Relazione finale per il corso di dottorato:

“Modellazione geometrica”:

Prof. L. De Floriani e Prof. E. Puppo

Schemi di rappresentazione scompositiva basati su scomposizioni cellulari (complessi cellulari e simpliciali: definizioni e proprietà)

Silvia Biasotti

Introduzione

In modellazione geometrica l'uso di modelli scompositivi per la rappresentazione di oggetti geometrici è molto diffuso in diversi contesti applicativi quali il CAD/CAM, la visione automatica, i sistemi informativi geografici, la robotica, etc. In questo contesto i complessi cellulari sono stati utilizzati come modelli discreti di oggetti fisici per i quali non è possibile garantire o utilizzare una rappresentazione continua.

Le rappresentazioni tradizionalmente utilizzate sono applicate a contesti bi - e tridimensionali e si basano su modelli mediati dalla topologia algebrica, quali i complessi di celle poliedriche ed i complessi simpliciali. Tali strutture sono molto importanti perché consentono di definire delle strutture geometriche che generalizzano i complessi cellulari e soddisfano analoghi requisiti di minimalità e unicità della rappresentazione anche per oggetti di dimensione superiore. Lo sviluppo di tali strutture prevede altresì lo studio di appropriate strutture dati ed algoritmi di manipolazione che ne consentano un utilizzo efficace in ambito applicativo. In questo senso alcuni settori applicativi richiedono la modellazione e manipolazione di oggetti di dimensione maggiore a tre e necessitano, quindi, di una generalizzazione multidimensionale sia dei modelli adottati, sia delle relative strutture dati e tecniche di manipolazione. Dal punto di vista computazionale, sono molto importanti problemi quali la scomposizione cellulare di domini non semplici e la ricostruzione automatica di oggetti mediante modelli scompositivi a partire da dati di campionamento.

A questo proposito tra gli obiettivi che gli studiosi si sono proposti c’è lo sviluppo di modelli matematici discreti che consentano una rappresentazione minimale di oggetti a struttura composta aventi parti geometricamente non semplici, la definizione di strutture dati per la codifica e la manipolazione di tali modelli e lo sviluppo di tecniche di ricostruzione automatica di oggetti mediante modelli scompositivi a partire da dati di campionamento. Obiettivo di questa relazione, è presentare, da un punto di vista abbastanza teorico/matematico, una parte degli schemi scompositivi utilizzati in grafica per la rappresentazione di superfici e oggetto, in particolare quelli basati su strutture cellulari, quali sono i complessi cellulari. All'interno della famiglia dei complessi cellulari, particolare riguardo, derivante dagli aspetti applicativi che rivestono nel contesto grafico, verrà riservato ai complessi simpliciali.

Il resto della relazione è organizzato come segue: nel prossimo paragrafo è presentata la nozione di complesso cellulare e alcune sue proprietà mentre, nel successivo, viene data la definizione matematica di complesso simpliciale. Sia per la definizione di complesso cellulare che quella di complesso simpliciale si è cercato di considerare, prima di tutto, una versione più astratta (matematica) e, poi, quella utilizzata in pratica in modellazione geometrica. Questo perché tale definizione consente di utilizzare tali strutture anche per spazi non euclidei e per scopi teorici. Nell'ultima parte, infine, sono inseriti alcuni riferimenti bibliografici su questi argomenti.

Complessi cellulari

Intuitivamente, i complessi cellulari possono essere visivamente immaginati come unione di parti dello spazio euclideo e possono essere pensati come una generalizzazione della nozione di poliedro. Tale genere di spazi è stato molto studiato in letteratura (in pratica, sono gli spazi per i quali è nota l'azione del maggior numero di gruppi di trasformazione) e consente di conoscere le principali caratteristiche topologiche del modello in analisi permettendo un'accurata distinzione tra le varie possibili nozioni di equivalenza. I complessi cellulari sono stati introdotti in topologia algebrica per semplificare lo studio di invarianti topologici (quali connettività, genere, gruppi di omotopia e/o omologia) di una superficie o, più in generale, di varietà differenziabili. In modellazione geometrica la loro importanza è data dal fatto che consentono di scindere gli aspetti topologici di un modello (relazioni di adiacente tra celle, etc.) da quelli geometrici (sistemi di riferimento, lunghezze, etc.). Esistono due grandi sotto-famiglie di complessi cellulari: i complessi simpliciali, molto utilizzati in modellazione geometrica e aventi una struttura matematica piuttosto semplice, e i CW-complessi, molto utilizzati in topologia algebrica (tanto da essere spesso identificati con i complessi cellulari stessi) in quanto rappresentano una suddivisione minimale dello spazio sotteso dalla struttura. Malgrado i CW-complessi siano di fondamentale importanza per molte questioni teoriche (ad esempio è noto che su tali spazi la teoria dell'omotopia e quella dell'omologia coincidono), essendo essi costruiti incollando insieme le celle in maniera continua ma arbitraria, non rappresentano una buona struttura combinatoria e, in questa relazione, l'interesse verrà focalizzato sui complessi simpliciali. Di seguito viene proposta la definizione astratta di complesso cellulare:

