Dispense di I.U.M. Modellazione Geometrica

Leila De Floriani, Paola Magillo

Cap.4: Localizzazione di un punto

[Riferimento: cap.2 del libro di Preparata e Shamos]

- Localizzazione di un punto in un poligono
- Localizzazione di un punto in una suddivisione piana

Localizzazione di un punto in un poligono semplice

(Problema detto anche **point location** o **point-in-polygon**)

Consideriamo:

- Problema "singolo" (per un singolo punto, una tantum) per poligoni semplici
- Problema "ripetitivo (per piu' punti) per poligoni convessi, estendibile a poligoni a stella

Formulazione del problema

Dato un poligono semplice `Pigreco` ed un punto `P`, determinare se `P` e' interno a `Pigreco`.

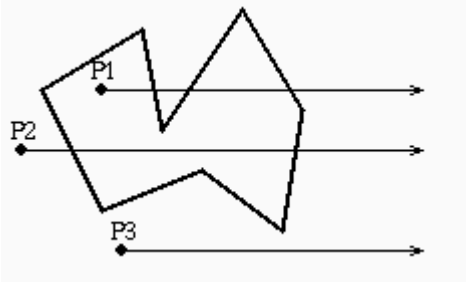
`P` e' detto **interno** a `Pigreco` sse `P` appartiene alla regione poligonale chiusa contornata da `Pigreco`.

Algoritmo

Definiamo un algoritmo che risolve il problema del point-location in tempo O(`N`) e senza preprocessing, per un poligono con `N` vertici.

Idea

Applicazione del teorema di Jordan.



Teorema di Jordan: una curva chiusa e semplice divide il piano in due regioni (interno ed esterno) che hanno in comune il contorno.

Consideriamo una semiretta orizzontale `l'` con origine nel punto `P` e diretta verso destra. Contiamo quante volte `l'` attraversa il poligono. Ogni volta che attraverso il poligono passo dall'esterno all'interno o viceversa. Alla fine (all'infinito) devo essere all'esterno.

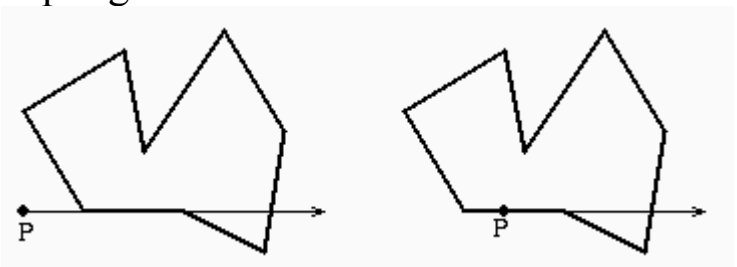
- `P` e' interno se il numero di attraversamenti e' dispari: la prima volta esco, e successivamente ogni volta che entro devo riuscire.
- `P` e' esterno se il numero di attraversamenti e' pari: ogni volta che entro devo riuscire, posso non entrare neanche una volta (zero attraversamenti).

Operativamente, intersechiammo la semiretta con ciascun lato del poligono. Dobbiamo gestire consistentemente i due casi particolari:

- semiretta sovrapposta a un lato (lato orizzontale)
- semiretta che passa per un vertice

Se un lato orizzontale e' completamente contenuto nella semiretta, puo' essere ignorato: la risposta all'interrogazione non cambia se immaginiamo di contrarre quel lato ad un punto.

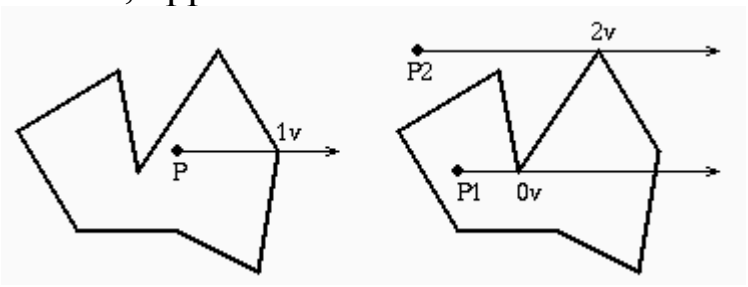
Se un lato orizzontale e' solo parzialmente sovrapposto alla semiretta, vuol dire che ne contiene il punto iniziale `P`. Quindi, appartenendo ad un lato, `P` appartiene al poligono.



