Dispense di I.U.M. Modellazione Geometrica

Leila De Floriani, Paola Magillo

Cap.5: Problemi di intersezione nel piano

[Riferimento: cap.7.2 del libro di Preparata e Shamos]

Intersezione di segmenti

Problema P1

Dati `N` segmenti nel piano `{s1,s2,...,sN}`, calcolare i punti di intersezione di tali segmenti.

Output:
Per ogni coppia `sI, sJ (I <> J)` di segmenti che si intersecano, una terna `(sI,sJ,P)` con `P=(xP,yP)` punto di intersezione di `sI` ed `sJ`.

Problema P2

Dati `N` segmenti nel piano `{s1,s2,...,sN}`, stabilire se esiste almeno una coppia di segmenti che si interseca.

Output: SI/NO (problema decisionale).

Calcolo di intersezione di segmenti (Problema P1)

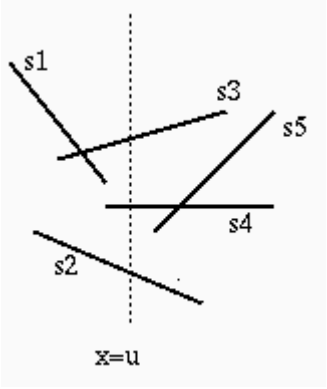
Introduciamo alcune ipotesi semplificative:

- non piu' di due segmenti si intersecano nello stesso punto.

- nessun segmento e' verticale

Utilizziamo una tecnica di PLANE SWEEP. Consideriamo una retta `l` verticale che si muove spazzando il piano da sinistra verso destra.

Tale retta divide il piano in due semipiani. Supponendo di avere gia' trovato l'insieme delle intersezioni alla sinistra di `l`, questo insieme non subira' variazioni dovute ai segmenti alla destra di `l`.



Definiamo una relazione d'ordine su un insieme di segmenti nel piano.

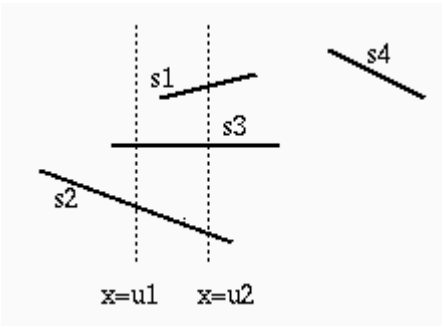
Def.1

Dati due segmenti `s1` ed `s2` nel piano, si dice che `s1` ed `s2` sono **confrontabili** in corrispondenza dell'ascissa `u` se la retta verticale `x=u` li interseca entrambi.

Def.2

Dati due segmenti `s1` ed `s2` confrontabili all'ascissa `u`:

- si dice che `s1` e' **al di sopra** di `s2` rispetto all'ascissa `u` se l'intersezione di `s1` con la retta `x=u` ha ordinata maggiore dell'intersezione di `s2` con la stessa retta;
- si dice che `s1` **coincide** con `s2` rispetto all'ascissa `u` se `s1` ed `s2` si intersecano lungo la retta `x=u`.