Definizione: Sia X un insieme e $\Gamma \in \wp(X)$ un sottoinsieme finito delle parti di X. Un complesso cellulare (astratto) avente celle in Γ è definito dalla tripla (Γ, $\leq$, *dim*) dove

- $\leq$ è un ordinamento parziale stretto sugli elementi di Γ, detta relazione "bounding".
- *dim*: $\Gamma \rightarrow N$ è la funzione d'ordine, avente valori nell'insieme dei numeri naturali, definita in modo tale che se vale $\gamma \leq \gamma'$ e $\gamma \neq \gamma'$ allora $dim(\gamma) < dim(\gamma')$.

Definizione: Una *k-cella* è una cella γ per la quale $dim(\gamma)=k$. Analogamente, un complesso è detto *d-dimensionale* (*d-complex*) se d è il valore massimo della funzione d'ordine sulle celle di Γ e, in tal caso, d viene chiamata dimensione (o ordine) del complesso.

Definizione: L'insieme $B(\gamma)=\{\xi \in \Gamma \mid \xi \leq \gamma\} \setminus \{\gamma\}$ è detto *frontiera combinatoria* (bordo) della cella. In maniera simile, si definisce l'insieme "*star*" (*co-boundary*) di una cella $St(\gamma)=\{\xi \in \Gamma \mid \gamma \leq \xi\}$. Si definisce, invece, *link* della cella l'insieme delle facce che formano la frontiera combinatoria di $St(\gamma)$ non contenenti γ.

Dato un complesso Γ, le celle γ' che giacciono sulla frontiera di una cella γ sono dette facce di γ, più precisamente:

Definizione: Sia Γ un complesso cellulare e $\gamma \in \Gamma$ una cella, si definiscono facce di γ tutte le celle $\gamma' \in \Gamma$ tali che $\gamma' \subseteq \gamma$. Una faccia è detta propria se $\gamma \neq \gamma'$.

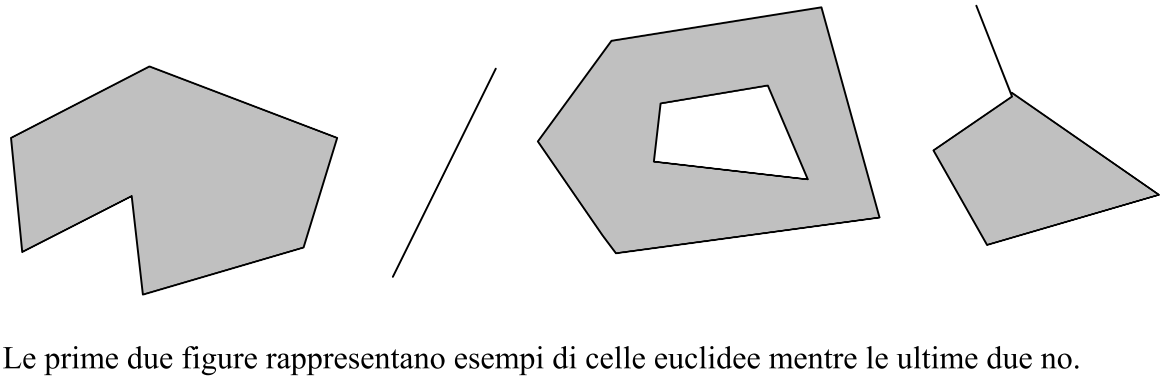
Con riferimento alle definizioni precedenti, l'insieme delle facce di una cella γ è detto frontiera di γ in Γ; e star di γ è l'insieme delle celle γ' tali che γ è una faccia di γ' in Γ.