Se la semiretta passa per un vertice `V` del poligono, e i due lati di `Pigreco` che

condividono il vertice `v` giacciono uno al di sopra e l'altro al di sotto di `l'`, allora l'intersezione va contata una sola volta (solo per uno dei due lati che intervengono, per es. quello sottostante).

Se la semiretta passa per un vertice `v`, e i due lati che condividono `v` giacciono entrambi al di sopra oppure entrambi al di sotto di `l'`, allora l'intersezione non va contata, oppure va contata due volte.



Tirando le somme, per ogni `e` lato di `Pigreco`:

1. Se `e` e' orizzontale:
   Si controlla se `P` e' interno ad `e` (inteso come segmento chiuso). In caso affermativo **concludiamo subito** che `P` e' interno, altrimenti **ignoriamo il lato** `e`.
2. Se `e` non e' orizzontale:
   Si controlla se `l'` interseca `e`. In caso affermativo, l'intersezione viene contata solo se e' **interna** ad `e`, oppure se coincide con il suo vertice estremo **di ordinata maggiore**.

Pseudocodice

```
Algorithm POINT_LOCATION (Pigreco,P,l')
 Pigreco: poligono
 P: punto (query point)
 l': semiretta con origine in P (orizzontale)
begin
 count := 0 (* contatore del numero di intersezioni *)
 for i:=1 to N do
  begin
   (* nel seguito edge(i) indica l'i-esimo lato di Pigreco *)
   if edge(i) non e' orizzontale
   then
     if edge(i) interseca l' in un punto interno o nel vertice
        estremo di ordinata maggiore
     then
       count := count + 1
   else (* edge(i) e' orizzontale *)
     if edge(i) contiene P
     then return "P e' interno a Pigreco"
   end (* ciclo for *)
 if count e' dispari
 then return "P e' interno a Pigreco"
 else return "P e' esterno a Pigreco"
end (* POINT_LOCATION *)
```

Analisi dell'algoritmo

Complessita' spaziale (storage): O(N) per la memorizzazione del poligono.

Complessita' temporale dell'interrogazione (query time): O(N) in quanto la semiretta deve essere intersecata con ogni lato non orizzontale del poligono.

Nessun preprocessing time.

Localizzazione di un punto in un poligono convesso

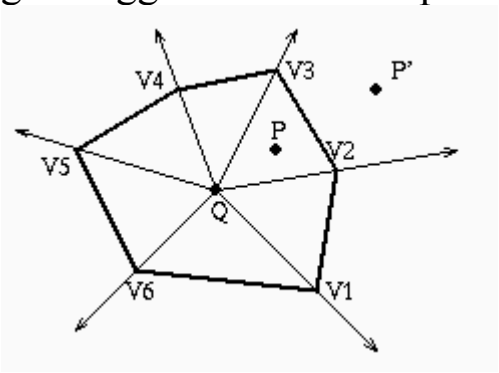
Caso particolare di poligono in cui vale la seguente proprieta' (che sfrutteremo nell'algoritmo).

Proprieta'

I vertici di un poligono convesso sono ordinati in modo angolare rispetto ad un qualunque punto interno.

Idea dell'algoritmo

Dividere il poligono convesso `Pigreco` in settori considerando un punto interno `Q` e gli `N` raggi uscenti da `Q` e passanti per i vertici di `Pigreco`.



Ogni settore e' suddiviso da un lato di `Pigreco` in due parti: una interna a `Pigreco` ed una esterna.

