Corso di I.U.M. Modellazione Geometrica

© Leila De Floriani, Paola Magillo

APPENDICE AL CAPITOLO 1

Consideriamo tre problemi geometrici:

- 1. Orientamento di una terna di punti
- 2. Determinazione se un punto e' interno / esterno / sul contorno di un poligono convesso
- 3. Test se due segmenti si intersecano

Algoritmi per problemi 2 e 3 usano 1 come operazione ausiliaria.

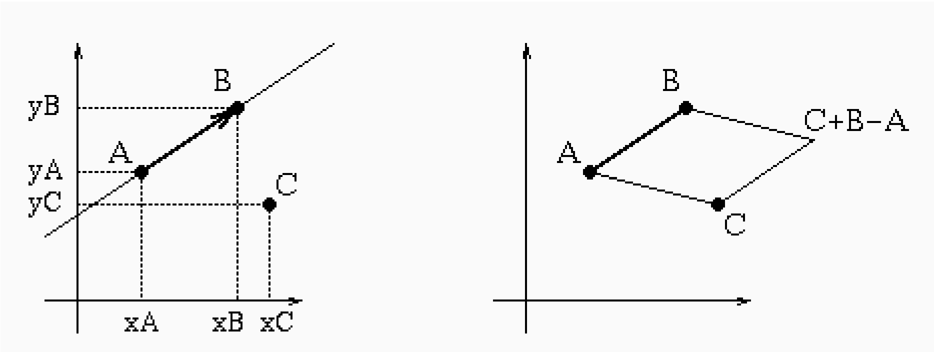
Orientamento di una terna di punti

Una delle primitive geometriche forndamentali, usata come operazione primitiva in un problemi piu' complessi.

Dati tre punti `A, B, C`, da che parte giace `C` rispetto alla retta passante per `A`, `B` ed orientata da `A` verso `B`?

Risposte possibili:

- `C` giace a destra di `AB` (la terna `ABC` definisce una svolta in senso orario),
- `C` giace a sinistra di `AB` (la terna `ABC` definisce una svolta in senso antiorario),
- `C` e' allineato con `AB`.



Vari modi di vedere il problema, portano tutti allo stesso algoritmo:

- **Modo 1.** Prendere le coordinate di `C`, sostituirle nell'equazione della retta orientata `AB`, e vedere che segno ha il risultato.
- **Modo 2.** Calcolare l'area con segno del parallelogramma di vertici `B, A, C, (C+B-A)` e vedere che segno ha.

Algoritmo 1 (con equazione della retta)

Equazione della retta orientata `AB`:

```
(x-xA)/(xB-xA) = (y-yA)/(yB-yA)
(x-xA)(yB-yA) - (y-yA)(xB-xA) = 0
```

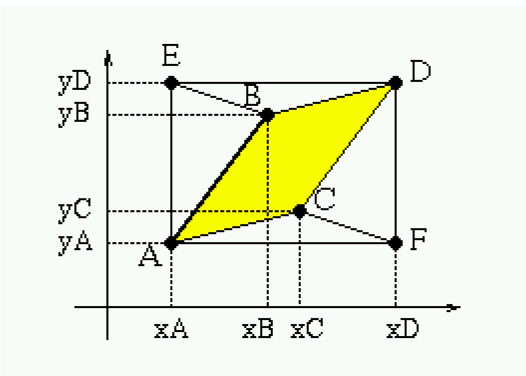
Polinomio che si ottiene sostituendo le coordinate di `C`:

```
(xC-xA)(yB-yA) - (yC-yA)(xB-xA)
```

- se e' minore di zero --> svolta a sinistra
- se e' maggiore di zero --> svolta a destra
- se e' uguale a zero --> allineati

Algoritmo 2 (con area del parallelogramma)

Si considerano i punti `A=(xA,yA), B=(xB,yB), C=(xC,yC), D=C+B-A=(xD,yD)=(xC+xB-xA,yC+yB-yA), E=(xA,yD), F=(xD,yA).`



Area del parallelogramma `ABDC` = area del rettangolo `AEDF` - aree dei triangoli `EAB`, `EBD`, `AFC`, `CFD` (tutte aree con segno).

```
Area(AEDF) = (xD-xA)*(yD-yA) = (xC+xB-2xA)*(yC+yB-2yA).
Area(EAB) = Area(CFD) = 0.5*(xD-xC)*(yD-yA) = 0.5*(xB-xA)*(yC+yB-2yA).
Area(EBD) = Area(AFC) = 0.5*(xD-xA)*(yD-yC) = 0.5*(xC+xB-2xA)*(yB-yA).

Area(ABDC) = Area(AEDF) - 2*Area(EAB) - 2*Area(EBD) =
(xC+xB-2xA)*(yC+yB-2yA) - (xB-xA)*(yC+yB-2yA) - (xC+xB-2xA)*(yB-yA) = ...
... = (xC-xA)*(yB-yA) - (xB-xA)*(yC-yA).
```

- se e' minore di zero --> svolta a sinistra
- se e' maggiore di zero --> svolta a destra
- se e' uguale a zero --> allineati

Conclusione

L'espressione di cui si valuta il segno e' il determinante

```
| yB-yA  yC-yA |
| xB-xA  xC-xA |

= (yB-yA)(xC-xA) - (yC-yA)(xB-xA)
= yA*xB - yB*xA + yC*xA - yA*xC + yB*xC - yC*xB
```

- se e' minore di zero --> svolta a sinistra
- se e' maggiore di zero --> svolta a destra
- se e' uguale a zero --> allineati

Problemi numerici

Se il risultato e' molto piccolo in valore assoluto, puo' succedere che gli sia attribuito un segno errato a causa di errori di approssimazione inevitabili usando l'aritmetica floating point.