Ogni cella avente dimensione k in un complesso k-dimensionale è detta *cella massimale*. Una cella per la quale $St(\gamma)=\{\gamma\}$ è detta *cella top*, cioè una cella top è una cella che non appartiene alla frontiera di nessun'altra cella; da questo si deduce che le celle massimali sono anche celle top, non è vero pero il viceversa in quanto possono esistere celle non massimali ma top. Questa proprietà è in stretta relazione con la nozione di regolarità di un complesso cellulare espressa in seguito.

La definizione di complesso cellulare data in precedenza è molto astratta ed è una struttura che è possibile applicare anche a insiemi non euclidei. In modellazione geometrica gli spazi in cui si lavora sono, di solito, euclidei e, a questo riguardo, è possibile introdurre una realizzazione geometrica di un complesso cellulare. A tale proposito, qui di seguito, si propone la nozione di cella euclidea e, di seguito, quello di complesso cellulare euclideo. Anche in questo caso gli elementi fondamentali da considerare sono le celle.

Definizione: Si definisce $\gamma \in \mathfrak{R}^n$ una cella euclidea di dimensione *k* (*k-cella*), con $0 \leq k \leq n$ un sottoinsieme dello spazio euclideo $\mathfrak{R}^n$ omeomorfo alla disco chiuso B^k.

Alcuni esempi, per meglio visualizzare la nozione di cella, sono mostrati nella seguente immagine:



Le prime due figure rappresentano esempi di celle euclidee mentre le ultime due no.

Una *k-cella* deve essere uniformemente di dimensione k (come mostrato nella figura precedente dove le immagini a sinistra rappresentano una k-cella e quelle a destra due regione non accettabile); in particolare, focalizzando l'attenzione su una cella *0*-dimensionale (un punto, comunemente detto *vertice*) la sua parte interna è il punto stesso e mentre la frontiera è vuota. Inoltre, assegnato un insieme X di celle di $\mathfrak{R}^d$ $(d \leq n)$, la loro unione, $\cup\{\gamma \mid \gamma \in X\}$, è detta dominio (carrier) di X, ed è denotato con $\Delta(X)$.

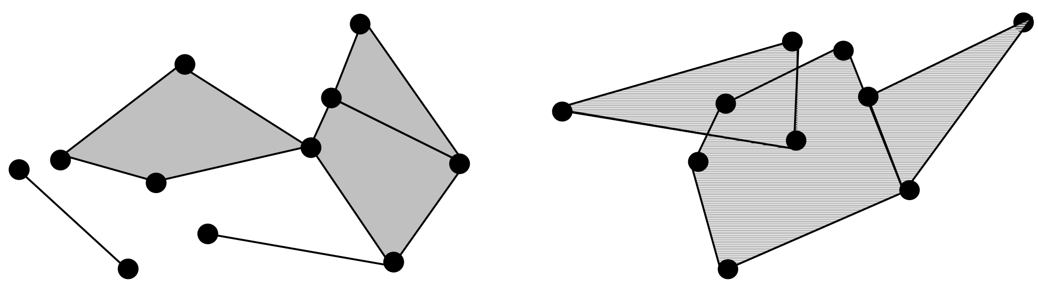
La realizzazione geometrica di un complesso cellulare astratto Γ nello spazio euclideo $\mathfrak{R}^n$ è ottenuta attraverso la definizione di un funtore che immerga le celle del complesso nello spazio euclideo associando ad ogni *k-cella* di Γ una *k-cella euclidea*. Comunque, non è sempre possibile immergere un generico complesso cellulare in uno spazio euclideo $\mathfrak{R}^n$, essendo questa limitazione dovuta alle proprietà topologiche delle varietà (teorema di Witney). Per quanto riguarda la definizione matematico/formale di come ottenere il funtore per la realizzazione geometrica di un complesso, un esempio è mostrato nella sezione successiva per un tipo particolare di complessi cellulari: i complessi simpliciali.

In modellazione geometrica, particolare interesse rivestono quei complessi cellulari che possono essere descritti attraverso entità geometriche, cioè possono essere immersi in uno spazio euclideo e rappresentati geometricamente. A questo proposito, qui di seguito, si supporrà di avere solo complessi cellulari che possono essere immersi regolarmente nello spazio euclideo reale, $\mathfrak{R}^n$, e si proporrà una struttura molto interessante da questo punto di vista: i complessi cellulari euclidei. Tale complessi sono formati da un insieme di celle euclidee, di dimensione eterogenea, tali che le loro parti interne siano disgiunte, l'unione ricopra tutto il dominio del complesso e la frontiera di ciascuna cella sia formata da celle di dimensione inferiore e appartenenti allo stesso complesso. Più formalmente:

Definizione: Un *complesso cellulare euclideo* è un insieme finito Γ di celle in $\mathfrak{R}^n$ tali che verifica le seguenti proprietà:

- l'unione delle parti interne delle singole celle di Γ è una partizione del dominio Δ(Γ);
- per ciascuna coppia di celle γ, $\gamma' \in \Gamma$ tali che $\gamma \cap \gamma' \neq \emptyset$, allora $\gamma \cap \gamma'$ deve essere l'unione disgiunta di celle di Γ di dimensione inferiore.