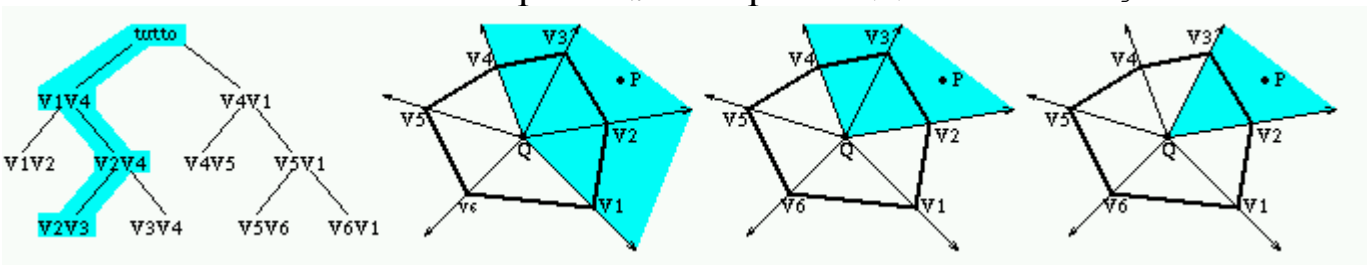
Dato un punto `P`, si tratta di:

1. localizzare `P` nel settore cui appartiene
2. stabilire da che parte giace `P` rispetto al lato del poligono che appartiene al settore di `P`

Passo 1

Si considera un sistema di coordinate polari centrato in `Q` e si effettua una **ricerca**

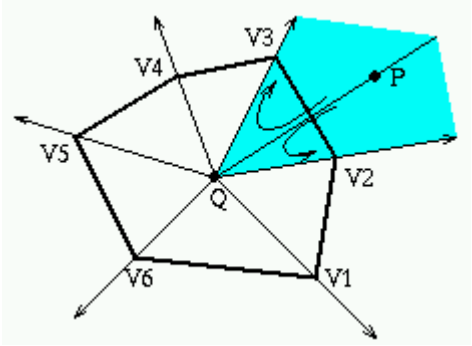
binaria sui settori definiti dal punto `Q` con i punti `V(i)` vertici di `Pigreco`.



Nell'esempio per trovare il settore del punto `P` analizziamo i settori `V1V4`, `V2V4`, `V2V3`.

Controllo se `P` appartiene al settore definito dai raggi passanti per `V(i)` e `V(j)`:

1. se l'angolo `V(i)QV(j)` e' minore di 180 gradi (cioe' se `V(i)QV(j)` definisce una svolta a destra), allora `P` appartiene al settore sse
   - l'angolo `PQV(j)` definisce una svolta a destra
     AND
   - l'angolo `PQV(i)` definisce una svolta a sinistra

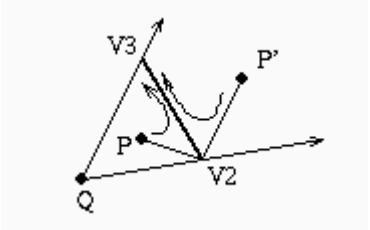


2. se l'angolo `V(i)QV(j)` e' maggiore di 180 gradi (cioe' se `V(i)QV(j)` definisce una svolta a sinistra), allora `P` appartiene al settore sse `P` non appartiene al settore supplementare (che e' minore di 180), ovvero sse
   - l'angolo `PQV(i)` definisce una svolta a sinistra
     OR
   - l'angolo `PQV(j)` definisce una svolta a destra

Passo 2

Sappiamo che `P` appartiene al settore definito dai raggi passanti per `V(i)` e `V(i+1)`:

- `P` e' esterno al poligono sse `PV(i)V(i+1)` definisce una svolta a destra
- `P` e' interno al poligono in caso contrario



Nota: `P` appartiene al poligono se `P` e' interno al segmento `V(i)V(i+1)`.

Valutazione dell'algoritmo

Preprocessing time: O(1), poiche' un punto interno si trova in tempo costante (baricentro dei primi tre vertici) e il contorno di `Pigreco` e' gia' dato ordinato radialmente rispetto a qualunque punto interno.

Query time: O(`log N`) determinato dal costo della ricerca binaria su `N` settori.

Storage: O(`N`) per i lati del poligono.

Esercizio

Quale struttura dati si puo' utilizzare per ottenere query time in O(`log N`)?