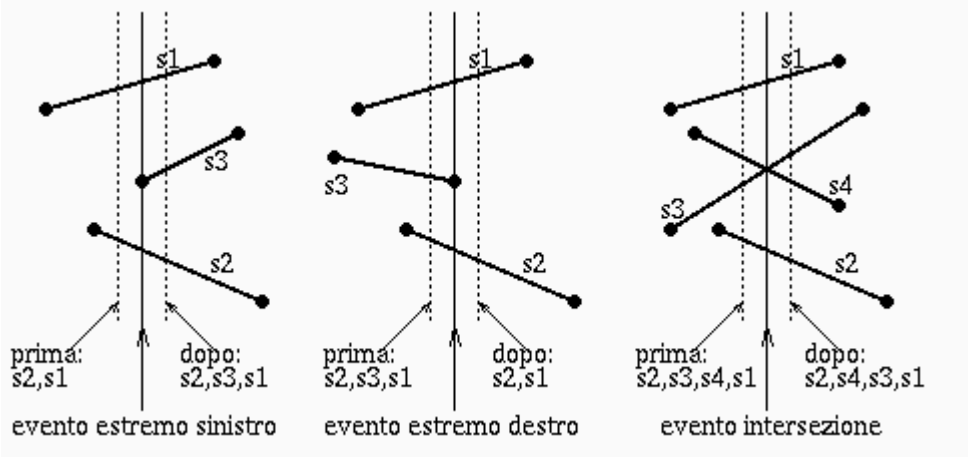


In figura: `s2,s3` sono confrontabili all'ascissa `u1`; `s1,s2,s3` lo sono all'ascissa `u2`; `s4` non e' confrontabile con `s1,s2,s3`.
All'ascissa `u1` si ha: `s3` sopra `s2`; all'ascissa `u2`: `s1` sopra `s3` sopra `s2`.

Fissata un'ascissa u, l'ordinamento dei segmenti confrontabili all'ascissa u e' un **ordinamento totale**. L'ordinamento cambia al variare dell'ascissa u considerata.

Al muoversi della sweep-line da sinistra a destra, l'ordinamento puo' cambiare solo in tre modi:

1. Si incontra l'estremo sinistro (= estremo di ascissa minima) di un segmento s:
   Il segmento s deve essere aggiunto nell'ordinamento
2. Si incontra l'estremo destro di un segmento s:
   Il segmento s deve essere eliminato dall'ordinamento
3. Si incontra il punto di intersezione di due segmenti s ed s':
   I due segmenti s ed s' devono essere scambiati nell'ordinamento



La correttezza dell'approccio plane-sweep e' motivata dalla seguente **condizione necessaria per l'intersezione di due segmenti s ed s'**:

> Se due segmenti s ed s' si intersecano in un punto del piano, allora deve esistere un'ascissa u per cui s ed s' sono consecutivi nell'ordinamento.

Strutture dati

Due strutture di base utilizzate dalla tecnica di plane-sweep:

- sweep-line status L
- event-point schedule E

Sweep-line status

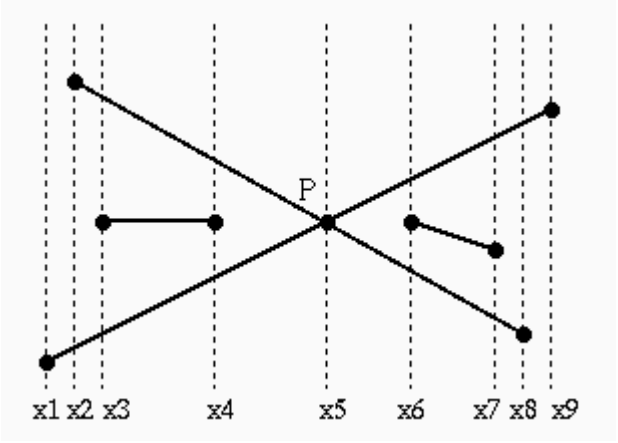
Descrizione della relazione di ordinamento all'ascissa u corrente (sequenza di segmenti che intersecano la retta verticale di ascissa u, ordinati dal basso verso l'alto).

Event-point schedule

Eventi = estremi sinistri o destri di segmenti e punti di intersezione, ordinati per ascissa non decrescente e, a parita' di ascissa, per ordinata non decrescente. Tuttavia, se in corrispondenza dello stesso punto si hanno un estremo sinistro e un estremo destro, si considera l'evento estremo sinistro come precedente l'evento estremo destro.
Quindi e' sempre possibile avere un ordinamento totale.

NOTA: gli estremi dei segmenti sono dati del problema (noti a priori), invece i punti di intersezione sono calcolati durante il processo di sweep stesso.

Il punto di intersezione fra due segmenti `s` ed `s'` viene determinato quando `s` ed `s'` sono trovati consecutivi nello stato corrente.