Esempi: Qui di seguito sono mostrati alcuni esempi di complessi cellulari euclidei e non:



Nella prima immagine è rappresentato un esempio è un complesso cellulare (non connesso) e nella seconda un insieme che non rappresenta alcun complesso cellulare: infatti, ci sono celle che si intersecano parzialmente. In nero sono stati evidenziati le celle 0-dimnesionali del complesso(vertici).

Proprietà

Una caratterizzazione di complesso cellulare, spesso utilizzata come definizione di complesso, in alternativa alla precedente, è la seguente:

Proprietà: Un insieme di celle Γ di $\mathfrak{R}^n$ è detto complesso cellulare (euclideo) k-dimensionale se e solo se se k è la massima dimensione delle celle di Γ e per ogni coppia distinta di celle $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ valgono le seguenti relazioni:

- le parti interne delle celle γ e γ' sono disgiunte;
- l'intersezione dei bordi di γ e γ' è l'unione delle parti interne di un sottoinsieme delle celle di Γ.

Un complesso cellulare euclideo può essere facilmente considerato come un complesso cellulare astratto, definito in precedenza; semplicemente tenendo presente che, in questa caso, le celle del complesso sono le celle euclidee, la funzione di ordinamento è la funzione che associa ad ogni cella la propria dimensione come spazio euclideo e la relazione bounding è naturalmente definita dalla seguente relazione, definita sulla frontiera combinatoria delle celle del complesso: $\gamma' \leq \gamma$ se e solo se $\gamma=\gamma'$ o $\gamma' \in B(\gamma)$.

Ulteriori definizioni sulla posizione di una cella all'interno di un complesso cellulare possono essere introdotte nel modo seguente: una cella $\gamma \in \Gamma$ viene detta interna se esiste un sottoinsieme della frontiera $\Delta\Gamma$ omeomorfo a un d-disco aperto the contenga $i(\gamma)$, in caso contrario γ è detta cella di frontiera. La *frontiera* di un complesso cellulare è il sottoinsieme di $\mathfrak{R}^n$ ricoperto dalla proprie celle di frontiera.

Proprietà topologiche

Un complesso cellulare (euclideo) è caratterizzato sia da proprietà geometriche che descrivono la posizione spaziale e l'estensione delle singole celle, sia da proprietà combinatorie, che descrivono come le celle sono connesse tra di loro. Le proprietà combinatorie di un complesso cellulare possono essere descritte attraverso le relazioni topologiche di *incidenza* e *adiacenza*. In particolare, due celle sono definite *incidenti* se e solo se una delle due facce è una faccia propria dell'altra. Due celle, inoltre, sono dette essere *s-adiacenti* se hanno in comune una *s*-cella (una cella di dimensione *s*); a questo proposito due *k*-celle sono *adiacenti* se sono *(k-1)*-adiacenti. Come si comprende dalle definizioni precedenti le relazioni di adiacenza sono rivolte a celle aventi stessa dimensione mentre le nozioni di incidenza si focalizzano su celle aventi dimensioni diverse; ad esempio, la relazione di incidenza sulla frontiera collega una cella alle proprie facce.

Dal punto di vista dell'utilizzo del modello in ambito grafico è di fondamentale importanza sapere quali celle siano connesse tra di loro e se sia possibile definire un cammino, sul complesso cellulare, che consenta di collegare entità distinte. A questo proposito seguono le definizioni di cammino e connessione su di un complesso cellulare.

Definizione: Dato un complesso cellulare Γ, una sequenza di elementi $[\gamma_0,\ldots, \gamma_k]$ di un sottoinsieme Γ' di Γ è detta *cammino* da γ_0 a γ_k in Γ' se per ogni coppia di celle γ_{i-1}, γ_i, $i=1,\ldots,k$, $\gamma_{i-1} \in B(\gamma_i)$ oppure $\gamma_{i-1} \in St(\gamma_i)$. Inoltre un sottoinsieme Γ' di Γ è detto *connesso* se ogni coppia di due elementi γ, $\gamma' \in \Gamma$ esiste un cammino in Γ' tra γ e γ'.