Estensione per poligoni a stella

L'algoritmo sopra descritto per poligono convessi funziona anche per **alcuni** poligoni non convessi

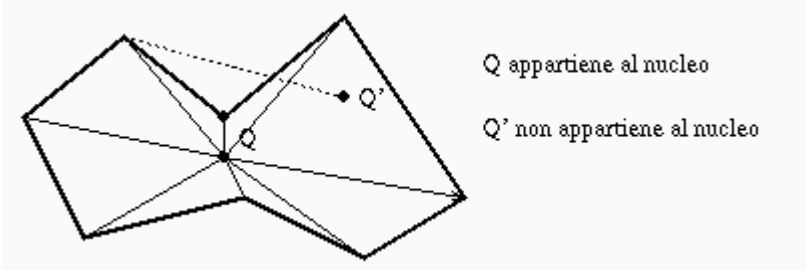
- non per tutti: solo quelli a stella
- non per qualunque punto interno: solo per un punto appartenente al nucleo del poligono a stella

La proprieta' dell'ordinamento angolare e' valida anche per **poligoni a stella** (**star-shaped**).

Definizione

Un poligono semplice `Pigreco` e' detto **poligono a stella** sse esiste un punto `Q` non esterno a `Pigreco` tale che per ogni punto `P` di `Pigreco` il segmento `PQ` e' completamente interno a `Pigreco`.

Il luogo dei punti `Q` che soddisfano la proprieta' di cui sopra e' detto **nucleo** di `Pigreco`.



L'algoritmo di point location per poligoni convessi puo' essere esteso ad un poligono `Pigreco` star-shaped scegliendo come punto `Q` un punto del nucleo di

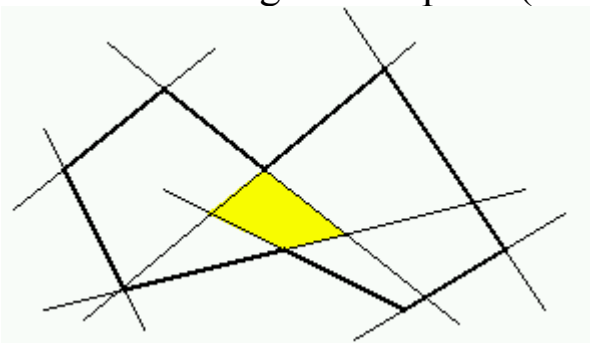
Pigreco.

Quindi per poligoni a stella il problema del point location puo' essere risolto in

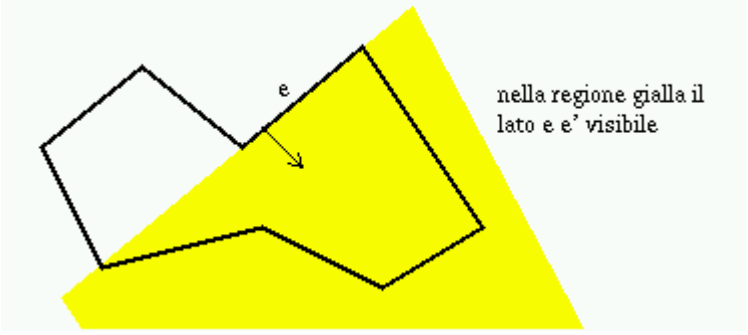
- O(log N) query time
- O(N) storage
- O(N) preprocessing time, dominato dal tempo per trovare il nucleo di Pigreco (ved. sotto); un punto interno al nucleo si trova in O(1).

Nucleo di un poligono star-shaped

Intersezione degli N semipiani (orientati) definiti dagli N lati del poligono.



Ogni semipiano definisce una zona in cui deve giacere il nucleo del poligono.



Esistono algoritmi per la determinazione del nucleo di complessita' O(N) (ved. cap.7 Preparata e Shamos).

Localizzazione di un punto in una suddivisione piana

Formulazione del problema

Sia Sigma = (V,E,F) una suddivisione piana. Dato un punto P nel piano, determinare la faccia f in F o lo spigolo e in E contenente P, o il vertive v in V che coincide con P.