In figura: Il punto `P` e' determinato per la prima volta all'evento di ascissa `x2` ed e' poi processato come evento in corrispondenza di `x5`.

Struttura dati per event-point schedule

Ogni elemento della event-point schedule `E` codifica il **tipo di evento** e contiene il **puntatore** al segmento o ai segmenti (nel caso evento intersezione) cui si riferisce.

La struttura dati per `E` deve permettere le seguenti operazioni:

- `FIRST(E)` e `LAST(E)` : restituiscono il primo e l'ultimo evento, rispettivamente
- `NEXT(E,p)` : restituisce l'evento che segue `p` in `E`
- `INSERT_EPS(E,p)` : inserisce in modo ordinato un nuovo evento `p` in `E`
- `MEMBER(E,p)` : restituisce il valore TRUE se l'evento `p` e' in `E` e la sua ascissa e' maggiore dell'ascissa corrente `x` della sweep-line

`E` puo' essere implementato mediante un **albero bilanciato** che permette di effettuare le operazioni di cui sopra in tempo O(`log #E`).

Struttura dati per sweep-line status

Lo sweep-line status `L` descrive i segmenti che intersecano la sweep-line (ordinamento totale). Ogni elemento di `L` sara' il puntatore ad un segmento `s`.

La struttura dati per `L` deve permettere le seguenti operazioni:

- `INSERT_SLS(s,L)` : inserisce il segmento `s` nell'ordinamento totale `L`
- `DELETE(s,L)` : cancellazione il segmento `s` dall'ordinamento totale `L`
- `ABOVE(s,L)` : restituisce il segmento che si trova immediatamente sopra `s` nell'ordinamento totale `L`
- `BELOW(s,L)` : restituisce il segmento che si trova immediatamente sotto `s` nell'ordinamento totale `L`

Le ultime due operazioni servono per calcolo di intersezione.

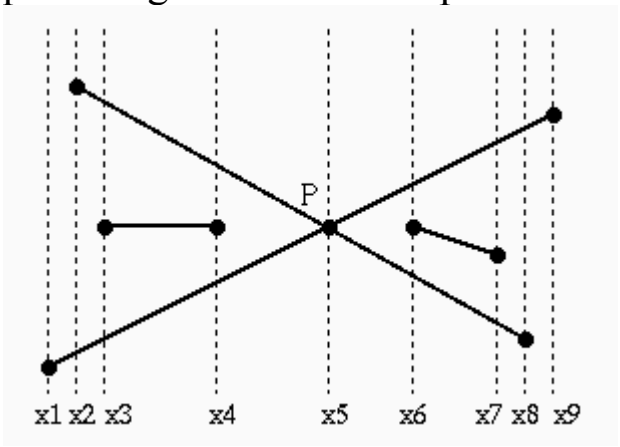
La struttura dati per `L` e' un albero bilanciato. In tal modo tutte le operazioni hanno complessita' temporale in O(`log #L`).

Algoritmo principale

Per ogni event point, in ordine da sinistra a destra:

- si aggiorna `L`
- si considerano le coppie di segmenti che diventano adiacenti in corrispondenza dell'evento per stabilire se si intersecano
- quanto un'intersezione viene trovata **per la prima volta**, l'evento intersezione viene inserito in `E`

Un'intersezione puo' essere trovata piu' volte. Occorre pertanto verificare se un punto e' gia' stato trovato prima di inserirlo in `E`.



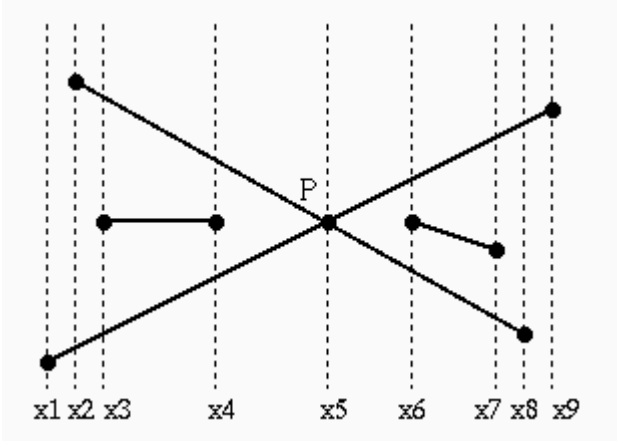
In figura: Il punto di intersezione `P` e' trovato due volte, cioe' agli eventi di ascissa

x2 ed x4.