Come si comprensibile dalla definizione precedente, vista la semplicità della struttura di complesso cellulare, per tale struttura la nozione di connessione coincide con quella di connessione per archi.

La nozione di connessione, infine, può essere ulteriormente generalizzata effettuando ulteriori ipotesi sulla dimensione delle celle del cammino si connessione. Infatti, un complesso cellulare Γ è detto s-connesso se esiste una coppia di celle γ, $\gamma' \in \Gamma$ tali che esista un cammino $[\gamma_0,\ldots, \gamma_k]$ composto alternativamente da (s+1)-celle e s-celle del complesso Γ tali che γ e γ' siano coincidenti oppure incidenti in γ_0 e γ_k, rispettivamente.

Dalla richiesta che tutte le celle top di un complesso cellulare siano pure massimali deriva la nozione di complesso cellulare regolare. Più precisamente, tale nozione può essere formalizzata come segue:

Definizione: Un complesso cellulare Γ *k*-dimensionale è *regolare* se e solo per ogni cella *s*-dimensionale γ, $s<k$, l'insieme $St(\gamma)$, contiene almeno una *k*-cella.

In alternativa, si può dire che un complesso cellulare è regolare se ogni sua cella è una faccia di una qualche cella massimale, a questo riguardo si osserva che un *d*-complesso *(d-1)*-connesso è sempre regolare. Inoltre, il bordo $\partial(\Gamma)$ di un complesso cellulare regolare Γ è formato dalle celle di che sono contenute (insiemisticamente) nella frontiera del dominio di Γ ed è esso stesso un complesso cellulare di dimensione inferiore rispetto a Γ.

Ulteriori distinzioni sul tipo di complesso cellulare in esame possono essere fatta attraverso considerazioni sulla qualità degli "attacchi" delle diverse celle tra di loro. Infatti quando si vanno ad analizzare complessi cellulari derivanti da varietà differenziabili sembra naturale cercare analogie tra la "regolarità" di tali superficie e la struttura del modello. In quest'ottica si può intendere la qualità di essere "manifold" di un complesso cellulare.

Definizione: Il dominio di un complesso cellulare regolare *k*-dimensionale è detto essere un *manifold (varietà) k-dimensionale con frontiera* se e solo se:

- ogni *(k-1)*-cella appartiene alla frontiera di al più due celle;
- per ogni vertice *p*, il dominio di *St(p)* è omeomorfo a un disco oppure a un semidisco, entrambi chiusi, dello spazio euclideo *k*-dimensionale.

Nel caso di dominio senza frontiera la definizione precedente, viene semplificata richiedendo come prima condizione che la (k-1)-cella appartenga sempre alla frontiera di solo due celle e, come secondo requisito, che l'omeomorfismo dell'intorno del punto avvenga sempre con un disco chiuso.

Infine, un complesso cellulare viene detto *manifold* se lo è il proprio dominio. In particolare, si osserva che il complesso di bordo di un complesso cellulare manifold è esso stesso un complesso cellulare manifold.

Complessi simpliciali

I complessi simpliciali sono stati anch'essi definiti in topologia algebrica per semplificare il calcolo dell'omologia di un oggetto e rappresentano un caso particolare di complesso cellulare in cui le celle sono tutti simplessi. A questo proposito ci ricorda, brevemente, che il simplesso è una struttura matematicamente molto semplice, formata da un insieme i cui punti sono tutti combinazione convessa di un numero finiti di punti base. Attraverso l'utilizzo di tale strumenti, infatti, è possibile semplificare notevolmente il calcolo e il riconoscimento delle caratteristiche topologiche di un varietà differenziale, quali il numero di buchi, di cavità, l'orientabilità, etc. Qui di seguito viene formalmente presentata una definizione astratta di complesso simpliciale, indipendente dalla rappresentazione geometrica (questa parte viene presentata in maniera analoga a quella data nel corso di topologia algebrica dal prof. Grandis):

Definizione: Un complesso simpliciale è un insieme X, munito di un insieme $\Im$ di parti finite (dette parti legate o simplessi e che ne determina la struttura) che verifica le seguenti proprietà:

- l'insieme vuoto ($\emptyset$) è legato ($\emptyset \in \Im$, questa condizione è superflua se si suppone $X \neq \emptyset$);
- ogni elemento x di X è legato ($x \in \Im$);
- se si considera una parte legata $\alpha \in \Im$ e vale la relazione $\beta \subseteq \alpha$, allora β è anch'essa una parte legata.