Una soluzione che di solito funziona e' quella di assumere una tolleranza epsilon>0 (molto piccola) e considerare come uguali a zero tutte le quantita' che in valore assoluto sono minori di epsilon.

In pratica si risponde che `C` e' allineato con `A` e `B` se la sua distanza dalla retta e' molto piccola, ovvero se l'area del parallelogramma e' molto piccola.

Complessita' temporale

Costante in quanto e' coinvolto un numero fissato di punti e di coordinate (3 e 6 rispettivamente).

Determinazione della posizione di un punto rispetto ad un poligono convesso

Siano `P1, P2, P3, ..., P(n)` i vertici di un poligono convesso, ordinati in senso antiorario.
Sia `Q` un altro punto. `Q`sta dentro, fuori, o sul contorno del poligono?

- `Q` giace dentro il poligono se `Q` giace a sinistra di tutte le rette orientate passanti per lati del poligono (la retta orientata da `P(i)` a `P(i+1)`, per ogni `i` da `1` a `n`).
- `Q` giace fuori dal poligono se `Q` giace a destra di almeno una delle rette orientate sopra dette.
- `Q` giace sul contorno del poligono se `Q` e' allineato con almeno una delle rette sopra dette, e giace a sinistra delle rimanenti. In particolare:
    - se `Q` e' allineato con una e a sinistra delle altre, allora `Q` giace all'interno di un lato
    - se `Q` e' allineato con due e a sinistra delle altre, `Q` coincide con un vertice
    - non sono possibili altri casi.

Complessita' temporale

O(`n`) dove `n` e' il numero di vertici (o, equivalentemente, di lati) del poligono.

Nel caso peggione (punto interno o sul contorno), si riduce ad esattamente `n` chiamate alla primitiva che controlla l'orientamento di una terna di punti. Ciascuna chiamata ha un costo costante.

Test di intersezione fra due segmenti

Due segmenti `AB` e `CD` si intersecano se e solo se

- i punti `A` e `B` giacciono da parti opposte rispetto alla retta di supporto del segmento `CD`, e
- i punti `C` e `D` giacciono da parti opposte rispetto alla retta di supporto di `AB`.

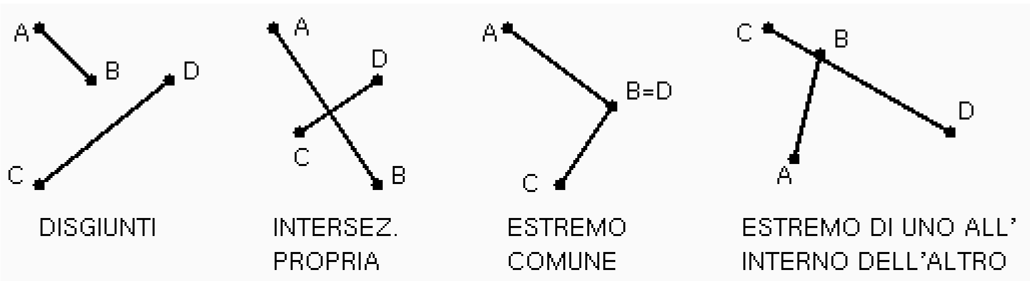
Si tratta quindi di calcolare il segno di quattro svolte. Complessita' temporale costante.

Casi particolari

In realta' il test non si puo' esaurire con una semplice risposta booleana: si intersecano / non si intersecano. Bisogna distinguere piu' casi:

1. i due segmenti sono disgiunti
2. i due segmenti si intersecano propriamente: l'intersezione e' un punto interno per entrambi i segmenti
3. i due segmenti si toccano condividendo un estremo comune
4. i due segmenti si toccano perche' uno degli estremi di un segmento e' interno all'altro segmento

Questo assumendo che i due segmenti *non giacciano sulla stessa retta di supporto*. Per segmenti giacenti sulla stessa retta si hanno ulteriori casi!



Nel caso 1, si ha che o `A` e `B` definiscono entrambi una svolta non nulla e dello stesso segno rispetto a `CD`, oppure viceversa `C` e `D` definiscono una svolta non nulla e dello stesso segno rispetto a `AB`.

Nel caso 2, `A` e `B` definiscono entrambi una svolta non nulla e di segno opposto rispetto a `CD`, e lo stesso si ha per `C` e `D` rispetto a `AB`.

Il caso 3 si puo' discriminare inserendo un controllo preliminare sulle coordinate dei punti estremi dei due segmenti. Comunque si avrebbe che uno ed uno solo fra `A` e `B` definisce una svolta nulla rispetto a `CD`, e uno ed uno solo tra `C` e `D` definisce una svolta nulla rispetto a `AB`.

Nel caso 4, si ha (supponendo che sia `AB` a toccare l'interno di `CD` con un suo estremo) che uno ed uno solo fra `A` e `B` definisce una svolta nulla rispetto a `CD`, ed i punti `C` e `D` definiscono svolte non nulle e di segno opposto rispetto a `AB`.

Esercizio

Se i due segmenti hanno la stessa retta di supporto, quali sono i casi possibili e come si discriminano in base alle svolte?