Aggiornamento dello stato

Abbiamo tre tipi di eventi:

1. p estremo sinistro di segmento s:
   - inserisci s in L
   - sia s1 il segmento sopra s
   - sia s2 il segmento sotto s
   - test intersezione (s,s1)
   - test intersezione (s,s2)
2. p estremo destro di segmento s:
   - sia s1 il segmento sopra s
   - sia s2 il segmento sotto s
   - test intersezione (s1,s2) considerando solo intersezioni alla destra di p (quelle alla sinistra di p sicuramente le ho gia' trovate)



In figura: il punto P e' trovato anche all'evento di ascissa x7 ma non va considerato.

3. p punto di intersezione di due segmenti s1 ed s2 (con s1 sopra s2 all'immediata sinistra di p):
   - sia s3 il segmento sopra s1
   - sia s4 il segmento sotto s2
   - test intersezione (s2,s3)
   - test intersezione (s1,s4)
   - scambia s1 ed s2 in L

Descrizione dell'algoritmo

Input: lista s dei segmenti, ciascuno definito dalle coordinate dei suoi due estremi.

```
Algorithm LINE_SEGMENT_INTERSECTION
begin
  inizializza E con gli estremi dei segmenti di S;
```

```
  p := FIRST(E);
  (* p e' l'evento corrente *)
  repeat
    case event_type(p)
      estremo sinistro:
         begin
           s := segmento di cui p e' estremo sinistro;
           INSERT_SLS(s,L);
           s1 := ABOVE(s,L);
           s2 := BELOW(s,L);
           if (s1 interseca s) then UPDATE(s,s1,E);
           if (s2 interseca s) then UPDATE(s,s2,E);
         end
      estremo destro:
         begin
           s := segmento di cui p e' estremo destro;
           s1 := ABOVE(s,L);
           s2 := BELOW(s,L);
           if (s1 interseca s2 alla destra di p) then UPDATE(s1,s2,E);
           DELETE(s,L);
         end
      punto di intersezione:
         begin
           (s1,s2) := segmenti di cui p e' intersezione;
                      (* con s1 = ABOVE(s2) alla sinistra di p *)
           s3 := ABOVE(s1,L);
           s4 := BELOW(s2,L);
           if (s3 interseca s2 alla destra di p) then UPDATE(s3,s2,E);
           if (s1 interseca s4 alla destra di p) then UPDATE(s1,s4,E);
           scambia s1 ed s2 in L;
         end
    end case
    p := NEXT(E,p);
  until P = LAST(E)
end algorithm

Procedure UPDATE(s,s',E)
begin
  p := evento punto di intersezione definito da s ed s';
  if not MEMBER(p,E)
    begin
      INSERT_SLS(p,E);
      (x,y) := coordinate dell'intersezione;
      output (s,s',(x,y));
    end
end
```

Correttezza dell'algoritmo

L'algoritmo trova **tutte** le intersezioni, in quanto:

- solo segmenti consecutivi possono intersecarsi
- tutte le coppie di segmenti consecutivi sono esaminate correttamente almeno una volta

Nessuna intersezione e' **stampata** piu' di una volta (segue da come e' fatta la procedura UPDATE).

Complessita' temporale

Inizializzazione di E: $O(N \log N)$ per ordinamento di $2N$ informazioni e per inserimento in E.