Osservazione: l'insieme X non deve essere necessariamente finito ma lo devono essere le sue parti legate (altrimenti non si potrebbero definire complessi cellulari sull'insieme dei numeri relativi Z, etc). In pratica, poiché ogni sottoinsieme di una parte legata deve essere anch'esso legato, per definire un complesso simpliciale basta definire quali sono le parti legate "massimali" (nel senso che contengono il maggior numero di elementi).

Si può, inoltre, notare che per definire un complesso simpliciale è sufficiente avere un insieme anche molto semplice di elementi e non necessariamente uno spazio euclideo.

Nel seguito sono indicati alcuni esempi di complessi simpliciali.

1. Sia $X=\{a,b,c,d,e\}$, avente parti legate massimali gli insiemi $\{\{a,b,c\},\{c,d\},\{e\}\}$; esso è un complesso cellulare formato da e punti (dalla definizione segue che anche {a,b} è una parte legata, etc).
2. Sia $X=Z$ (insieme dei numeri relativi) e parti legate massimali le coppie $\{i,i+1\}$ (formale da due interi consecutivi), in questo caso l'insieme X non è finito ma le parti legate lo sono.

Proprietà.

Qui di seguito sono esposte alcune proprietà dei complessi cellulari. In particolare, attraverso la nozione di morfismo di complessi simpliciali, viene descritto come due complessi cellulari possono essere messi in relazione tra loro.

Definizione: Dati due complessi simpliciali X e Y, un'applicazione, $f\ X \rightarrow Y$ è, detta morfismo di complessi simpliciali (o applicazione combinatoria) se $\forall \alpha \in \Im X, f(\alpha) \in \Im Y$. ($\Im X$, $\Im Y$ rappresentano gli insiemi delle parti legati di X e Y, rispettivamente).

Analogamente alla definizione di morfismo (utile per permettere di caratterizzare la classe dei complessi simpliciali come una categoria), possono essere introdotte le nozioni di sottocomplesso (sottoinsieme di X con la struttura indotta dal morfismo di inclusione) e complesso quoziente.

Quanto sopra ha valore teorico generale, per una visualizzazione pratica di tali complessi e per loro applicazioni alla grafica e a contesti che fanno riferimento a spazi euclidei conviene considerarne la cosiddetta realizzazione geometrica.

Realizzazione geometrica di un complesso simpliciale:

Analogamente al caso più generale dei complessi celulari, discusso in precedenza, la definizione di complesso simpliciale richiede semplicemente l'esistenza di un insieme qualunque sul quale, poi, definire la struttura di complesso. In questo sottoparagrafo viene presentata la relazione che esiste tra un complesso simpliciale a una sua possibile realizzazione geometrica. Innanzitutto viene introdotta la nozione (insiemistica) di simplesso.

Definizione: L'insieme $\Delta^n=\{(t_0,t_1,\dots,t_n) \in \Re^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$ con $n \geq 0$ viene detto simplesso standard di dimensione n.

In particolare, se $n=0$, $\Delta^0=\{t_0 \in \Re \mid t_0=1\}=\{1\}$, il simplesso è un insieme formato da un unico punto, se $n=1$, $\Delta^1=\{(t_0,t_1) \in \Re^2 \mid t_0+t_1=1,\ t_1,t_0 \geq 0\}$ è un segmento avente come estremi i punti (0.1) e $(1,0)$ di $\Re^2$. Analogamente $\Delta^2=\{(t_0,t_1,t_2) \in \Re^3 \mid t_0+t_1+t_2=1,\ t_2,t_1,t_0 \geq 0\}$ è un triangolo i cui vertici sono definiti dalla base canonica di $\Re^3$ mentre Δ^3 è rappresentabile come un tetraedro con vertici nella base canonica di $\Re^3$, etc.

Similmente alla definizione di simplesso e utilizzando la nozione di involucro convesso, si può definire la realizzazione geometrica di un complesso simpliciale.