Metodi di soluzione

Vediamo due metodi:

1. Metodo diretto (senza pre-elaborazione)
2. Metodo delle strisce (slab method) [cap.2 libro di Preparata e Shamos] che prevede una fase di pre-elaborazione con costruzione di un indice spaziale

Metodo diretto

Schema generale dell'algoritmo:

```
Algorithm DIRECT_POINT_LOC (P)
  for every f faccia interna in F
    Pigreco := il poligono definito da FV(f)
    case ( point-in-polygon(P,Pigreco,e,v) )
      INSIDE: return f;
      ONEDGE: return e;
      ONVERTEX: return v;
    end case
  end for
  f := faccia esterna
  return f
```

La procedura `point-in-polygon` implementa l'algoritmo di localizzazione di un punto in un poligono semplice. Essa restituisce un valore simbolico che descrive la situazione del punto rispetto al poligono:

- INSIDE se il punto e' interno al poligono
- ONEDGE se il punto e' interno ad un lato del poligono; il lato in questione viene restituito nel parametro `e`
- ONVERTEX se il punto coincide con un vertice del poligono; il vertice in questione viene restituito nel parametro `v`
- OUTSIDE se il punto e' esterno al poligono

Complessita' temporale

La struttura dati per la codifica di `Sigma` va scelta in modo tale che la relazione `FV(f)` sia ricavabile in tempo lineare in `#FV(f)`.
In questo caso, la complessita' temporale e' in O(`#V`) in quanto ogni spigolo della suddivisione piana viene considerato in esattamente due poligoni, e, all'interno della procedura `point-in-polygon`, ogni spigolo del poligono e' intersecato una volta con la semiretta orizzontale. Ne segue un numero di operazioni pari a `2(#E)`, cioe' in O(`#V`) per la formula di Eulero.

NOTA: il metodo NON richiede pre-elaborazione.

Metodo delle strisce (Slab method)

[Dobkin e Lipton, 1976; ved. anche Preparata e Shamos, cap.2]

Idea

Sovrapporre alla suddivisione piana `Sigma=(V,E,F)` un indice spaziale (struttura dati) che permetta di effettuare la localizzazione di un punto in tempo O(`log N`) dove `N=#V`.

Descrizione dell'indice spaziale

Data `Sigma` dividiamo il piano in al piu' `N+1` strisce orizzontali o verticali, di cui due non intersecano `Sigma`. Si considerano solo le strisce che intersecano `Sigma` (al piu' `N-1`).

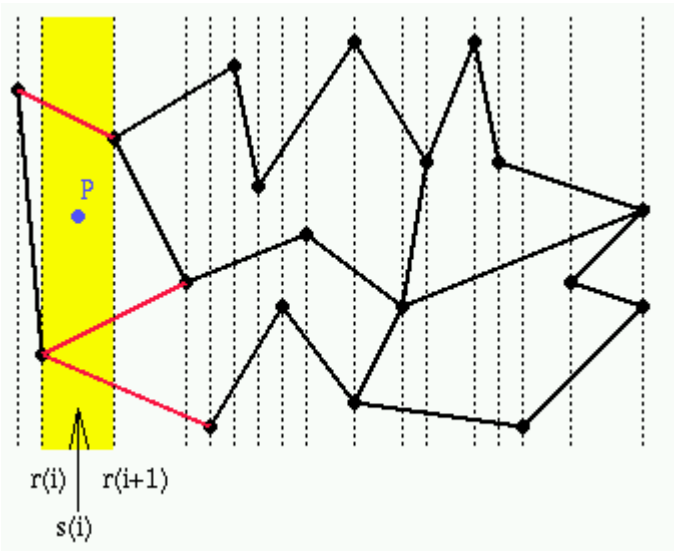
Nel seguito supponiamo una suddivisione in **strisce verticali**.

- L'intersezione di una striscia `s` con una faccia `f` della suddivisione piana, se non vuota, e' un trapezoide (che puo' degenerare in un triangolo).
- In conseguenza, i segmenti che costituiscono l'intersezione fra la striscia `s` e la suddivisione `Sigma` possono essere ordinati (nel caso di strisce verticali, ad esempio, dal basso verso l'alto).

Per localizzare un punto `P=(x,y)` si compie una ricerca sulle ascisse seguita da una ricerca sulle ordinate, entrambe in O(`log N`).

Dato un punto `P=(x,y)`:

- si trova la striscia contenente la `x`
- all'interno della striscia suddetta, si trova il trapezoide che contiene la `y`



Struttura dati per codificare indice spaziale e suddivisione

Per la suddivisione piana

Si puo' utilizzare una qualunque delle due strutture dati viste (Winged-Edge o simmetrica).