Elaborazione di un evento: $O(\log N)$ poiche':

- intersezione di due segmenti: O(1)
- INSERT_SLS: O(log N) in quanto O(N) informazioni in L
- ABOVE, BELOW: O(log N)
- procedura UPDATE = MEMBER + INSERT: E puo' contenere al piu' 2N+K informazioni dove K = numero di intersezioni degli N segmenti. Poiche' K <= N su 2 = O(N^2), MEMBER + INSERT hanno costo in O(log(2N+K)) = O(log N)

Calcolo di NEXT: O(log(2N+K)) = O(log N)

Ciclo repeat: ripetuto 2N+K volte.

Complessita' totale (nel caso peggiore): O((N+K)log N). Tale complessita' dipende dalla dimensione dell'output

Note

Lower bound per il problema del calcolo dell'intersezione di N segmenti e' Omega(K + N log N)

Algoritmo ottimale in Theta(K + N log N) sviluppato da Chazelle e Edelsbrunner (1998).

Test di intersezione di segmenti (Problema P2)

Idea di base

Poiche' si vuole stabilire solo se esiste un'intersezione, e' inutile calcolare tutte le K intersezioni.

Supponiamo di utilizzare come eventi solo i 2N estremi dei segmenti dati. Siamo in grado di trovare un'intersezione quando esiste?

Algoritmo

- ordinare da sinistra a destra gli estremi dei segmenti
- per ogni evento p in E:
  - se p estremo sinistro di segmento s:
    - inserisci s in L
    - test di intersezione di s con i due segmenti rispettivamente al di sotto e al di sopra di s
  - se p estremo destro di segmento s:
    - test di intersezione fra i due segmenti al di sotto e al di sopra

di s
- elimina s da L

- non appena si determina l'esistenza di un'intersezione, l'algoritmo termina con risposta SI
- se si esauriscono i $2N$ eventi senza trovare intersezioni, l'algoritmo termina con risposta NO

Correttezza dell'algoritmo

L'algoritmo trova sempre un'intersezione in quanto la struttura dati contiene una rappresentazione corretta della relazione di precedenza alla sinistra del punto di intersezione piu' a sinistra.

NOTA: l'intersezione piu' a sinistra non e' detto che sia la prima intersezione trovata.

Strutture dati

Per event-point schedule si puo' utilizzare una struttura statica, come ad esempio un array di $2N$ elementi, in quanto tutti gli eventi sono noti a priori.

Per lo sweep-line status si usa la stessa struttura vista nell'algoritmo di calcolo pelle intersezioni.

Schema dell'algoritmo

L'ordinamento preliminare degli estremi dei segmenti dati avviene nello stesso modo visto per l'algoritmo di calcolo delle intersezioni (algoritmo per problema P1):

- punti di ascissa minore precedono punti di ascissa maggiore
- a parita' di ascissa, punti di ordinata minore precedono punti di ordinata maggiore
- a partita' di entrambe le coordinate, estremi destri precedono estremi sinistri

```
Algorithm LINE_INTERSECTION_TEST
begin
  ordina i 2N punti estremi dei segmenti; (* come spiegato sopra *)
  inserisci tali punti ordinati in array E[1..2N];
  for i=1 to 2N do
    p := E[i];  (* p e' l'evento corrente *)
    s := segmento di cui p e' estremo;
    if p estremo sinistro
         begin
           INSERT_SLS(s,L);
           s1 := ABOVE(s,L);
           s2 := BELOW(s,L);
           if (s1 interseca s) then return SI
           if (s2 interseca s) then return SI
```

```
         end
      else (* p estremo destro *)
         begin
           s1 := ABOVE(s,L);
           s2 := BELOW(s,L);
           if (s1 interseca s2) then return SI
           DELETE(s,L);
         end
  end for
end algorithm
```

Complessita' temporale

Inizializzazione di E: $O(N \log N)$ per l'ordinamento.
Operazioni su un singolo evento: $O(\log N)$.
Ciclo for ripetuto $2N$ volte.

Complessita' totale: $O(N \log N)$

Si puo' dimostrare che l'algoritmo e' ottimale nel caso peggiore.

Conseguenze

Test di intersezione di due poligoni semplici con $O(N)$ lati = $O(N \log N)$.