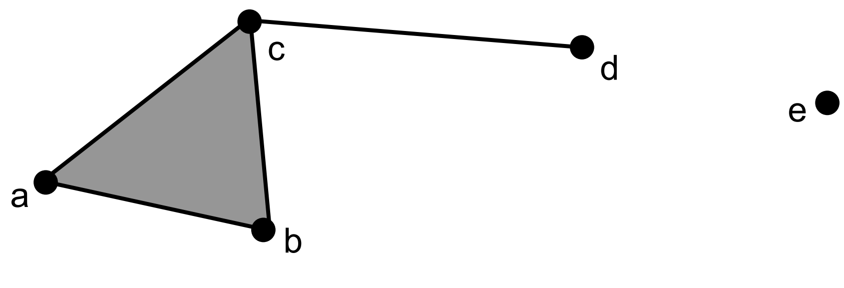
Definizione: Dato un complesso simpliciale X, si definisce realizzazione geometrica del complesso simpliciale X, l'insieme $\mathfrak{R}(X)=\{\sum_{i=0}^{n} t_i x_i \mid \{x_0,x_1,\dots,x_n\} \in \mathfrak{I}X,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$. I punti $x_0,\dots,x_n$ non devono essere necessariamente tutti distinti.

Proprio in riferimento alla realizzazione geometrica che si può dare per un complesso simpliciale, in letteratura, molto spesso si trova l'affermazione (formalmente non del tutto corretta) che "i complessi simpliciali siano essenzialmente poliedri

Osservazione: l'operatore $\mathfrak{R}$ può essere considerato come un funtore tra la categoria dei complessi simpliciali e gli insiemi. Inoltre la realizzazione geometrica di un complesso simpliciale è del completamente definita semplicemente definendo una relazione tra i vertici del complesso e punti dello spazio euclideo. Ogni complesso simpliciale di n punti, infine, può essere geometricamente realizzato (immerso regolarmente) come sottospazio di $\mathfrak{R}^{2n+1}$.

Esempi:

1. Nella figura seguente viene mostrata la realizzazione geometrica dell'insieme X dell'esempio *1*, dove ai punti $\{a,b,c,d,e\}$ è stata assegnata una posizione nel piano come rappresentato nell'immagine che segue.



La figura rappresenta la rappresentazione geometrica di un complesso simpliciale (cioè ogni cella è formata da un simplesso), in questo caso non connesso.

2. Con riferimento all'esempio 2 indicato in precedenza, la realizzazione geometrica dell'insieme dei numeri relativi come complesso simpliciale avente parti massimali 2 interi consecutivi è tutto l'asse reale. Infatti, la realizzazione geometrica di due interi consecutivi è il segmento della retta reale che gli unisce

(compresi i punti agli estremi) e, quindi, dalla scelta di $\Im X$ che è stata fatta, ne segue che la realizzazione di tale complesso simpliciale è tutto l'asse reale, $\Re$.

Complessi cellulari e complessi simpliciali

I complessi simpliciali possono essere facilmente inquadrati come complessi cellulari. A questo proposito, seguendo l'impostazione sulle dispense del corso, viene considerata la nozione di simplesso euclideo.

Definizione: Sia V_σ un insieme di $d+1$ punti dello spazio euclideo n-dimensionale $\Re^n$, e sia $d \leq n$. Allora il sottoinsieme σ di $\Re^n$ formato dai punti x che possono essere espressi come combinazione convessa dei punti di V_σ è detto *d-simplesso euclideo* generato da V_σ.. I punti di V_σ sono detti *vertici*.

Dalla definizione precedente segue che un d-simplesso euclideo è completamente caratterizzato dai propri vertici e che ogni sottoinsieme proprio dei vertici che formano il simplesso genera esso stesso un simplesso, avente dimensione inferiore e contenuto nella propria frontiera. Più formalmente, ogni s-simplesso τ euclideo generato da un insieme $V_\tau \subseteq V_\sigma$, di cardinalità $s+1 \leq d$, è detto s-faccia di σ. In questo contesto la frontiera combinatoria $B(\sigma)$ di σ è la sequenza di tutti i simplessi contenuti in σ (in pratica, di tutte le sue s-facce) e la relazioni tra simplessi e facce è di tipo combinatorio. In particolare, si ha che in un ogni d-simplesso ha, come facce, esattamente $\binom{d+1}{k+1}$ k-simplessi.

Definizione: Un insieme finito di simplessi Σ è detto complesso simpliciale euclideo quando sono verificate le relazioni seguenti:

- per ogni simplesso $\sigma \in \Sigma$, tutte le facce di σ appartengono a Σ;
- per ogni coppia di simplessi σ e τ, deve essere verificata una delle seguenti proprietà: $\sigma \cap \tau = \emptyset$ oppure $\sigma \cap \tau$ è una faccia appartenente sia a σ che a τ.

Se d è il massimo ordine dei simplessi di Σ allora d è detto ordine di Σ e Σ è detto *complesso d-simpliciale*.

