinar més en detall la funció s'hauria de seleccionar l'opció ESCALA i introduir a continuació els valors corresponents.



A la següent figura es pot veure en més detall la funció seleccionada.



ANNEX

Instal·lació del programa al disc dur i execució

El programa pot ser executat des del mateix disquet o bé instal·lat al disc dur.

Per executar-lo des de disquet cal indicar com a unitat activa la unitat on es troba el disquet i teclejar

TRIANGLE ↵

Per instal·lar-lo al disc dur cal indicar com a unitat activa la unitat on es troba el disquet, teclejar

INSTAL ↵

i seguir les instruccions del programa instal·lador