Test per stabilire se una sequenza di N segmenti definisce un poligono semplice = $O(N \log N)$.

Intersezione di poligoni

Problema P1: calcolo dell'intersezione di poligoni semplici

Dati due poligoni semplici P e Q, determinatre l'intersezione di P e Q.

Problema P2: test di intersezione fra poligoni semplici

Dati due poligoni semplici P e Q, determinare se P e Q si intersecano.

1. Consideriamo problema P1 per **poligoni convessi**.
2. Consideriamo problema P2 nel caso generale di **poligoni semplici**.

Calcolo dell'intersezione di poligoni convessi

Problema

Dati due poligoni **convessi** P (con L vertici) e Q (con M vertici), calcolare il poligono intersezione.

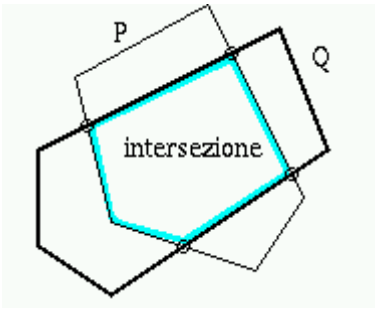
Teorema

L'intersezione di un poligono convesso P con L lati con un poligono convesso Q con M lati (se non vuota o degenere) e' un **poligono convesso** con al piu' $L+M$ lati.

Dimostrazione

Basta osservare che l'intersezione delle due regioni poligonali convesse definite dai due poligoni P e Q dati e' l'intersezione degli $L+M$ semipiani definiti dalle rette orientate associate ai lati di P e Q.

Nota: per retta associata ad un lato di P (o di Q) consideriamo, tra i due semipiani definiti da essa, quello contenente P (o Q).



Osservazioni

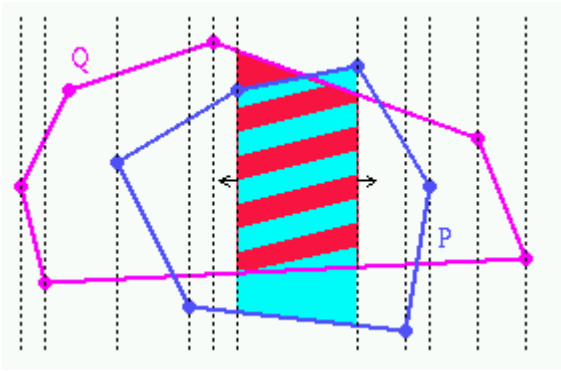
1. Un lato di P puo' avere 0,1 o 2 intersezioni con Q (e viceversa).
2. Il contorno del poligono intersezione consiste di catene alternate di vertici dei due poligoni; l'alternanza delle catene avviene ai punti di intersezione.

Metodo delle strisce

[Shamos e Hoey, 1976; ved. anche Preparata e Shamos, cap. 7.2]

Idea

Ridurre il problema dell'intersezione di sue poligoni convessi al problema dell'intersezione di $L+M$ regioni di forma geometrica semplice (trapezoidi).



Procedimento

1. Costruire strisce (ad esempio verticali) considerando le rette verticali passanti per i vertici dei due poligoni.
   Abbiamo al piu' `L+M` rette verticali, quindi al piu' `L+M-1` strisce.

2. Calcolare le intersezioni delle due regioni poligonali definite da `P` e da `Q` all'interno di ciascuna striscia.
   Si noti che ciascuna retta ha al piu' due intersezioni con ciascuno dei due poligoni, pertanto l'intersezione di una striscia con un poligono convesso e' un trapezoide.
   Quindi in ciascuna striscia si deve effettuare l'intersezione di due trapezoidi.

3. Fondere assieme le varie intersezioni risultati lungo i segmenti verticali.

   Questo portera' alla regione poligonale convessa che definisce l'intersezione di `P` e `Q`.

Passo 1: costruzione delle strisce verticali

Ordinare in una singola sequenza i vertici dei due poligoni `P` e `Q`.