In particolare, si osserva che la struttura combinatoria definita da un complesso simpliciale euclideo è anche una struttura di complesso simpliciale astratto. Questo fatto può essere notato se si considera come condizione di frontiera e funzione di ordinamento le relazioni $\tau \leq \sigma \Leftrightarrow \tau \subseteq \sigma$ e $dim(\sigma)=|\sigma|-1$ che sono implicate dalla definizione di simplesso euclideo. Analogamente le condizioni presenti nella definizione di un complesso simpliciale astratto ($\forall v \in V$, $\{v\} \in \Sigma$ e $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$) sono a loro volta verificate, poiché, in un complesso simpliciale euclideo, tutte le facce di ogni simplesso appartengono al complesso stesso. A questo punto è possibile affermare che un complesso simpliciale euclideo è anche un complesso cellulare euclideo e in un complesso simpliciale tutte le *s*-facce di una *k*-cella σ sono implicitamente definite dalla cella stessa ($B(\sigma)=P(\sigma)-\{\sigma\}$). Inoltre, un sottoinsieme di $\Re^n$ è detto *triangolabile* se è omeomorfo a un complesso simpliciale. Un insieme triangolabile è detto anche *poliedro topologico*.

Ulteriore proprietà di un complesso simpliciale è il fatto che esso è completamente caratterizzato dall'insieme dei propri simplessi top (ben definiti in quanto anche complesso cellulare). Di conseguenza, segue anche la definizione di regolarità: un complesso simpliciale *d*-dimensionale è detto *regolare* se è completamente caratterizzato dall'insieme delle proprie celle massimali (cioè le celle di dimensione *d*, quindi anche in questo caso si richiede che le celle top siano anche massimali).

A questo punto, analogamente a quanto fatto per i complessi cellulari, è possibile specificare, in termini di complesso simpliciale, cosa sia un manifold (con particolare riguardo al caso di dimensione *2*). Formalmente:

Definizione: Si definisce *2-manifold senza boundary* un sottoinsieme dello spazio euclideo omeomorfo a un complesso simpliciale *C*, di dimensione *2*, che soddisfi le seguenti condizioni:

- ogni *1*-simplesso in *C* è esattamente adiacente a due 2-simplessi;
- il link di ogni *0*-simplesso in *C* è una triangolazione del cerchio.

Analoga definizione può essere fatta per caratterizzare un manifold di dimensione superiore o con frontiera. In particolare, nel caso di un manifold con frontiera, è necessario distinguere tra simplessi interni al complesso e quelli giacenti sulla frontiera.

In conclusione si evidenzia che, nell'ambito della modellazione geometrica, per la realizzazione di modelli di superfici e oggetti, sono molto utilizzati complessi simpliciali regolari (e manifold) sia bidimensionali, le cui celle massimali sono triangoli, detti *triangolazioni*, sia tridimensionali, le cui celle massimali sono tetraedri, detti anche *tetraedralizzazioni*. In particolare, dalle proprietà di un complesso simpliciale elencate in precedenza, segue che la frontiera di un tetraedralizzazione è un *2*-complesso, cioè una triangolazione.

Riferimenti bibliografici:

C. Hoffmann, "Geometric and Solid Modeling", Morgan Kaufmann, 1989.

M. Mantyla, "An Introduction to Solid Modeling", Computer Science Press, 1988.

A. A.G. Requicha, "Geometric Modeling: A First Course", University of Southern California, 1999

C.R.F. Maunder, "Algebraic Topology", Cambridge Univ. Press, 1980.

E.H. Spanier, "Algebraic Topology", McGraw-Hill 1966.

R. Engelking, K. Sielucki, "Topology: a geometric approach", Sigma series in Pure Mathematics, Volume 4, Heldermann Verlag, Berlin

W. Massey, "Algebraic Topology, an Introduction", Harcourt 1967.

R. Brown, "Topology", Ellis Horwood 1988.

A. Hatcher, "Algebraic Topology", Cambridge University Press, 2002. http://www.math.cornell.edu/~hatcher/

J. R. Munkres, "Elements of Algebraic Topology". Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1984.

L. De Floriani, "Notions from Algebraic Topology", Appunti per il corso di dottorato "Modellazione geometrica", a.a. 2002.

P. Magillo, "Spatial Operations on Multiresolution Cell Complexes", Tesi di dottorato, Dipartimento di Informatica e Science dell'Informazione, Università di Genova, 1999.