

Chapitre 4 – Matériaux sous contrainte

EXERCICE 4-10

a) Force à la rupture

La contrainte locale σ_y développée à la pointe de la fissure est égale à :

$$\sigma_y = \sigma_a \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}} \right) \quad (1)$$

où σ_a est la contrainte appliquée.

À la rupture, σ_y doit être la résistance théorique à la traction :

$$\sigma_y \cong \frac{E}{10} \quad (2)$$

En combinant les équations (1) et (2) et en réarrangeant, on obtient :

$$\sigma_a \cong \frac{E}{10} \left(\frac{1}{1 + 2\sqrt{\frac{a}{r}}} \right)$$

Avec les données numériques :

$$2\sqrt{\frac{a}{r}} = 2\sqrt{\frac{6 \times 10^{-6} \text{ m}}{0,2 \times 10^{-9} \text{ m}}} = 2\sqrt{3 \times 10^2} \gg 1$$

Donc, on peut écrire l'équation (2) de façon simplifiée :

$$\sigma_a \cong \frac{E}{10} \frac{1}{K_t} = \frac{E}{10} \frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{r}}} \quad \rightarrow \quad \sigma_a \cong \frac{70 \text{ GPa}}{10} \times \frac{1}{2\sqrt{3 \times 10^2}} \cong 20 \text{ MPa}$$

Par définition, $\sigma_a = F/S$ où F est la force appliquée et S la section de la tige (ici 10 mm^2). Donc, on obtient :

$$F = \sigma_a S = 20 \text{ MPa} \times 10 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 200 \text{ N}$$

F = 200 N

b) Énergie élastique emmagasinée juste avant à la rupture

Le matériau étant fragile, il ne subit qu'une déformation élastique avant rupture et l'énergie $W_{\text{él}}$ emmagasinée par unité de volume de matériau est celle représentée par l'aire sous la droite élastique $\sigma = f(\epsilon)$.

$$W_{\text{él}} = \frac{1}{2} \sigma_a \epsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma_a^2}{E}$$

Le volume V de la tige égal à lS , l'énergie W emmagasinée avant rupture sera:

$$W = W_{\text{él}} V = \frac{\sigma_a^2 lS}{E2}$$

Avec les données, on obtient (en système SI)

$$W = \frac{(20 \times 10^6)^2 \times 0,1 \times 10 \times 10^{-6}}{2 \times 70 \times 10^9} = 2,857 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$W = 2,8 \times 10^{-3} \text{ J}$$

c) Caractéristiques de l'énergie élastique emmagasinée juste avant à la rupture

Cette énergie est une énergie **purement élastique** et est **entièrement restituable à la rupture**.