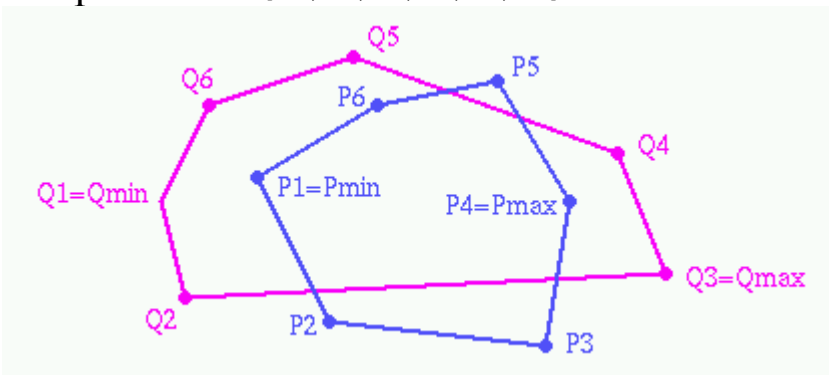
Supponendo che ciascuno fra `P` e `Q` sia fornito come sequenza in senso antiorario dei suoi vertici, l'ordinamento si puo' effettuare in tempo **lineare** nel modo seguente:

- Si determinano il vertice `Pmin` di ascissa minima ed il vertice `Pmax` di ascissa massima del poligono `P`.
  Tempo: O(`L`).
- Si spezza la catena di vertici di `P` in due:
  1. quella dei vertici da `Pmin` a `Pmax`
  2. quella dei vertici dal successivo di `Pmax` al precedente di `Pmin`

  La prima catena e' lasciata nell'orientamento dato, la seconda viene rivoltata, ottenendo cosi' due liste di punti entrambe ordinate per ascissa

non decrescente. Si immergono ordinatamente le due catene. Tempo: O(L).
- Si effettua la stessa operazione per il poligono Q. Tempo: O(M).
- Si immergono le due liste ordinate di vertici cosi' ottenute da P e da Q. Tempo: O(L+M).

In figura: per P le due catene sono [P1,P2,P4,P4] e [P6,P5], la catena ordinata complessiva e' [P1,P2,P6,P5,P3,P4].



Passo 2: calcolo dell'intersezione in ogni striscia

Puo' essere effettuata mediante una tecnica di plane-sweep considerando le strisce da sinistra a destra.

Per ogni striscia s si calcola (se esiste) l'intersezione P(s) di P e l'intersezione Q(s) di Q con s.

P(s) e Q(s) sono entrambi trapezoidi con due lati verticali giacenti su rette prefissate. L'intersezione di due trapezoidi cosi' fatti e' un poligono con al piu' 6 lati.

Passo 2: immersione dei risultati parziali

Per ciascuna striscia s, si unisce l'intersezione trovata nella striscia s con l'intersezione trovata nella striscia precedente.

L'unione delle intersezioni in due strisce consecutive avviene mediante l'eliminazione del lato verticale comune alle due intersezioni.

Complessita'

L'intersezione del poligono P (o Q) con una striscia a richiede tempo O(1) purche' sia possibile in tempo costante, dato un vertice v di P (o di Q) accedere ai due lati che hanno in comune il vertice v.

L'intersezione dei due trapezoidi all'interno di ogni striscia e' effettuata in

O(1), e cosi' l'immersione di due intersezioni consecutive.

L'algoritmo ha complessita' Theta(L+M).

Note

- Un algoritmo analogo puo' essere applicato per il calcolo dell'unione o della differenza di poligoni convessi (ma il risultato sara' un poligono semplice o una collezione di poligoni semplici).
- Lo stesso procedimento puo' essere applicato per risolvere il problema del **test** di intersezione (problema P2) fra poligoni convessi, sempre in Theta(L+M).