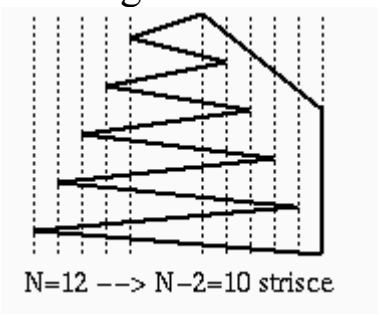
Nei vari algoritmi osserviamo quale e' l'insieme minimale di relazioni che dobbiamo mantenere nella struttura.

Per l'indice spaziale

- Tutte le strisce sono mantenute in un array `L`, in cui ciascun elemento corrisponde ad una delle rette `r(i)` che delimitano le strisce. L'array e' ordinato da sinistra a destra. Ogni elemento dell'array codifica:
  - puntatore ad uno qualunque dei vertici di `Sigma` che appartengono alla retta verticale `r(i)` (serve ad ottenere l'ascissa che definisce la retta `r(i)`)
  - puntatore alla struttura che descrive la striscia `s(i)` delimitata a sinistra da `r(i)`
- La struttura che descrive la singola striscia `s(i)` e' un albero bilanciato di ricerca `T(i)` in cui:
  - ogni nodo corrisponde ad un segmento (parte di uno spigolo `e` di `Sigma`) che interseca la striscia, e contiene puntatore allo spigolo `e`
  - gli archi descrivono la relazione d'ordine tra i segmenti che intersecano `s(i)`

Il costo della struttura nel caso pessimo e' O(`N^2`) in quanto abbiamo al piu' `N-1` strisce e O(`N`) segmenti per ciascuna striscia nel caso pessimo.

Nota: non e' possibile ridurre l'occupazione di memoria in quanto esistono suddivisioni piane che producono O(`N^2`) segmenti (si veda l'esempio illustrato nella figura: suddivisione piana consistente in un solo poligono "a pettine").



Algoritmo di localizzazione di un punto

Dato un punto P da localizzare nella suddivisione Sigma:

Fase 1

Si localizza la striscia s(i) contenente P effettuando una ricerca nell'array L in base all'ascissa di P.

Fase 2

Si localizza la faccia, spigolo o vertice contenente all'interno di s(i).

Per fare cio' si effettua una ricerca sull'albero T(i) a partire dalla radice:

- Ad ogni passo si confronta P con il segmento contenuto nel nodo corrente di T(i) allo scopo di stabilire se P giace sopra o sotto tale segmento.
  Il confronto si riduce a controllare se P sta a destra o a sinistra dello spigolo e di Sigma memorizzato nel nodo corrente. Nota bene: se "sopra il segmento" significa "a destra" oppure "a sinistra di e" dipende dall'orientamento dello spigolo e in Sigma.

- La ricerca termina quando si verifica una delle seguenti condizioni:
  1. P sta sopra o sotto a tutti i segmenti che intersecano la striscia. In questo caso P e' esterno a Sigma.
  2. P e' compreso fra due segmenti consecutivi fra quelli che intersecano la striscia. Siano e' ed e'' i lati di Sigma di cui tali segmenti fanno parte. In questo caso P e' contenuto nella faccia f comune a EF(e') ed EF(e'').
  3. P appartiene ad un segmento fra quelli che intersecano la striscia. Sia e lo spigolo di Sigma di cui tale segmento fa parte. In questo caso P appartiene allo spigolo e. Si deve stabilire se P coincide con uno dei vertici estremi.

La complessita' dell'algoritmo e' O(log N) in quanto si hanno al piu' N-1 strisce e O(N) spigoli che intersecano una striscia.log N N-1 N

OSSERVAZIONE: Per la localizzazione bastano le relazioni EF ed EV nella struttura di codifica di Sigma.