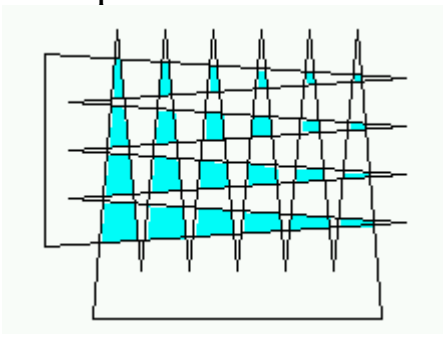
Intersezione di due poligoni semplici (cenno)

Consideriamo il problema P1: Determinare l'intersezione di due poligoni semplici.

Osservazioni:

1. L'intersezione di due poligoni semplici (non convessi) e' formata da **uno o piu'** poligoni
2. L'intersezione di due poligoni semplici (non convessi) con L ed M lati puo' avere O(LM) lati.

Esempio di intersezione formata da O(L+M) poligoni e lati:



Le due osservazioni valgono anche se i due poligoni sono poligoni a stella.

Teorema

Determinare l'intersezione di due poligoni semplici (anche a stella) ciascuno con N lati ha una complessita' Omega(N^2) nel caso peggiore.

Da questo risultato segue che:

1. algoritmi per il calcolo di intersezione hanno complessita' almeno quadratica
2. il problema del calcolo delle superfici nascoste per poligoni qualunque

ha complessita' almeno quadratica

Il problema P1 per poligoni semplici si riduce al problema di calcolare le intersezioni di N segmenti nel piano.

Test di intersezione per poligoni semplici

Due poligoni semplici P e Q si intersecano se e solo se vale una delle tre condizioni:

1. P e' contenuto in Q
2. Q e' contenuto in P
3. esiste intersezione fra un lato di P e un lato di Q

Algorimo

1. Stabilire se esiste intersezione di lati; in caso affermativo l'algorimo termina con risposta SI; altrimenti va al passo 2.
2. Stabilire se P e' contenuto in Q o se Q e' contenuto in P; in caso affermativo l'algorimo termina con risposta SI; altrimenti termina con risposta NO.

Passo 1

E' riducibile al problema del test di intersezione fra $N=L+M$ segmenti nel piano. La complessita' e' $O(N \log N) = O((L+M) \log (L+M))$.

Passo 2

Per stabilire se P e' contenuto in Q basta stabilire se un qualunque vertice di P e' contenuto in Q (questo e' vero poiche' sappiamo che i lati di P e di Q non si intersecano). Complessita': $O(M)$.

Per stabilire se Q e' contenuto in P si opera in modo analogo. Complessita': $O(L)$.

Complessita' del passo 2: $O(L+M)$.

Complessita' totale dell'algoritmo (passi 1+2): $O((L+M) \log (L+M))$.

Ottimizzazione

Puo' essere bene effettuare un test preliminare sui rettangoli minimali $R(P)$ ed $R(Q)$ che contengono i due poligoni P e Q rispettivamente.

Se `R(P)` ed `R(Q)` hanno intersezione nulla, possiamo concludere che `P` e `Q` non si intersecano. In caso contrario dobbiamo procedere applicando l'algoritmo di test d'intersezione descritto sopra.

Il rettangolo minimale `R(P)` e' definito come il piu' piccolo rettangolo con lati paralleli agli assi cartesiani contenente `P`.

`R(P)` sara' il rettangolo di diagonale `(x_min,y_min)-(x_max,y_max)` dove `x_min`, `x_max` rappresentano il valore minimo e massimo dell'ascissa dei vertici di `P`, e `y_min`, `y_max` rappresentano il valore minimo e massimo dell'ordinata dei vertici di `P`.

Test di "semplicita" di un poligono

E' un altro esempio di problema riducibile al problema del test di intersezione di segmenti.

Problema: Data una lista di punti distinti, tale lista definisce un poligono semplice?

Un poligono e' semplice se e solo se nessuna coppia di lati si interseca (eccetto che nei vertici estremi).

Soluzione: E' sufficiente stabilire nell'insieme di segmenti ottenuto unendo ciascun punto della lista al punto seguente (e l'ultimo al primo) vi sono intersezioni.

Complessita' nel caso peggiore: O(`N log N`).