Algoritmo per la costruzione dell'indice spaziale

- INPUT: suddivisione piana Sigma
- OUTPUT: struttura a strisce S (indice spaziale)

Metodo brute-force

1. Ordinamento dei vertici per ascissa non decrescente (vi possono essere piu' vertici con la stessa ascissa).
2. Eliminazione dei "doppioni", ottenendo quindi un ordinamento per ascissa strettamente crescente dei vertici che rimangono.
3. Costruzione dell'array di strisce `L` dalla lista ordinata di vertici cosi' ottenuta.
4. Per ogni striscia `s(i)`, inizializzare l'albero `T(i)` come vuoto.
5. Per ogni spigolo `e` di `Sigma`, per ogni striscia `s(i)` intersecata da `e`, inserire `e` in `T(i)`.

Complessita' temporale: O(N^2 (log N)) poiche' ogni spigolo puo' dover essere inserito in O(N) strisce, e l'inserimento in un albero bilanciato con O(N) nodi richiede O(log N).`N^2 (log N)NNlog N`

OSSERVAZIONE: L'algoritmo non usa coerenza spaziale fra le strisce e richiede solo che nella struttura di codifica di `Sigma` sia fornita la relazione EV.

Metodo con sweep-line

Sfruttiamo la coerenza spaziale fra strisce consecutive.

OSSERVAZIONE: Il contenuto di due strisce consecutive differisce solo per segmenti definiti da lati che incidono nei vertici di `Sigma` che giacciono sulla retta verticale di confine fra le due strisce.

Adottiamo un processo di **plane-sweep**: "spazzamento" del piano mediante una retta (detta **sweep-line**) orizzontale o verticale che si muove con continuita' sul piano.

In ogni sua posizione, la sweep-line e' caratterizzata da uno **stato**. Durante il moto della sweep-line, il suo stato cambia in corrispondenza di certi punti detti **eventi**.

Nel nostro caso consideriamo una sweep-line verticale che si muove da sinistra verso destra.

- Lo **stato** e' l'insieme degli spigoli di `Sigma` intersecati dalla sweep-line alla posizione corrente, ordinati dal basso verso l'alto.
- Gli **eventi** sono i vertici della suddivisione piana `Sigma`.

In corrispondenza degli eventi cambia l'insieme degli spigoli di Sigma intersecati dalla sweep-line, in altre parole lo stato cambia in corrispondenza di tutti e soli i vertici di Sigma. `Sigma Sigma`

In corrispondenza di una striscia `s(i)` l'albero `T(i)` che ne descrive il contenuto e' ottenuto copiando lo stato della sweep-line quando questa e' all'interno della striscia `s(i)`.

La coda degli eventi puo' essere un array poiche' tutti gli eventi sono noti a priori.

Lo stato della sweep-line deve essere rappresentato mediante un albero bilanciato `T`.

Schema dell'algoritmo:

1. Ordinamento dei vertici di `Sigma` per ascissa non decrescente ed inizializzazione dell'array `E` che rappresenta la coda degli eventi.

2. Per ogni vertice `v`:
   - Sia `VE(v)` la lista dei suoi spigoli incidenti.
   - Si suddivide `VE(v)` in due liste `VE1(v)` e `VE2(v)` che contengono rispettivamente gli spigoli entranti e uscenti da `v`. Uno spigolo e' definito *entrante* in `v` se `v` e' l'estremo di `v` avente ascissa massima; e' definito *uscente* in caso contrario. Si noti che uno fra `VE1(v)` e `VE2(v)` puo' essere vuoto.

3. Sia `L` l'array che definisce l'indice spaziale.

```
i := 1; (* prossima striscia da inizializzare *)
T := albero vuoto; (* sweep-line status *)
for j = 1 to N do (* j = cursore sull'array degli eventi *)
  P := E[j]; (* evento corrente *)
  for every e in VE1(P) DELETE(T,e);
  for every e in VE2(P) INSERT(T,e);
  if j < N AND E[j+1] ha ascissa maggiore di P
  then begin
        associa P alla striscia L[i];
        copia T in T(i);
        i = i+1; (* prossima striscia *)
       end if
end for
```

Complessita' temporale: O(N^2) nel caso peggiore in quanto dominata dall'operazione di copiatura di T in T(i).`N^2 T T(i)`

L'algoritmo tratta correttamente anche il caso di piu' vertici appartenenti alla stessa retta verticale.